Sobolev-avaruudet

Tero Kilpeläinen

Luentomuistiinpanoja
5. kesäkuuta 2007

Sisältö

1. Johdattelua

Mikä on derivaatta?

Funktion $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ derivaatta pisteessä x on

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(jos raja-arvo on olemassa).}$$

Seuraavassa kolme tapaa "yleistää" derivaatta:

A. Analyysin peruslause

Jos $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbf{R}$, niin

$$f(x) = f(x_0) + \int_{[x_0,x]} f'(y) \underbrace{dy}_{\text{Leb. mitta}} \qquad \text{kaikilla } x_0, x \in I$$

Kääntäen, jos on olemassa sellainen $v \in L^1(I)$, jolle

$$f(x) = f(x_0) + \int_{[x_0,x]} v(y)\, dy\,,$$

niin f on m.k. derivoituva, $f'(x) = v(x)$ m.k. $x \in I$ ja f on *absoluuttisesti jatkuva*[1] kaikilla $[a, b] \subset I$.

Siten eräs f:n derivaatta-käsitteen yleistys olisi tällainen funktio v.

[1] f on absoluuttisesti jatkuva välillä $[a, b]$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että ehdoista

$$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots < b_k < b \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{k} |b_i - a_i| < \delta$$

seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{k} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon\,.$$

B. Osittaisintegrointi

Jos $f, g \in C^1(I)$, niin

$$\int_{[a,b]} f(x)g'(x)\,dx = -\int_{[a,b]} f'(x)g(x)\,dx + \Big/_a^b f(x)g(x) \qquad \text{kaikilla } a, b \in I,\ a < b\,.$$

Erityisesti, jos $\operatorname{spt} g = \overline{\{x : g(x) \neq 0\}}$ on kompakti, niin

$$\int_I f(x)g'(x)\,dx = -\int_I f'(x)g(x)\,dx \qquad \text{kaikilla } g \in C_0^1(I)\,.$$

Huomaa: jos f on absoluuttisesti jatkuva, niin

$$\int_I fg'\,dx = -\int_I vg\,dx \qquad \text{kaikilla } g \in C_0^1(I)\,,$$

missä v on kuten kohdassa A. [HT. Todista käänteinen: v on derivaatta.]

Esimerkki. Olkoon $f(x) = 1 - |x|$, ja $g \in C_0^1(]-1,1[)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_{]-1,1[} f(x)g'(x)\,dx &= \int_{]-1,0[} f(x)g'(x)\,dx + \int_{]0,1[} f(x)g'(x)\,dx \\
&\overset{\text{os.int.}}{=} -\int_{]-1,0[} 1\cdot g(x)\,dx + \Big/_{-1}^{0} f(x)g(x) - \int_{]0,1[} (-1)g(x) + \Big/_{0}^{1} f(x)g(x) \\
&= -\int_{]-1,1[} v(x)g(x)\,dx\,,
\end{aligned}$$

missä

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jos } x < 0 \\ -1 & \text{, jos } x \geq 0\,. \end{cases}$$

C. Täydentymä

Pari $(C_b^1(I), \|\cdot\|)$, missä normi on esimerkiksi

$$\|f\| = \int\limits_I |f|\,dx + \int\limits_I |f'|\,dx\,,$$

ei ole täydellinen metrisenä avaruutena. Täydennetään ko. avaruus $L^1(I)\times L^1(I)$:ssä. Sulkeumassa olevat parit (f, v) yleistävät derivoituvuuden, $v \sim f'$.

Miksi derivaatan käsitettä halutaan yleistää?

Tarkastellaan esimerkkiä: Jos $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \Subset \mathbf{R}^n$ avoin, on sellainen funktio, jolle

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_{jj}^2 u = 0,$$

niin

$$0 = \int\limits_\Omega \Delta u(x)\cdot\varphi(x)\,dx \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \underset{\text{os.int.}}{=} -\int\limits_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx\,.$$

Käyttämällä yhtälöä

$$|y+z|^2 = (y+z)\cdot(y+z) = |y|^2 + 2y\cdot z + |z|^2 \qquad \text{kaikilla } y, z \in \mathbf{R}^n\,,$$

saadaan tästä

$$\int |\nabla u + \nabla\varphi|^2\,dx = \int |\nabla u|^2\,dx + \underbrace{2\int \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx}_{=0} + \int |\nabla\varphi|^2\,dx$$
$$\geq \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,.$$

Saamme siten, että jos $\Delta u = 0$, niin

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq \int\limits_\Omega |\nabla u + \nabla\varphi|^2\,dx \qquad \text{kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Toisin, sanoen funktiolla $t \mapsto \int_\Omega |\nabla u + t\nabla\varphi|^2\,dx$ on minimi, kun $t = 0$. Lasketaan tämän funktion derivaatta t:n suhteen, kun $t = 0$; se on

$$2\int\limits_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = -2\int\limits_\Omega \Delta u(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

äsken tehdyn osittais integroinnin nojalla. Tästä näemme helposti: Jos $u \in C^2(\Omega)$, niin $\Delta u = 0$ Ω:ssa täsmälleen silloin, kun

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx \le \int\limits_{\Omega} |\nabla u + \nabla\varphi|^2\, dx \qquad \text{kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Huomaa, että $\int |\nabla u|^2\, dx$ on $L^2(\Omega)$-normin neliö ∇u:lle joten 2. kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön $\Delta u = 0$ ratkaisemiseksi voidaan tutkia normiavaruutta $(X, Y) \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega, \mathbf{R}^n)$, joka on joukon

$$\big\{(\psi, \nabla\psi) : (\psi, \nabla\psi) \in C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; \mathbf{R}^n)\big\}$$

sulkeuma. Tällä tavalla ongelma, joka sisältää toisen kertaluvun derivaattoja voidaan käsitellä pelkästään tutkimalla ensimmäisen kertaluvun derivaattoja. Lisäksi ratkaisukandidaatteja löydetään helpommin suljetusta normiavaruudesta kuin eisuljetusta. Palaamme tähän esimerkkiin myöhemmin.

