

Topologia

Harjoitus 2, 23.9.2009

1. Saadaanko reaaliakselille $\mathbf{R}$ metriikka määrittelemällä

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|}?$$

2. Olkoot d_1 ja d_2 metriikkoja joukoissa X_1 ja X_2 . Osoita, että kaavat

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \quad \text{ja} \quad \delta(x, y) = (d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2)^{1/2},$$

$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, määrittelevät metriikat d ja δ tuloavaruuteen $X_1 \times X_2$.

3. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ avoin. Voiko joukko $A \cup \{x_0\}$ olla avoin jollain $x_0 \notin A$?

4. Näytä, että metrisen avaruuden jokainen epätyhjä, avoin joukko on yhdiste suljetuista palloista (kuulista) $\bar{B}(x, r_x)$.

5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Näytä, että joukko $\subset A$ on avoin A :ssa (so. joukkoon A indusoidun metriikan d_A suhteen), joss on olemassa sellainen X :n avoin joukko U , jolle $G = U \cap A$.

6. Olkoon $X = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\}$. Olkoon

$$d(x, y) = \inf \ell(\gamma)$$

missä infimum otetaan yli kaikkien $\gamma \subset X$, joille $x, y \in \gamma$ ja γ koostuu kahdesta toisiaan leikkaavasta jananasta; $\ell(\gamma)$ on em. janojen yhteenlaskettu (euklidinen) pituus. Osoita, että d on metriikka X :ssä ja piirrä pallot $B(x_0, 1)$ ja $B(x_0, 2\sqrt{2})$, missä $x_0 = (1, 1)$.

7. Olkoot d_1 ja d_2 metriikkoja joukossa X . Osoita, että jokainen metriikan d_1 suhteen avoin joukko on avoin myös metriikan d_2 suhteen joss jokainen metriikan d_1 pallo (kuula) $B_1(x, r_1)$ sisältää metriikan d_2 avoimen pallon (kuulan) $B_2(x, r_2)$ ts.

$$B_2(x, r_2) \subset B_1(x, r_1).$$

8. Olkoon G metrisen avaruuden X avoin osajoukko. Osoita: jos F on äärellinen joukko, niin $G \setminus F$ on myös avoin.

9. Kaavat

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \quad \text{ja} \quad d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

määrittelevät metriikan avaruuteen $C([0, 1])$. Määrää näissä metriikoissa joukkojen

$$A = \{f : f(x) = x^n, n \in \mathbf{N}\} \quad \text{ja} \quad B = \{f : f(x) = 0 \text{ kaikilla } x\}$$

välinen etäisyys.

10. Anna esimerkki $\mathbf{R}^2$:n metriikasta d , joka määrää samat avoimet joukot kuin euklidinen metriikka, mutta jota ei saada mistään normista.

⁹Muista:

$$C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ jatkuva}\}.$$