

### FYSA241 kevät 2013

Harjoitus 1, palautus ti 15.1.2013 klo 12, käsitellään ke 16.1.2013.

- Heitetään  $N$  kertaa painotettua kolikkoa, joka antaa klaavan todennäköisyydellä  $q$  ja kruunan todennäköisyydellä  $1 - q$ . Tarkastellaan satunnaismuuttujaa  $n$ =klaavojen lukumäärä.
  - Mikä on todennäköisyys  $p_n$  saada tasan  $n$  klaavaa  $N$ :llä heitolla?
  - Osoita, että  $\sum_{n=0}^N p_n = 1$  (vihje: mikä on  $(a+b)^N$ ?)
- Edellisen kaltaisesta jakaumasta on helppo johtaa tunnuslukuja *generoivan funktion* derivaattojen avulla. Määritellään  $g(\xi) \equiv \sum_{n=0}^N e^{n\xi} p_n$ 
  - Osoita, että odotusarvo on  $\langle n \rangle = g'(\xi)|_{\xi=0}$  ja varianssi  $\sigma^2(n) = g''(\xi)|_{\xi=0} - (g'(\xi)|_{\xi=0})^2$
  - Laske  $g(\xi)$  edellisen tehtävän jakaumalle. (Vihje: edelleen tarvitsee tietää  $(a+b)^N$ , tällä kertaa  $a$  on eri kuin edellisessä tehtävässä.)
  - Laske tästä  $\langle n \rangle$ ,  $\sigma^2(n)$  ja suhteellinen hajonta  $\sigma(n)/\langle n \rangle$ . Miten suhteellinen hajonta käyttäytyy, kun  $N \rightarrow \infty$ ?
- Olkoon satunnaismuuttujan  $m$  generoiva funktio  $g(\xi)$  ja siitä riippumattoman satunnaismuuttujan  $n$  taas  $h(\xi)$ . Mikä on satunnaismuuttujan  $m+n$  generoiva funktio?
- Ideaalikaasu ( $PV = Nk_B T$ ) käy läpi seuraavan kiertoprosessin:
  - Adiabaattinen laajeneminen ( $PV^{5/3} = \text{vakio}$ ) alkutilasta  $2^{5/3}P_0, \frac{1}{2}V_0$  tilaan  $P_0, V_0$
  - Isoterminen supistuminen tilasta  $P_0, V_0$  tilavuuteen  $V_0/2$
  - Isokoorinen ( $V$  vakio) muutos takaisin alkutilaan.Piirrä kiertoprosessi  $(V, P)$ - ja  $(T, P)$ -tasoissa. Käyttäen hyväksi tietoa, että yksiatomisen ideaalikaasun sisäenergia on  $E = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}PV$ , laske prosessin kunkin vaiheen
  - Järjestelmään tehty työ
  - Sisäenergian muutos ja
  - Järjestelmään siirtynyt lämpö (energian säilymistä käyttäen).
- Ota selvää, mitä ovat Otto- ja Diesel-syklit. Piirrä kuva  $V, P$ -tasossa. Kumpi on termodynaamisesti tehokkaampi periaatteessa? Entä käytännössä? Miksi?
- Mikä asia kurssilla tähän asti käsitellyistä on jäänyt epäselväksi? Kysy, kysymykseen vastataan joko laskuharjoitustilaisuudessa tai kopassa harjoitusten esimerkkiratkaisujen mukana. *Hyvistä* kysymyksistä voi saada yhden harjoitustehtävän verran lisäpisteitä. Tästä kysymyksestä ei lasketa mukaan harjoitusten maksimipistemäärään.

### FYSA241 spring 2013

Exercise 1, return Tue Jan 15th 2013 at 12, discussed Wed Jan 16th 2013.

1. We throw  $N$  times an asymmetrical coin, which gives heads up with probability  $q$  and tails with probability  $1 - q$ . Consider the random variable  $n$ , which is the number of throws with heads.
  - (a) What is the probability  $p_n$  to get exactly  $n$  heads in  $N$  throws?
  - (b) Show that  $\sum_{n=0}^N p_n = 1$  (Hint: what is  $(a + b)^N$ ?)
2. It is easy to derive properties of a distribution such as the previous one using the derivatives of a *generating function*. We define  $g(\xi) \equiv \sum_{n=0}^N e^{n\xi} p_n$ 
  - (a) Show that the mean is  $\langle n \rangle = g'(\xi)|_{\xi=0}$  and the variance  $\sigma^2(n) = g''(\xi)|_{\xi=0} - (g'(\xi)|_{\xi=0})^2$
  - (b) Calculate  $g(\xi)$  for the distribution of the previous problem. (Hint: you still need  $(a + b)^N$ , this time with a different  $a$ .)
  - (c) From this calculate  $\langle n \rangle$ ,  $\sigma^2(n)$  the relative dispersion  $\sigma(n)/\langle n \rangle$ . How does  $\sigma(n)/\langle n \rangle$  behave as  $N \rightarrow \infty$ ?
3. Let the random variable  $m$  have the generating function  $g(\xi)$  and an independent random variable  $n$  the generating function  $h(\xi)$ . What is the generating function of the random variable  $m + n$ ?
4. An ideal gas ( $PV = Nk_B T$ ) system traverses the following cycle:
  - (a) Adiabatic expansion ( $PV^{5/3} = \text{constant}$ ) from  $2^{5/3}P_0, \frac{1}{2}V_0$  to  $P_0, V_0$
  - (b) Isothermal contraction from  $P_0, V_0$  to  $V_0/2$
  - (c) Isochoric ( $V$  constant) change back to the initial state.Draw the process in the  $(V, P)$ - and  $(T, P)$ -planes. Using the internal energy  $E = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}PV$ , calculate for each of the steps in the cycle of the preceding problem:
  - (a) The work done to the system
  - (b) The change in the internal energy and
  - (c) The heat transferred to the system (using energy conservation).
5. Find out, what are the Otto and Diesel cycles. Draw a picture in the  $V, P$  plane. Which one is thermodynamically more efficient in principle? In practice? Why?
6. What topic in the course so far has remained unclear? Ask, the answer will be discussed in the exercise session or in koppa (where the example solutions to the exercises are). A *good* question can give you exercise points. This question is not counted in the maximum of points for the exercises in grading the course.