

Topologia

Harjoitus 11, 25.11.2009

1. Näytä, että Hilbertin kuution $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ "valesisuksella" $]0, 1[^{\mathbb{N}}$ ei ole sisäpisteitä.
2. Näytä, että T_1 -avaruuden osajoukon A kasautumispisteen x_0 jokaisessa ympäristössä on ∞ monta joukon A pistettä.
3. Jos X_j , $j \in J$, ovat Hausdorff-avaruuksia, niin myös tuloavaruus $\prod_{j \in J} X_j$ on Hausdorff.

4. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja $f : X \rightarrow Y$. Näytä, että f :n koindusoima topologia

$$\tau' = \{V : f^{-1}(V) \in \tau\}$$

on hienoin Y :n topologia, jonka suhteen f on jatkuva.

5. Näytä, että topologinen avaruus X on Hausdorff joss lävistäjäjoukko

$$D = \{(x, x) : x \in X\}$$

on suljettu tuloavaruudessa $X \times X$.

6. Näytä, että topologinen avaruus on T_1 joss jokainen yksiö $\{a\}$ on suljettu.

7. Näytä, että Hausdorff-avaruudessa pistejono voi supeta korkeintaan yhtä pistettä kohti.

8. Näytä, että X on T_4 , jos ja vain, jos jokaisen suljetun joukon F jokaiselle ympäristölle U on olemassa F :n ympäristö V siten, että $\bar{V} \subset U$.

9. Olkon $f : X \rightarrow Y$ ja X N_1 -avaruus. Näytä, että f on jatkuva pisteessä x_0 joss jokaisella jonolla x_j , jolle $x_j \rightarrow x_0$, myös $f(x_j) \rightarrow f(x_0)$.

10. Totea erotteluaksioomien huono säilyvyys jatkuvissa kuvauksissa tarkastelemalla kuvausta $id : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_{mini})$.