

Topologia

Harjoitus 10, 18.11.2009

1. Anna esimerkki epäjatkevasta $f : X \rightarrow Y$, jolle ehdosta $x_n \rightarrow x_0, x_n, x_0 \in X$ aina seuraa $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.
2. Olkoon $\mathcal{A}$ lokaalisti äärellinen X :n suljettu peite. Näytä, että jos kuvauksen $f : X \rightarrow Y$ rajoittuma $f|_A : A \rightarrow Y$ on jatkuva kaikilla $A \in \mathcal{A}$, on f jatkuva.
3. Olkoon τ kuvauksen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sin x$, euklidisestä topologiasta indusoi-
ma topologia. Määää joukon $\{0\}$ sulkeuma τ -topologiassa.
4. Näytä, että $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$:n tulotopologia on $\mathbf{R}^2$:n tavallinen topologia.
5. Näytä, että jokainen polynomi $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on suljettu. Anna esimerkki polyno-
mista, joka ei ole avoin eikä vakio.
6. Olkoot $E, A \subset X$. Osoita, että $\partial_A(E \cap A) \subset A \cap \partial E$, missä ∂_A on reuna A :n
relatiivitopologiassa. Anna esimerkki jossa nämä joukot eivät ole samat.
7. Näytä, että X ja jatkuvan kuvauksen $f : X \rightarrow Y$ *graafi*

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

ovat homeomorfiset.

8. Näytä, että muotoa $\prod_{j \in J} U_j$ oleva epätyhjä joukko on avoin tuloavaruudessa
 $\prod_{j \in J} X_j$ *joss* joukot $U_j \subset X_j$ ovat avoimia ja $U_j = X_j$ kaikilla paitsi ehkä äärellisen
monella indeksillä $j \in J$.

9. Olkoot $A_j \subset X_j$,

$$X = \prod_{j \in J} X_j \quad \text{ja} \quad A = \prod_{j \in J} A_j.$$

Näytä, että

$$\bar{A} = \prod_{j \in J} \bar{A}_j.$$

²Lokaalisti äärellinen: jokaisella $x \in X$ on ympäristö, joka kohtaa vain äärellisen monta perheen
 $\mathcal{A}$ joukkoja.