Muista. Funktio $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ Lebesgue-mitallinen, on mitallinen, jos joukot $\{x \in A : f(x) > \lambda\}$ ovat Lebesgue-mitallisia kaikilla $\lambda \in \mathbf{R}$ ja tällöin

$$\int\limits_A |f|\, dx = \int\limits_0^\infty |\{x \in A : |f(x)| > t\}| dt\,,$$

missä $|A|$ = joukon A Lebesgue-mitta. Edelleen, muuttujanvaihdolla näemme, että

$$\int |f|^p\, dx = p \int\limits_0^\infty t^{p-1} |\{|f(x)| > t\}| dt, \qquad \text{kunhan } p > 0.$$

Konvekseista funktioista

Olkoon $I \subset \mathbf{R}$ väli. Funktio $f : I \to \mathbf{R}$ on *konveksi*, jos

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \text{kaikilla } x, y \in I \text{ ja } t \in [0,1]$$

Esimerkiksi e^x on konveksi.

1.1. Lemma. *Jos $f : I \to \mathbf{R}$ on derivoituva ja f' on kasvava, on f konveksi.*

Todistus: Olkoon $a < z < b$. Tällöin väliarvolauseen nojalla on sellaiset $\eta \in]a, z[$ ja $\xi \in]z, b[$, joille

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(\eta) \le f'(\xi) = \frac{f(b) - f(z)}{b - z}\,.$$

Merkitsemällä $z = ta + (1-t)b$ saadaan

$$f(z) \le tf(a) + (1-t)f(b)\,.$$

□

1.1. Seuraus. *Jos $f'' \ge 0$, niin f on konveksi.*

1.2. Huomautus.

a) Konveksi funktio on jatkuva välin I sisäpisteissä.

b) Äskeinen todistus näyttää, että f on konveksi, jos ja vain, jos

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \le \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \qquad \text{kaikilla } x < z < y\,.$$

Merkintä. Jos $|A| > 0$, merkitsemme funktion f keskiarvoa

$$⨍_A f\,dx := \frac{1}{|A|}\int_A f(x)\,dx\,.$$

1.3. Lause. (Jensenin epäyhtälö) *Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ integroituva, $A \subset \mathbf{R}^n$, $|A| < \infty$. Jos $\varphi : I \to \mathbf{R}$ on konveksi, missä $I \subset \mathbf{R}$ on sellainen väli, jolle $f(A) \subset I$, niin*

$$\varphi\Big(⨍_A f(x)\,dx\Big) \le ⨍_A \varphi \circ f(x)\,dx\,.$$

Esimerkki. Kun $\varphi(t) = t^{\frac{p}{q}}$, missä $1 \leq q < p < \infty$, saadaan Jensenin epäyhtälöstä

$$\varphi\left(⨍_A |f(x)|^q\,dx\right) \leq ⨍_A \varphi(|f|^q)\,dx = ⨍_A |f|^p\,dx$$

eli

$$\left(⨍_A |f|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(⨍_A |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Todistus: Koska φ on jatkuva, on $\varphi \circ f$ mitallinen. Olkoon

$$t = ⨍_A f(x)\,dx\,.$$

Tällöin $t \in I$ ja on olemassa[2] $\beta = \beta(t)$, jolle

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \beta \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \quad \text{kaikilla } s < t < u\,.$$

Siten

$$\varphi(z) \geq \varphi(t) + \beta(z - t) \quad \text{kaikilla } z \in I\,.$$

Erityisesti

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \beta(f(x) - t) \ \text{ kaikilla } x \in A\,,$$

joten

$$⨍_A \varphi(f(x))\,dx \geq \underbrace{⨍_A \varphi(t)}_{\varphi(⨍_A f(x)\,dx)} + \beta \underbrace{⨍_A (f(x) - t)\,dx}_{=⨍_A f(x)\,dx - ⨍_A ⨍_A f(x)\,dx = 0}.$$

□

1.4. Lause. (Youngin epäyhtälö) *Olkoot* $a, b \geq 0$, $p > 1$ *ja* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tällöin*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^2\,.$$

[2] Esimerkiksi

$$\beta = \sup_{s<t} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}\,.$$

1.5. Seuraus. *Kaikilla* $\varepsilon > 0$ *ja* $a, b \geq 0$

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-\frac{q}{p}} \frac{b^q}{q} \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-\frac{q}{p}} b^q \,,$$

kun $p > 1$ *ja* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Multi-indeksit

Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Vektoria $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ sanotaan *multi-indeksiksi.*
$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ on α:n *pituus, normi* tms.
$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$.

