

Topologia

Harjoitus 6, 21.10.2009

1. Osoita, että äärellisessä metrisessä avaruudessa jokaisella jonolla on suppeneva osajono.

2. Näytä, että täydellisyys säilyy bi-Lipschitz-kuvauksessa.

3. Näytä, että täydellisyys ei ole topologinen ominaisuus, ts. se ei välttämättä säily homeomorfismissa.

4. Osoita huolella: Olkoot $A \subset X$ ja $a \in \bar{A}$ ja $f, f_n : A \rightarrow Y$ kuvauksia, joille $f_n \rightarrow f$ tasaisesti A :ssa. Jos

$$b_n = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_n(x)$$

ja $b_n \rightarrow b$, niin $b \in \overline{f(A)}$.

5.

6. Olkoot $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ suljettuja joukkoja täydellisessä avaruudessa X . Jos $d(F_j) \rightarrow 0$, niin osoita, että on olemassa $x_0 \in X$, jolle

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j = \{x_0\}.$$

7. Anna esimerkki tason $\mathbf{R}^2$ suljetuista joukoista $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, joille

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j = \emptyset.$$

Miksi näin?

8. Onko jatkuvien funktioiden avaruus

$$C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ jatkuva} \}$$

täydellinen varustettuna metriikalla

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| dt?$$

9. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja olkoon d_b rajoitettu metriikka, joka on ekvivalentti metriikan d' kanssa. Onko avaruus

$$C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ jatkuva}\}$$

täydellinen varustettuna metriikalla

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in X} d_b(f(x), g(x))?$$

10. * Olkoon

$$d(x, y) = \left| \int_x^y g(t) dt \right|, \quad x, y \in \mathbf{R},$$

missä $g(t) = \min(1, t^{-4})$. Osoita, että d määrää joukkoon $\mathbf{R}$ tavallisen metriikan kanssa ekvivalentin metriikan. Onko $(\mathbf{R}, d)$ täydellinen?