

Topologia

Harjoitus 9, 11.11.2009

1. Anna esimerkki $\mathbf{R}$:n topologiasta, joka ei ole metriikan määräämä eikä minitopologia. Perustele.

2. Anna esimerkki topologisesta avaruudesta, jossa on kompakti joukko, joka ei ole suljettu.

3. Olkoon

$$\tau = \{A \subset \mathbf{R} : A = \emptyset \text{ tai } \mathbf{R} \setminus A \text{ on numeroituva}\}.$$

Näytä, että τ on topologia. Osoita, lisäksi, että 0 kuuluu välin $]0, 1[$ sulkeumaan, mutta ei ole minkään välin $]0, 1[$ jonon rajapiste.

4. Näytä, että puoliavoimet välit $[a, b[$, $-\infty < a < b < \infty$, muodostavat kannan $\mathbf{R}$:n topologialle τ_a , joka on (aidosti) hienompi kuin euklidinen topologia.

5. Olkoot τ_j , $j \in J \neq \emptyset$, topologioita joukossa X . Ovatko

$$\bigcap_{j \in J} \tau_j \quad \text{ja} \quad \bigcup_{j \in J} \tau_j$$

myös topologioita X :ssä?

6. Määritellään $\mathbf{R}^2$:een (sanakirjajärjestys)topologia τ , jonka kannan muodostaa joukot

$$\{(x, y) : a < x < c, y \in \mathbf{R}\}, \quad \{(a, y) : b < y < d\}, \quad , \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Kuvaile τ :n joukkoja ja vertaa sitä $\mathbf{R}^2$:n tavalliseen topologiaan.

7. Määrää jonon $(k, 0)$, $k \in \mathbf{N}$, raja-arvo(t) $\mathbf{R}^2$:n viipaletopologiassa, jonka kannan muodostavat joukot

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a < x < b\}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

8. Näytä, että topologisten avaruuksien (X, τ) ja (Y, τ') välinen kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on jatkuva täsmälleen silloin, kun τ' :lla on esikanta, jonka jokaisen alkion alkukuva on avoin.

9. Olkoon (Y, τ') topologinen avaruus ja olkoon τ kuvauksen $f : X \rightarrow Y$ indusoima topologia. Osoita, että f on avoin joss $f(X)$ on avoin Y :ssä eli $f(X) \in \tau'$.

³Numeroituva on äärellinen tai numeroituvasti ääretön.