Jos $x \in \mathbf{R}^n$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$), niin $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Erityisesti multi-indeksointia käytetään derivoinnin yhteydessä:

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \cdots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u(x) \,,$$

missä

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h(j)) - u(x)}{h}$$

ja esim.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \,.$$

Tällä kurssilla klassista osittaisderivointia harrastetaan vain funktioihin, jotka ovat $|\alpha|$ kertaa jatkuvasti derivoituvia, jolloin derivointijärjestyksellä ei ole väliä.

1.6. Huomautus. Huomaa, että

$$D^0 u = u \quad \text{ja} \quad \nabla u(x) = (D^{(1,0,0\ldots0)} u, D^{(0,1,0\ldots0)} u, \ldots, D^{(0,\ldots,0,1)} u) \,.$$

Esimerkki. $(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha, \quad m \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{N}^n, x = (x_1, \ldots, x_n)$.

1.1. Perusmerkintöjä

Käytämme seuraavia funktioavaruuksia.[3]

$$
\begin{aligned}
&C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbf{R} : f \text{ jatkuva}\}\\
&C^1(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbf{R} : \ f \text{ jatkuvasti derivoituva}\}\\
&C^{k+1}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : \ \text{on olemassa } D^\alpha f \in C(\Omega) \ \text{ kaikilla } \alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| = k+1\}\\
&C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} C^k(\Omega),\ C^\circ = C\,.
\end{aligned}
$$

Jos $u : \Omega \to \mathbf{R}$, niin u:n *kantaja* on joukon $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ sulkeuma ($\mathbf{R}^n$:ssä), merkitään $\operatorname{supp} f$ tai $\operatorname{spt} f$, ts.

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \subset \overline{\Omega}\,.$$

Jos $\operatorname{supp} u$ on kompakti Ω:n osajoukko, niin sanotaan, että u on *kompaktikantajainen* Ω:ssa.

$$
\begin{aligned}
&C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : \operatorname{spt} u \subset \Omega \text{ kompakti}\}\\
&C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} C_0^k(\Omega)
\end{aligned}
$$

1.7. Huomautus. Jos $u \in C_0^k(\Omega)$, niin $D^\alpha u$ on rajoitettu Ω:ssa kaikilla α, joille $|\alpha| \leq k$.

[3] f jatkuvasti derivoituva tarkoittaa, että f:llä on jatkuvat ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

2. L^p-avaruudet

2.1. Yleistä

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja $p \in [1, \infty]$. Tällöin

$$L^p(A) := \{f : A \to \overline{\mathbf{R}} : f \text{ mitallinen ja } \|f\|_{L^p(A)} < \infty\},$$

missä

$$\|f\|_{L^p(A)} = \|f\|_p := \left(\int_A |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{kun } 1 \leq p < \infty$$

ja

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(A)} = \|f\|_\infty &:= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)| \\ &:= \inf\{t > 0 : |\{x \in A : |f(x)| > t\}| = 0\} \end{aligned}$$

Siis $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ m.k. $x \in A$.

2.1. Huomautus. ”Oikeasti” $L^p(A)$:n alkiot ovat ekvivalenssiluokkia $[f]$, missä ekvivalenssirelaatio $\sim$ määritellään

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \qquad \text{m.k. } x \in A$$

ja L^p-avaruus on $L^p(A)/\sim$.

2.2. Huomautus. Puhetapa $f \in L^p(A)$ tarkoittaa, että edustaja eli funktio on valittu/kiinnitetty.

2.3. Lause. (Hölderin epäyhtälö) *Olkoot*[4] $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *sekä* $f \in L^p(A)$ *ja* $g \in L^q(A)$. *Tällöin* $fg \in L^1(A)$ *ja*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

[4] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eli $p = \frac{q}{q-1}$ eli $pq = p + q$; huomaa myös: jos $p < \widetilde{p}$, niin $q > \widetilde{q}$.

Todistus: Tapaus $p = 1, q = \infty$ ei vaikea, HT. Olkoon siis $1 < p < \infty$, todistuksessa käytetään Youngin epäyhtälöä. Voidaan olettaa, että $\|f\|_p > 0$ ja $\|g\|_q > 0$. Merkitään

$$F = \frac{f}{\|f\|_p} \quad \text{ja} \quad G = \frac{g}{\|g\|_q}\,,$$

jolloin $\|F\|_p = 1 = \|G\|_q$. Edelleen

$$\begin{aligned}\int\limits_A F(x)G(x)\,dx &\overset{\text{Young}}{\leq} \int\limits_A \frac{F(x)^p}{p}\,dx + \int\limits_A \frac{G(x)^q}{q}\,dx \\ &= \frac{1}{p}\cdot 1 + \frac{1}{q}\cdot 1 = 1\,.\end{aligned}$$

Koska

$$\int\limits_A F(x)G(x)\,dx = \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int\limits_A fg\,dx\,,$$

väitteen epäyhtälö on todistettu. □

2.4. Lause. (Minkowskin epäyhtälö) *Olkoot* $f, g \in L^p(A)$. *Tällöin*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,.$$

Todistus: Tapaukset $p = 1$ ja $p = \infty$ ovat selviä. Olkoon siis $1 < p < \infty$. Tällöin kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$|f+g|^p \leq (|f+g|)^{p-1}(|f|+|g|) = |f|(|f+g|)^{p-1} + |g|(|f+g|)^{p-1}\,,$$

mistä integroimalla

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p = \int\limits_A |f+g|^p\,dx &\leq \int\limits_A |f||f+g|^{p-1}\,dx + \int |g||f+g|^{p-1}\,dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p\Big(\int\limits_A |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\,dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} + \|g\|_p\|f+g\|_p^{p-1} \\ &= \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{p-1}\,.\end{aligned}$$

