

Topologia

Harjoitus 3, 30.9.2009

1. Olkoot d_1 ja d_2 metriikoita joukossa X . Osoita, että jokainen d_1 -avoin joukko on d_2 -avoin, joss identtinen kuvaus $id : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$, $id(x) = x$, on jatkuva.
2. Sanotaan, että joukko $A \subset X$ on *tiheä* X :ssä, jos A :n komplementti $X \setminus A$ ei sisällä avointa palloa (kuulaa). Olkoon $A \subset X$ numeroituva ja tiheä joukko. Osoita, että X :stä voidaan valita korkeintaan numeroituva määrä pareittain pistevieraita palloja.
3. Olkoot $f : X \rightarrow Y$ ja $g : X \rightarrow Y$ jatkuvia, missä X on metrinen avaruus ja Y normiavaruus. Osoita, että $f = g$, mikäli $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A$, missä A on tiheä X :ssä.
4. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Onko f jatkuva jos maaliavaruus on varustettu diskreetillä metriikalla ja lähtöavaruus tavallisella? Entä jos metriikat ovat toisinpäin? Päättelä tästä yleinen tulos diskreeteille avaruuksille.
5. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Olkoon $h : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ jatkuva 0:ssa ja $h(0) = 0$. Jos $f : X \rightarrow Y$ on sellainen, että kaikilla $x, z \in X$:

$$d_Y(f(x), f(z)) \leq h(d_X(x, z)),$$

niin osoita, että f on jatkuva.

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subset X$. Olkoon $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ M -Lipschitz. Osoita, että kaava

$$g(x) = \inf\{f(y) + M d(x, y) : y \in A\}$$

määrittelee f :n M -Lipschitz jatkon X :ään.

7. Anna esimerkki tilanteesta, jossa f on metrisen avaruuden X aliavaruuden A jatkuva kuvaus, mutta f ei ole minkään X :n jatkuvan funktion g rajoittuma.
8. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ normiavaruus ja olkoon p toinen normi X :ssä. Osoita, että p on jatkuva $(X, \|\cdot\|)$:ssä joss on olemassa vakio $M \in \mathbf{R}$, jolle

$$p(x) \leq M\|x\| \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

(Siis kuvaus $id : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, p)$, $id(x) = x$, on jatkuva.)

9. Osoita, että $id : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $id(x) = x$, on Lipschitz-jatkuva, kun toisessa $\mathbf{R}^n$:ssä on euklidinen normi ja toisessa maksiminormi

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,2,\dots,n} |x_j|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

10. Osoita, että jokainen lineaarikuvaus $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ on jatkuva.

⁰**Huom.** Väisälän moniste sisältää paljon hyviä harjoitustehtäviä, jotka kannattaa tehdä.

³Entäpä jos kuva-avaruus Y on vain metrinen avaruus?

⁶*M-Lipschitz jatko*: $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ on M -Lipschitz ja $g|_A = f$.

¹⁰Vihje: voit käyttäen tehtävää 9 osoittaa, että suljetun yksikköpallon kuva on rajoitettu. Muista L lineaarikuvaus tarkoittaa:

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y) \quad \text{kaikilla } \lambda, \mu \in \mathbf{R} \text{ ja } x, y \in \mathbf{R}^n.$$