

Topologia

Harjoitus 8, 4.11.2009

1. Osoita, että X on yhtenäinen joss ainoat X :n tyhjäreunaiset osajoukot ovat $\emptyset$ ja X .
2. Näytä määritelmän avulla, että $\mathbf{R}$:n välit ovat yhtenäisiä.
3. Osoita, että yhtenäisten avaruuksien A ja B tuloavaruus $A \times B$ on yhtenäinen.
4. Olkoon N_1 parittomien ja N_2 parillisten positiivisten kokonaislukujen käänteislukujen joukko. Jos

$$K = N_1 \times [0, \frac{3}{4}] \cup N_2 \times [\frac{1}{4}, 1] \cup \{0\} \times]0, 1[\cup]0, 1[\times \{0, 1\}.$$

Osoita, että K on yhtenäinen (tason $\mathbf{R}^2$ tavallisessa topologiassa). Onko K polku-yhtenäinen? Onko $\mathbf{R}^2 \setminus K$ (polku)yhtenäinen?

5. Olkoon X metrinen avaruus. Näytä, että $E \subset X$ on epäyhtenäinen jos ja vain jos on olemassa X :n pistevieraat avoimet joukot A ja B , joille $E \subset A \cup B$, $A \cap E \neq \emptyset$ ja $B \cap E \neq \emptyset$.
6. Olkoon C joukon $A \subset X$ (yhtenäisyys)komponentti. Onko totta, että $\partial C \subset \partial A$?
7. Anna esimerkki yhtenäisestä metrisestä avaruudesta, jossa on epäyhtenäisiä avoimia palloja.
8. Olkoon X yhtenäinen metrinen avaruus, jonka jokainen piste $x \in X$ on jonkin polkuyhtenäisen avoimen pallon $B(x, r_x)$ keskipiste. Osoita, että X on polkuyhtenäinen.
9. Näytä, että kompaktin avaruuden yhtenäisyyskomponentit ovat kompakteja.
10. Olkoon $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jatkuva siten, että $f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$. Olkoot $I_j \subset [0, 1]$ sellaisia avoimia välejä, että $f|_{I_j} = \text{vakio}$. Näytä, että joukko

$$[0, 1] \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

on ylinumeroituva.

⁵Vihje: tutki palloja $B(a, \frac{1}{2} \text{dist}(a, B))$ ja $B(b, \frac{1}{2} \text{dist}(b, A))$.