□

2.5. Lause. (Yleistetty Hölder). *Jos* $p_i \in [1,\infty]$ *s.e.* $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = 1$ *ja* $f_i \in L^{p_i}(A)$ *, niin* $\prod_{i=1}^{k} f_i \in L^1(A)$ *ja*

$$\int_A |f_1 f_2 \cdots f_k| \, dx \le \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i} .$$

Todistus: HT, Hölder ja induktio. Hölderissä oleellista, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \ge 1$. □

Muista, että pari $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ on *normiavaruus*, jos $\mathbf{X}$ on lineaariavaruus ja $\|\cdot\| : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ on *normi* eli

$$\begin{aligned} &\|x\| \ge 0 \\ &\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbf{X} \\ &\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad \text{ja} \\ &\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbf{X},\ \lambda \in \mathbf{R} . \end{aligned}$$

Minkowskin epäyhtälöstä seuraa, että $L^p(A)$ on normiavaruus.

Banach-avaruus on normi-avaruus $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$, joka on metrisenä avaruutena täydellinen eli kaikki Cauchy-jonot suppenevat.

Jono (x_j) on Cauchy, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n \in \mathbf{N}$:

$$\|x_j - x_k\| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } j, k > n .$$

Jono (x_j) *suppenee*, jos on olemassa $x_0 \in \mathbf{X}$ s.e.

$$\lim_{j \to \infty} \|x_j - x_0\| = 0 .$$

2.6. Lause. $L^p(A)$ *on Banach-avaruus.*

Todistus: Olkoon $1 \le p < \infty$ ja olkoon $(f_j) \subset L^p(A)$ Cauchy-jono, ts. $\|f_j - f_k\|_p < \varepsilon$, kun $k, j \ge N_\varepsilon$. Riittää osoittaa, että on olemassa osajono, joka suppenee. Siis tarvittaessa valitaan (f_j):n osajono, jolle pätee

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j - f_{j+1}\|_p \le 1 .$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
\Big(\int\limits_A |\sum_{k=1}^{\infty}|f_k - f_{k+1}||^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} &= \|\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{l}|f_k - f_{k+1}|\|_p \\
&\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{l\to\infty}\|\sum_{k=1}^{l}|f_k - f_{k+1}|\|_p \leq \sum_{k+1}^{\infty}\|f_k - f_{k+1}\|_p \leq 1\,.
\end{aligned}
$$

Siis

$$
\text{m.k. } x \in A: \quad \sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \infty\,,
$$

ts. sarja

$$
\sum_{k=1}^{\infty}(f_k(x) - f_{k+1}(x))
$$

suppenee itseisesti m.k. $x \in A$. Siis

$$
f(x) := f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k+1}(x) - f_k(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)
$$

on m.k. määritelty m.k äärellinen funktio.

Edelleen Fatoun lemmasta seuraa

$$
\begin{aligned}
\|f - f_k\|_p &= \|\lim_{j\to\infty} f_j - f_k\|_p \\
&= \Big(\int\limits_A \lim_{j\to\infty}|f_{j(x)} - f_{k(x)}|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \liminf_{j\to\infty}\Big(\int\limits_A |f_j(x) - f_k(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \quad = \liminf_{j\to\infty}\|f_j - f_k\|_p \\
&\leq \varepsilon, \qquad \text{kun } k \text{ iso.}
\end{aligned}
$$

Siten $f_k \to f$ $L^p(A)$:ssa. □

Todistus antoi hyödyllisen lisätiedon:

2.7. Lause. *Jos $f_j \to f$ $L^p(A)$:ssa, niin on olemassa f_j:n osajono (f_{j_k}), jolle*

$$
f_{j_k}(x) \to f(x) \quad \text{m.k. } x \in A\,.
$$

Lisäksi on olemassa sellainen $h \in L^p(A)$, jolle

$$
|f_{j_k}(x) - f(x)| \leq h(x) \quad \text{m.k. } x \in A\,.
$$

2.8. Huomautus. Kun $1 \leq p < \infty$, niin osajonoon siirtymistä lauseessa 2.7 ei voida yleensä välttää.

$$f_{1,1} = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \quad f_{1,2} = \chi_{]\frac{1}{2},1]}$$

Induktiivisesti jatketaan ja jaetaan k. vaiheessa väli $[0,1]$ 2^k yhtäsuureen osaväliin $I_{k,1}, I_{k,2}, \dots, I_{k,2^k}$ ja $f_{k,j} = \chi_{I_{k,j}}$.

Silloin

$$\left(\int\limits_{[0,1]} |f_{k,j}(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = |I_{k,j}|^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{k}{p}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

ts. jono $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, \dots, f_{2,4}(x), f_{3,1}(x), \dots$ suppenee kohti 0:aa $L^p([0,1])$:ssä, mutta kuitenkaan pisteittäinen jono $f_{1,1}(x), f_{1,2}(x), f_{2,1}(x), \dots, f_{2,4}(x), f_{3,1}(x), \dots$ ei suppene millään $x \in [0,1]$.

