

Topologia

Harjoitus 5, 14.10.2009

1. Näytä, että $\partial\partial A \subset \partial A$ ja että yhtäsuuruus ei ole aina voimassa.
2. Anna esimerkki jatkuvasta kuvauksesta f , joka kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi (on siis avoin kuvaus), ja että on olemassa avoin A , jolle $f(\partial A) \not\subset \partial f(A)$
3. Näytä, että $\mathbf{R} \approx]0, \infty[\approx]0, 1[$
4. Okoon $f : A \rightarrow B$ ja $g : C \rightarrow D$ homeomorfismeja. Näytä, että $h : A \times B \rightarrow C \times D$,

$$h(a, b) = (f(a), g(b)),$$

on myös homeomorfismi, tässä A, B, C ja D ovat metrisiä avaruuksia..

5. Näytä, että $\mathbf{R}^2 \approx \mathbf{R} \times]0, 1[\approx]0, 1[\times]0, 1[$
6. Olkoon $x_0 \in X$ ja (x_n) jono X :n pisteitä. Jos jonon x_n jokaisella osajonolla on osajono, joka suppenee kohti pistettä x_0 , niin $x_n \rightarrow x_0$.

7. Varustetaan $\mathbf{R}^2$ metriikalla

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{jos } x \text{ ja } y \text{ ovat samalla origon kautta kulkevalla suoralla} \\ |x| + |y|, & \text{jos } x \text{ ja } y \text{ eivät ole samalla origon kautta kulkevalla suoralla.} \end{cases}$$

Näytä, että $\bar{B}(0, 1)$:ssä ei ole numeroituvaa, tiheää osajoukkoa.

8. Määrää ylemmän puolitason

$$H = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0\}$$

sisus, reuna ja sulkeuma tehtävän 7 metriikassa.

9. Näytä, että $[0, 1[\not\approx]0, 1[$.

³Vihje: eksponenttifunktio.

⁵Vihje: ks teht 3.

⁹Vihje: Voit menetellä vaikka seuraavasti: Antiteesi: f on homeo. Valitse t_0 siten, että $f(t_0) > f(0)$. Näytä, että pisteelle

$$s_0 = \sup\{t < t_0 : f(t) < f(0)\}$$

pätee $f(s_0) < f(0)$, mikä johtaa ristitiriitaan.