

## Osa 1: mahdollisia laskuharjoitustehtäviä

Tällaisia pitäisi osata laskea, mutta jotkut ovat liian pitkiä koetehtäviksi.

1.  $N$  hiukkasesta koostuvan klassisen ideaalikaasun partitiofunktio on

$$Z_N(T, V) = \frac{1}{N!} (Z_1(T, V))^N, \quad (1)$$

missä  $Z_1(T, V)$  on yhden hiukkasen kaasun partitiofunktio. Laske kaasun suuri potentiaali  $Z_1(T, V)$ :n funktiona ja osoita, että kaasu toteuttaa ideaalikaasun tilanyhtälön.

2. Johda klassisen ideaalikaasun hiukkasten nopeuksien todennäköisyysjakauma eli Maxwellin nopeusjakauma.

3. Fotonikaasun vapaa energia on

$$F = -\frac{\pi^2 k_B^4 V}{45(\hbar c)^3} T^4. \quad (2)$$

Laske tästä fotonikaasun entropia ja osoita, että adiabaattisessa prosessissa  $VT^3 = \text{vakio}$ . Mikä on adiabaattinen tilanyhtälö, jossa muuttujina ovat tilavuus ja paine?

4. Wignerin kristalli on elektronien muodostama kaksiulotteinen kolmionhila. Tässä hilassa etenevien fononien (kidevärähtelyt) dispersiorelaatio on  $\omega(k) = \alpha\sqrt{k}$ . Osoita, että matalassa lämpötilassa Wignerin kristallin lämpökapasiteetti on verrannollinen lämpötilan neljanteen potenssiin.
5. Laske mustan kappaleen säteilyn lämpökapasiteetti hiukasta kohden; vertaa klassisen ideaalikaasun tulokseen  $C_V/N = (3/2)k_B$
6. Tarkastele vuorovaikutuksettomia bosoneita kolmessa ulottuvuudessa siten, että ne noudattavat dispersiorelaatiota  $\varepsilon = A\sqrt{k}$ . Osoita, että tällöin hiukkastiheys on

$$n(T, \mu) = \frac{N}{V} = \frac{120}{\pi^2} \left( \frac{k_B T}{A} \right)^6 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^6}, \quad (3)$$

missä nk. fugasiteetti on  $z = \exp(\beta\mu)$ . Laske myös hiukkastiheyttä  $n$  vastaava bosekondensaation kriittinen lämpötila  $T_c$ .

7. Tarkastellaan 2-ulotteista fermionijärjestelmää, jonka dispersiorelaatio on

$$\omega^2(\mathbf{k}) = 4\Omega^2 [\sin^2(k_x/2) + \sin^2(k_y/2)], \quad (4)$$

missä 2-ulotteinen liikemäärävektori  $\mathbf{k}$  on rajoittunut hilan Brillouinin vyöhykkeelle eli neliöön  $k_x \in [-\pi, \pi]$ ,  $k_y \in [-\pi, \pi]$ . Piirrä systeemin fermipinta, kun  $\varepsilon_F = \sqrt{2}\hbar\Omega$ ,  $2\hbar\Omega$ , tai  $\sqrt{6}\hbar\Omega$

8. Tarkastele ideaalista kvanttikaasua (BE tai FD), jolla on dispersiorelaatio  $\varepsilon = ak^b$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$   $d$ -ulotteisessa avaruudessa. Osoita, että kaasun tilanyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$PV = cE, \quad (5)$$

ja määritä vakio  $c$ .

## Osa 2: Vanhoja koetehtäviä

9. Tarkastele järjestelmää lämpö- ja hiukkaskylvyssä ja johda suurkanoninen todennäköisyysjakauma. Toisin sanoen osoita, että tilan  $n$ , jonka energia on  $E_n$  ja hiukkasluku  $N_n$  todennäköisyys on:

$$p_n = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_n - \mu N_n)}, \quad \mathcal{Z} = \sum_n e^{-\beta(E_n - \mu N_n)} \quad (6)$$

10. Debyen mallissa voidaan kidevärähtelyjen energia esittää muodossa

$$E = E_0 + \int_0^{\omega_D} d\omega f(\omega) \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \quad (7)$$

missä katkaisutaajuus  $\omega_D$  määräytyy ehdosta  $N = \int_0^{\omega_D} d\omega f(\omega)$ . Oleta, että  $f(\omega)$  on verrannollinen  $\omega^2$ :een ja että  $k_B T \ll \hbar\omega_D$  ja osoita, että kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti on verrannollinen  $T^3$ :een.