2.9. Huomautus. Tapaus $p = 2$ on erityinen sillä $L^2(A)$ on Hilbert-avaruus eli Banach-avaruus, jonka normin määrää sisätulo

$$(f,g) := \int fg \; dx\,.$$

Kun $p \neq 2$, $L^p(A)$ ei ole Hilbert, mikä seuraa helposti suunnikasyhtälöstä. Jos $1 < p < \infty$, niin $L^p(A)$ on kuitenkin siedettävä avaruus ja $L^1(A)$ melko siedettävä.

Muistetaan, että $L^p(A)$:t ovat sisäkkäin, jos $|A| < \infty$:

2.10. Lause. *Jos $|A| < \infty$, niin $L^p(A) \subset L^s(A)$ kun $1 \leq s \leq p \leq \infty$ ja*

$$\|f\|_s \leq |A|^{\frac{p-s}{sp}} \|f\|_p \quad f \in L^s(A\,.)$$

TODISTUS: Tapaus $p = \infty$, HT. Kun $1 \leq p < \infty$, niin

$$\left(⨍_A |f|^s \right)^{\frac{1}{s}} \underset{\text{Jensen, } t\to t^{\frac{p}{s}} \text{ konveksi}}{\leq} \left(⨍_A |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

josta

$$\|f\|_s \leq |A|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \|f\|_p\,.$$

$\square$

Harjoitustehtävä. Osoita, että

$$L^p(A) \subsetneqq L^s(A)\,, \qquad \text{jos } p > s \text{ ja } 0 < |A| < \infty\,.$$

2.11. Lause. *Olkoon $|A| < \infty$. Tällöin*

$$\|f\|_p = \lim_{\substack{q\to p\\ q<p}} \|f\|_q\,.$$

Todistus: Tapaus $p = \infty$ demoissa. Olkoon sitten $1 \le p < \infty$ ja $q_j \nearrow p$. Tälloin saamme monotonisen konvergenssin lauseen avulla

$$\begin{aligned}\int_A |f|^{q_j}\,dx &= \int_{A\cap\{|f|\le 1\}} \overbrace{|f|^{q_j}}^{\text{laskeva}}\,dx + \int_{A\cap\{|f|>1\}} \overbrace{|f|^{q_j}}^{\text{nouseva}}\,dx \\ &\to \int_{A\cap\{|f|\le 1\}} |f|^p\,dx + \int_{A\cap\{|f|>1\}} |f|^p\,dx = \int_A |f|^p\,dx\,.\end{aligned}$$

□

2.12. Huomautus. Erityisesti Lause 2.11 antaa: Jos $|A| < \infty$ ja

$$\|f\|_q \le M \text{ kaikilla } q < p, \text{ niin } \|f\|_p \le M\,.$$

Kuitenkin (HT)

$$L^p(A) \subsetneqq \bigcap_{q<p} L^q(A)\,.$$

2.13. Lause. (Interpolointi) *Olkoon $1 \le p \le q \le r \le \infty$. Tällöin*

$$L^r(A) \cap L^p(A) \subset L^q(A) \quad \textit{kaikilla mitallisilla } A \subset \mathbf{R}^n$$

ja

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}, \qquad \textit{missä } \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}\,.$$

Todistus: Voidaan olettaa, että $p < q < r$.

Tapaus $r = \infty$. Tällöin $\lambda = \frac{p}{q}$.

$$
\begin{aligned}
\|f\|_q = \|f^{\frac{p}{q}} \cdot f^{1-\frac{p}{q}}\|_q &= \Big(\int_A \big(|f|^{\frac{p}{q}} |f|^{\frac{q-p}{q}}\big)^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \Big(\int_A |f|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_\infty^{1-\lambda} \|f\|_p^{\lambda} .
\end{aligned}
$$

Tapaus $r < \infty$.

$$
\begin{aligned}
\|f\|_q^q = \|f^\lambda \cdot f^{1-\lambda}\|_q^q &= \int_A |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \, dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \Big(\int_A |f|^p \, dx \Big)^{\frac{\lambda q}{p}} \Big(\int_A |f|^{(1-\lambda)\frac{p}{p-\lambda q}} \, dx \Big)^{\frac{p-\lambda q}{p}} = \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{q(1-\lambda)} ,
\end{aligned}
$$

sillä

$$
\frac{p}{\lambda q} > 1 \quad \text{ja} \quad \frac{\frac{p}{\lambda q}}{\frac{p}{\lambda q} - 1} = \frac{p}{p - \lambda q} = \frac{r}{q(1-\lambda)} .
$$

□

2.14. Huomautus. Merkitään

$$
L^p_{\mathrm{loc}}(A) = \bigcap_{E \subset A \text{kompakti}} L^p(E)
$$

lokaali L_p-avaruus.

