

Topologia

Harjoitus 12, 9.12.2009

1. Näytä, että kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.
2. Osoita (käyttämättä Alexanderin tai Tihonovin lausetta), että $X \times Y$ on kompakti, joss X ja Y ovat kompakteja.
3. Olkoon $X = \mathbf{R}$:ssä puoliavointien välien $[a, b[$ virittämä topologia. Näytä, että $X \times X$ on separoituva, mutta sen diagonaali

$$A = \{(x, -x) : x \in X\}$$

ei ole separoituva.

4. Anna esimerkki kompaktista joukosta, jonka sulkeuma ei ole kompakti.
5. Näytä, että Hausdorff-avaruudessa pistevierailla kompakteilla joukoilla on pistevieraat ympäristöt.
6. Olkoon K tuloavaruuden $\prod_{j \in J} X_j$ kompakti osajoukko. Osoita: jos $\text{int } K \neq \emptyset$, niin on äärellinen $I \subset J$, siten, että jokainen X_j , $j \in J \setminus I$, on kompakti.
7. Anna esimerkki jonokompaktista avaruudesta, joka ei ole kompakti.
8. Anna esimerkki kompaktista avaruudesta, joka ei ole jonokompakti.
9. Näytä, että N_2 -avaruus on kompakti joss se on jonokompakti.

³Vihje: $[a, b[\times]-a, b[\cap A = (a, -a)$.

⁵Vihje: tarkastele ensin tapausta, missä toinen joukoista on yksiö.