11. Hiilidioksidimolekyylillä on mm. sellaiset degeneroitumattomat värähtelytilat, joiden energiat ovat  $\varepsilon_r = \hbar\omega(r+1)$ ;  $r = 0, 1, 2, \dots$ , missä  $\omega = 1.26 \times 10^{14} \text{s}^{-1}$ . Mikä on näiden tilojen kontribuutio hiilidioksidikaasun moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin lämpötilassa  $T = 400 \text{K}$ ?

12. Kaksiatomisen molekyylin  $(2\ell+1)$ -kertaisesti degeneroituneiden rotaatiotilojen energiat ovat kvantittuneet siten, että

$$\varepsilon_\ell = \frac{\hbar^2}{2I} \ell(\ell+1); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

missä  $I$  on molekyylin hitausmomentti. Laske molekyylin rotaatioiden kontribuutio moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin pienen lämpötilan rajalla. Vetymolekyylin hitausmomentti on  $I = 4.7 \times 10^{-48} \text{m}^2 \text{kg}$ , mikä on lämpökapasiteetti moolia kohti lämpötilassa  $T = 10 \text{K}$ ?

13. Oletetaan, että kidevärähtelyjen vapaa energia saadaan  $N$ :n atomin muodostamalle kiteelle Einsteinin mallin mukaisesta lausekkeesta

$$F = -3Nk_B T \ln \left( \sum_{j=0}^{\infty} e^{\beta\varepsilon_j} \right), \quad (9)$$

jossa kidevärähtelyjen energiatilat ovat  $\varepsilon_j = \hbar\omega_0(j+1/2)$ . Laske kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti.

14. Ideaalisen fermionikaasun energiatilojen lukumäärä välillä  $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$  on

$$f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{Vm^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon. \quad (10)$$

Osoita, että fermienergia on

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 2\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}. \quad (11)$$

Osoita edelleen, että nollalämpötilassa fermionikaasun sisäenergia on  $E = (3/5)N\varepsilon_F$ . Toinen versio tehtävästä; osoita, että paine on:

$$P = \frac{\hbar^2}{5m} (3\pi^2)^{2/3} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}. \quad (12)$$

15. Johda Sommerfeldin kehittämän (annettu tehtävänannossa, nyt kaavakokoelmassa) avulla ideaalisen fermionikaasun kemialliselle potentiaalille lämpötilassa  $T \ll T_F$  tulos

$$\mu(T) \approx \varepsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right) \quad (13)$$

16. Tiedetään, että mustan kappaleen säteilyn paine on  $P = \epsilon(T)/3$ , missä  $\epsilon(T) = E/V$  on energiatiheys. Johda säteilyn entropialle tulokset

$$S = \frac{4}{3}V \frac{\epsilon(T)}{T} \quad \text{ja} \quad S = \frac{V}{3} \frac{d\epsilon(T)}{dT} \quad (14)$$

ja pääättele näiden avulla Stefanin-Boltzmannin laki  $\epsilon(T) \sim T^4$ .

17. Mikä on avaruudessa esiintyvän ns. kolmen kelvinin taustasäteilyn fotonitiheys, kun se mitaustulosten mukaan on mustan kappaleen säteilyä, jonka lämpötila on 2,4K? (Tehtävässä annettu tilatiheys  $f(\omega)d\omega = V\omega^2 d\omega/(\pi^2 c^3)$ ).
18. Johda lauseke mustan kappaleen säteilyn energiatiheydelle  $u(\omega, T)d\omega$  ja osoita, että kokonaisenergiatiheys  $u(T) = \int_0^\infty d\omega u(\omega, T)$  on verrannollinen  $T^4$ :een (Tehtävässä annettu tilatiheys  $f(\omega)d\omega = V\omega^2 d\omega/(\pi^2 c^3)$ ).
19. Ideaalisen bosonikaasun lämpökapasiteetti on

$$C_V \approx 1.93 N k_B \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad (15)$$

kun  $T < T_c$ . Johda tässä lämpötila-alueessa bosonikaasun sisäenergia, entropia ja paine. Kannattaa muistaa, että lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on sisäenergian derivaatta lämpötilan suhteen.