2.15. Lause. (L^p-normin jatkuvuus) *Jos* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *niin*

$$
\lim_{|h| \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0 .
$$

Siis $g_h(x) := f(x+h) \to f(x)$ L^p*:ssä.*

Todistus: ”Helppo” todistaa lähtemällä avoimen joukon karakteristisista funktioista ja sitä rataa yksinkertaisille funktioille. Toinen tapa käyttää tietoa $C_0(\mathbf{R}^n) \subset L^p(\mathbf{R}^n)$ on tiheä (ks. demot):
1. Olkoon ensin $f \in C_0(\mathbf{R}^n)$. Tällöin asia on selvä, koska f on tasaisesti jatkuva ja integrointi väitteessä koskee vain kompakteja joukkoja.

$$\int_B \underbrace{|f(x+h) - f(x)|}_{<\varepsilon}, \qquad \text{kun } |h| \to 0\,.$$

2. Olkoon sitten $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ mielivaltainen. Valitaan sellainen $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^n)$, jolle $\|\varphi - f\|_p < \varepsilon$. Silloin

$$\begin{aligned}
&\|f(x+h) - f(x)\|_p \\
&\leq \|f(x+h) - \varphi(x+h)\|_p + \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_p + \|\varphi(x) - f(x)\|_p \\
&= \underbrace{2\|f-\varphi\|_p}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_p}_{\to 0} < 3\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Lebesguen mitan siirtoinvarianssista. □

2.2. Silotus

Olkoon $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ei-negatiivinen funktio, jolle

i) $\eta(x) = 0$ kaikilla x, joille $|x| \geq 1$

ii) $\int_{\mathbf{R}^n} \eta(x)\,dx = 1$.

Tällaiseksi funktioksi käy esimerkiksi

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \cdot c & , \text{ kun } |x| < 1 \\ 0 & , \text{ kun } |x| \geq 1 \end{cases},$$

missä $c > 0$, valitaan s.e. $\int_{\mathbf{R}^n} \eta(x)\,dx = 1$ ts.

$$\frac{1}{c} = \int_{B(0,1)} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\,dx\,.$$

Huomaa, että tämä η on symmetrinen origon suhteen, mikä on kivaa.

Jatketaan: Kun $\varepsilon > 0$, asetetaan

$$\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$$

Tällöin $\operatorname{spt}\eta_\varepsilon \subset \overline{B}(0,\varepsilon)$, $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\eta_\varepsilon \geq 0$ ja

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\,dx = \varepsilon^{-n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} \eta(\frac{x}{\varepsilon})\,dx = \varepsilon^{-n}\varepsilon^n \int\limits_{\mathbf{R}^n} \eta(y)\,dy = \varepsilon^{n-n} = 1\,.$$

Tällaisia funktioita η ja η_ε sanotaan *silottajaytimiksi*. Jos $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, määritellään *konvoluutio*

$$u_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * u)(x) := \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,.$$

Konvoluutiota u_ε sanotaan myös funktion u *silotukseksi*.

2.16. Huomautus. Kun $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, on silotus u_ε hyvinmääritelty funktio $u_\varepsilon : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x)| &= \Big|\int\limits_{\mathbf{R}^n} u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\Big| \\ &= \Big|\int\limits_{\overline{B}(x,\varepsilon)} u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\Big| \leq \varepsilon^{-n}\sup|\eta| \int\limits_{\overline{B}(x,\varepsilon)} |u|\,dy < \infty\,.\end{aligned}$$

2.17. Huomautus. Konvoluutio on symmetrinen:

$$\begin{aligned}\eta_\varepsilon * u(x) &= \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \overset{\substack{z=x-y\\ y=x-z}}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(x-z)\eta_\varepsilon(z)dz \\ &= u * \eta_\varepsilon(x)\,.\end{aligned}$$

Edelleen

$$u_\varepsilon(x) = \int\limits_{\overline{B}(x,\varepsilon)} u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy$$

on ”keskiarvointegraali mitan $\eta_\varepsilon\ dx$ suhteen”, jolloin pallon $\overline{B}(x,\varepsilon)$ mitta on 1.

2.18. Lause. *Olkoon $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ ja olkoot η_ε silottajaytimiä, $\varepsilon > 0$. Tällöin*

(i) $\eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *ja*

$$D^\alpha(\eta_\varepsilon * u)(x) = (D^\alpha \eta_\varepsilon) * u(x) \quad \text{kaikilla } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ ja kaikilla } x \in \mathbf{R}^n$$

(ii) Jos $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *niin*

$$u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in L^p(\mathbf{R}^n) \text{ ja } \|u_\varepsilon\|_p \le \|u\|_p \,.$$

Lisäksi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_p = 0 \qquad \text{jos } 1 \le p < \infty \,.$$

(iii) Jos $u \in C(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *avoin), niin* $u_\varepsilon \to u$ *tasaisesti jokaisella kompaktilla* $K \subset \Omega$. *(Tässä u nollajatketaan* $\mathbf{R}^n$*:ään.)*

Todistus: (i): Induktiolla voidaan olettaa, että $|\alpha| = 1$. Olkoon $e_1, e_2, \dots e_n$ tavallinen $\mathbf{R}^n$:n kanta. Tällöin

$$u_\varepsilon(x + te_i) - u_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(y) \underbrace{\big(\eta_\varepsilon(x + t\varepsilon_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)\big)}_{\int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon(x+se_i-y)ds} \, dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_0^t \underbrace{\int\limits_{\mathbf{R}^n} u(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\varepsilon(x + se_i - y) \, dy}_{\text{on jva } s\text{:n funktio (kun } s \to 0)} \, ds$$

Sisempi integraali on jatkuva, kun $s \to 0$, sillä

$$\begin{aligned}
&\Big| \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(y) \partial_i \eta_\varepsilon(x + se_i - y) \, dy - \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(y) \partial_i \eta_\varepsilon(x - y) \, dy \Big| \\
&\le \int\limits_{\mathbf{R}^n} |u(y)| \underbrace{|\partial_i \eta_\varepsilon(x + se_i - y - \partial_i \eta_\varepsilon(x - y))|}_{\substack{\le M|s| \\ \text{VAL, koska } |\nabla \partial_i \eta_\varepsilon| \text{ on rajoitettu}}} \, dy \\
&\le Ms \int\limits_{\overline{B}(x, 2\varepsilon)} |u(y)| \, dy \overset{s \to 0}{\to} 0 \,.
\end{aligned}$$

