

Topologia

Harjoitus 13, 16.12.2009

1. Osoita, että separoituvan avaruuden avoin osajoukko on separoituva.
2. Olkoon (X, τ) ei-kompakti topologinen avaruus. Valitaan alkio, joka ei kuulu X :ään ja merkitään sitä symbolilla ∞ . Merkitään $X^* = X \cup \{\infty\}$ ja määritellään $\tau^* = \tau \cup \{U \subset X^* : \infty \in U \text{ ja } X \setminus U \text{ on kompakti ja suljettu } X \text{ : ssä}\}$. Osoita, että (X^*, τ^*) on kompakti topologinen avaruus ja X on siellä tiheä. (Avaruutta (X^*, τ^*) kutsutaan yhden pisteen kompaktifioinniksi.)
3. Näytä, että irrationaalilukujen joukko ei ole F_σ .
4. Todista Bairen lauseen versio: *Kompaktissa Hausdorff-avaruudessa numeroituva leikkaus avoimista tiheistä joukoista on epätyhjä (tiheä).*
5. Todista Bairen kategorialauseen metrinen versio (täydellinen metrinen avaruus on 2. kategorialausta).
6. Olkoon $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ jatkuva surjektio ja $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Osoita, että jonkin pallon $B(x_0, r)$ kuvajoukolla $f(B(x_0, r))$ on sisäpisteitä.
7. Olkoot $q_1, q_2, \dots$ rationaaliluvut välillä $[0, 1]$. Osoita, että sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |x - q_j|^{-\frac{1}{2}}$$

hajaantuu ainakin yhdellä irrationaaliluvulla $x \in [0, 1]$.

8. Osoita, että väliä $[0, 1]$ ei voida esittää numeroituvana yhdisteenä pistevieraista suljetuista väleistä $\neq [0, 1]$.

⁷Vihje: Määritellään

$$f(x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |x - q_j|^{-\frac{1}{2}}} \quad \text{kun } x \in [0, 1]$$

(tässä käytetään sopimuksia $1/\infty = 0$ ja $0^{-\frac{1}{2}} = \infty$). Osoita, että f on jatkuva pisteessä x joss $f(x) = 0$.

⁸Vihje: voit yrittää antiteesiä ja poistaa välien sisukset.