

## Topologia

### Harjoitus 4, 30.9.2009

1. Näytä, että  $x_0$  on joukon  $A$  kasautumispiste joss jokaisessa  $x_0$ :n ympäristössä on äärettömän monta joukon  $A$  pistettä.

2. Olkoon  $A$  avoin. Näytä, että joukko

$$B = \{x : d(x, X \setminus A) > r\}$$

on  $A$ :n avoin osajoukko, jolle  $\overline{B} \subset A$ .

3. Todista: (Väisälä 1, 7.9) jos  $E$  on suljettu  $A$ :ssa ja  $A$  on suljettu  $X$ :ssä, niin  $E$  on suljettu  $X$ :ssä.

4. Anna esimerkki jatkuvasta kuvauksesta  $f : X \rightarrow Y$  (ja avaruuksista  $X$  ja  $Y$ ) sekä suljetusta ja rajoitetusta joukosta  $F$ , jolle kuvajoukko  $f(F)$  ei ole suljettu eikä rajoitettu.

5. Bolzano-Weierstrassin lauseen mukaan jokaisella  $\mathbf{R}^n$ :n äärettömällä rajoitetulla joukolla on kasautumispiste. Onko vastaava tosi yleisessä metrisessä avaruudessa?

6. Näytä, että  $A$ :n erakkopisteiden muodostama joukko on  $A$ :ssa avoin. Onko se myös  $X$ :n osajoukkona avoin?

7. Anna ehto metriselle avaruudelle  $X$ , joka on yhtäpitävä lauseen ” $X$ :n jokaisen avoimen joukon  $A$  kaikki pistet ovat  $A$ :n kasautumispisteitä” kanssa.

8. Osoita, että  $\partial A = \emptyset$  joss  $A$  on sekä suljettu että avoin.

9. Onko  $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$  tai  $\partial(A \cup B) \supset \partial A \cup \partial B$ ?

10. Onko  $\text{int } \bar{A} = \text{int } \overline{\text{int } A}$  tai  $\partial \bar{A} = \partial A$ ?