Näin ollen saamme

$$\frac{u_\varepsilon(x+te_i)-u_\varepsilon(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} u(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon(x+se_i-y)\,dy\,ds$$
$$\xrightarrow[t\to 0]{\text{jvuus}} \int_{\mathbf{R}^n} u(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \big(\frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon * u\big)(x)\,.$$

$\not\square$

(ii): Jos $p>1$ ja $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, niin

$$|u_\varepsilon(x)| = \Big|\int_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{q}}\eta_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{p}}u(y)\,dy\Big|$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\Big(\int \eta_\varepsilon(x-y)\,dy\Big)^{\frac{1}{q}}}_{=1}\Big(\int \eta_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}$$

ja siten

$$|u_\varepsilon(x)|^p \leq \int_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy = \eta_\varepsilon * |u|^p(x)\,.$$

Tämä epäyhtälö on tosi myös kun $p=1$. Siten kaikilla $1\leq p<\infty$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u_\varepsilon|^p\ dx \leq \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\ dx$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} |u(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\,dx}_{=1}\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} |u|^p\,dx\,,$$

eli

(2.1) $$\|u_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_p;$$

epäyhtälö (2.1) on voimassa myös, kun $p=\infty$ (miksi?).

Koska

$$|u_\varepsilon(x)-u(x)| = \Big|\int\limits_{\mathbf{R}^n} u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy - u(x)\underbrace{\int\limits_{\mathbf{R}^n}\eta_\varepsilon(x-y)\,dy}_{=1}\Big|$$

$$= \Big|\int\limits_{\mathbf{R}^n}(u(y)-u(x))\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\Big|\,,$$

saadaan kuten yllä (kun ! $\le p < \infty$)

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}|u_\varepsilon(x)-u(x)|^p\,dx \le \int\limits_{\mathbf{R}^n}\eta_\varepsilon\underbrace{(x-y)}_{z}|u\underbrace{(y)}_{x-z}-u(x)|^p\,dy\,dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\eta_\varepsilon(z)\Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n}\underbrace{|u(x-z)-u(x)|^p}_{\substack{\to 0,\\ \text{kun } z\to 0\\ \text{eli jos } \varepsilon\to 0}}\,dx\Big)dz \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ L2.15}}{\longrightarrow} 0$$

$\not\square$

(iii): Estimoidaan

$$|u_\varepsilon(x)-u(x)| \le \int\limits_{\mathbf{R}^n}\underbrace{\eta_\varepsilon(x-y)}_{\le\varepsilon^{-n}\sup\eta}|u(y)-u(x)|\,dy$$

$$\le (\sup\eta)\cdot\varepsilon^{-n}\int\limits_{\overline{B}(x,\varepsilon)}\underbrace{|u(y)-u(x)|}_{<\delta \text{ tas. } K\text{:ssa}}\,dy \le M\cdot\delta\,,$$

kun ε on tarpeeksi pieni, sillä u on tasaisesti jatkuva K:ssa. □

2.19. Huomautus. 1. Kohdan (ii) todistuksessa edellä käytettiin L^p-normin jatkuvuutta (Lause 2.15). Se voitaisiin ohittaa (HT) käyttämällä kaavaa (2.1), kohtaaa *(iii)* ja tietoa: "$C_0(\mathbf{R}^n)\subset L^p(\mathbf{R}^n)$ tiheä".

2. Kohdan (iii) todistuksesta nähdään, että kaikilla $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ $u_\varepsilon(x)\to u(x)$ kun $\varepsilon\to 0$ jokaisella x, jolle

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-n}\int\limits_{\overline{B}(x,\varepsilon)}|u(y)-u(x)|\,dy = 0\,.$$

Tällaista pistettä x sanotaan u:n *Lebesgue-pisteeksi.* Voidaan osoittaa (reaalianalyysi) että m.k. $x \in \mathbf{R}^n$ ovat u:n Lebesgue-pisteitä js siten $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ m.k. $x \in \mathbf{R}^n$.

Huomaa, että L^1-konvergensista (Lause 2.18 (ii)) seuraa, että on osajono u_{ε_k}, joka suppenee m.k. x kohti $u(x)$:ää.

2.2. Lemma. *Jos Ω on avoin ja $u \in L^p(\Omega)$ on sellainen, että on kompakti $K \subset \Omega$ s.e.*

$$u(x) = 0 \qquad \textit{kaikilla } x \in \Omega \backslash K\,,$$

niin

$$\eta_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega), \qquad \textit{kunhan } \varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$$

ja

$$\eta_\varepsilon * u \to u \;\; L^p(\Omega)\textit{:ssa}\,.$$

Todistus: Jos $x \in \Omega$, jolle $\operatorname{dist}(x, K) > \varepsilon$, niin $u(y) = 0$ kaikilla $\in \overline{B}(x, \varepsilon)$ ja siten

$$\eta_\varepsilon * u(x) = \int\limits_{\overline{B}(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) u(y)\; dy = 0\,.$$

Toisin sanoen,

$$\operatorname{spt}(\eta_\varepsilon * u) \subset \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, K) \le \varepsilon\} \subset\subset \Omega\,.$$

□

2.20. Seuraus. *Olkoon Ω avoin ja $1 \le p < \infty$. Tällöin $C_0^\infty(\Omega)$ on tiheä $L^p(\Omega)$:n osajoukko, ts. kaikilla $f \in \Omega$ on olemassa jono $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ s.e.*

$$\lim_{j \to 0} \|\varphi_j - f\|_p = 0\,.$$

Todistus: HT. □

PYSYVÄISSOPIMUS: Jatkossa $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ on avoin.

