

Topologia

Harjoitus 1, 16.9.2009

Tehtävissä käytetään $\mathbf{R}^n$:n euklidista metriikkaa, ellei toisin mainita.

1. a) Määrittele, mitä tarkoittavat: $\mathbf{R}^n$:n jono (x_k) suppenee ja funktio $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}^n$,

b) Olkoon $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Näytä, että f on jatkuva, jos jokaisen avoimen joukon A alkukuva $f^{-1}(A)$ on avoin joukko.

2. Olkoot $A, B, C \subset \mathbf{R}^n$.

a) Määrittele seuraavat käsitteet: joukko A on avoin, joukko B on suljettu sekä reunajoukko ∂C .

b) Osoita, että B on suljettu, jos ja vain, jos jokaiselle jonolle $x_j \in B$, jolle $x_j \rightarrow x_0$ pätee, että $x_0 \in B$.

3. Osoita, että jokainen avoin joukko $G \subset \mathbf{R}^n$ voidaan esittää yhdisteenä suljetuista palloista. Voidaanko jokainen suljettu joukko $F \subset \mathbf{R}^n$ esittää yhdisteenä avoimista palloista?

4. Olkoot $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ $\mathbf{R}^n$:n epättyhjiä, suljettuja joukkoja. Todista: jos C_1 on rajoitettu, niin

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j \neq \emptyset.$$

5. Näytä, että on olemassa $\mathbf{R}^n$:n epättyhjät, suljetut joukot $C_1 \supset C_2 \supset \dots$, joille

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = \emptyset.$$

6. Anna esimerkki äärettömästä, rajoitetusta pistejoukosta A , joka ei sisällä yhtään kasautumispisteistään.

7. Olkoon K ”katiska”

$$\begin{aligned} K = & \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\ & \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, z(1 - z) = 0\} \\ & \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |y| = x^2, \frac{1}{1000} \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\ & \cup \{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}. \end{aligned}$$

Hahmottele kuva ja selitä kuinka hyvin euklidinen metriikka soveltuu etäisyyksien mittaamiseen $\mathbf{R}^3 \setminus K$:ssa.

8. Näytä suoraan kompaktiuden määritelmän avulla: Jos $K \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti, niin jokainen jatkuva funktio $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ saavuttaa pienimmän arvonsa K :ssa.

9. Mitä voit sanoa joukosta $A \subset \mathbf{R}$, jos jokainen funktio $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva?

⁴Vihje: Valitse $c_j \in C_j$ kaikilla j ja näytä, että joukon $\{c_1, c_2, \dots\}$ kasautumispiste kuuluu leikkaukseen.

⁶Kaikissa tehtävissä edellytetään aina huolellisia perusteluja, ellei toisin mainita.

⁸Vihje: Valitse laskeva jono $y_j \rightarrow \inf_K f$ ja tutki joukkoja $f^{-1}([y_j, \infty[)$.