2.21. Seuraus. *Jos $K \subset \Omega$ on kompakti, niin on olemassa $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ s.e. $0 \le \varphi \le 1$ ja $\varphi = 1$ K:ssa. Lisäksi voidaan valita φ s.e.*

$$|\nabla\varphi(x)| \le \frac{7}{\operatorname{dist}(K, \partial\Omega)}\,, \qquad \textit{jos } \Omega \ne \mathbf{R}^n\,.$$

Tällaista funktiota φ kutsutaan cut-off-funktioksi.

Todistus: $\Omega \ne \mathbf{R}^n$.

$$u(x) = \min\left[\frac{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) - \frac{\delta}{2})_+}{\frac{\delta}{2}}, 1\right] \qquad \text{missä } \delta = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0\,.$$

$$v(x) = 2 \cdot \min(u(x), \frac{1}{2})\,.$$

Etsitty funktio on esimerkiksi v:n silotus v_ε, kun ε tarpeeksi pieni. (Toinen tapa tehtdä tämä, on yhdistää u:n päälle sopiva sileä funktio.) Loput HT. $\square$

2.22. Huomautus. Tapaus $p = \infty$. Ei päde (miksei?), että $u_\varepsilon \to u \quad L^\infty$:ssä, mutta kuitenkin $\|u_\varepsilon\|_\infty \le \|u\|_\infty$.

2.3. Lemma. (Variaatiolemma.) *Olkoon $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ sellainen funktio, jolle*

$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \qquad \textit{kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Tällöin $u(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$.

Todistus: Olkoon $K \subset \{x : u(x) > 0\}$ kompakti. Valitaan avoimet $D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset K$ s.e. $D_1 \subset\subset \Omega$ ja $|D_j \backslash K| < \frac{1}{j}$. Olkoon $\varphi_j \in C_0^\infty(D_j)$ s.e. $0 \le \varphi_j \le 1$, $\varphi_j = 1$ K:ssa (tällainen on olemassa Seurauksen 2.21 nojalla.) Nyt

$$\int_\Omega u\varphi_j \, dx = 0\,.$$

Lisäksi

$$|u\varphi_j| \le |u| \quad \text{ ja } \quad u\varphi_j(x) \to (u\chi_K)(x) \quad \text{m.k. } x \in \Omega\,,$$

koten dominoidun konvergenssilauseen nojalla saamme

$$\int_{\Omega} u\varphi_j \; dx \to \int_{\Omega} u\chi_K \; dx = \int_K u \; dx \, .$$

Niinpä $|K| = 0$, koska $u > 0$ K:ssa, joten

$$|\{u > 0\}| = 0 \, .$$

$\square$

3. Heikko derivaatta eli distributiivinen derivaatta

Esimerkki. Olkoon $u \in C^1(\Omega)$ ja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Tällöin $u\varphi \in C_0^1(\Omega)$ (voidaan olettaa, että $\underset{\text{nollajatko}}{u\varphi \in C_0^1(\mathbf{R}^n)}$). Olkoon $x \in \Omega$. Tarkastellaan kuvausta $t \mapsto (u\varphi)(x+te_j)$. Tällöin voidaan valita $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, joille

$$\varphi(x+te_j) = 0 \quad \text{kaikilla } t \geq t_1 \text{ ja } t \leq t_2\,.$$

Siten saamme (yksiulotteisesta) analyysin peruslauseesta:

$$\begin{aligned}
0 = (u\varphi)(x+t_1e_j) - (u\varphi)(x+t_2e_j) &= \int_{t_2}^{t_1} \partial_j(u\varphi)(x+te_j)dt \\
= \int_{t_2}^{t_1} (\partial_j u)\varphi(x+te_j)dt &+ \int_{t_2}^{t_1} u \cdot \partial_j\varphi(x+te_j)dt \\
= \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_j u)\varphi(x+te_j)dt &+ \int_{-\infty}^{\infty} u(\partial_j\varphi)(x+te_j)dt\,.
\end{aligned}$$

Toisin sanoen,

$$\int_{\mathbf{R}} (\partial_j u)\varphi(x+te_j)dt = -\int_{\mathbf{R}} u\partial_j\varphi(x+te_j)dt\,.$$

Integroidaan nyt yli muuttujien $dx_1,\ dx_2, \ldots, \underset{\substack{\text{ei integroida}\\ \text{tämän suhteen}}}{\widehat{dx_j}}, \ldots, dx_n$

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int \cdots \int}_{\mathbf{R}^n} \partial_j u\varphi(x+te_j)dt\,dx_1 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_n \\
&\qquad = -\underbrace{\int \cdots \int}_{\mathbf{R}^n} u\partial_j\varphi(x+te_j)dt\,dx_1 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_n\,,
\end{aligned}$$

jolloin Fubinin lauseesta seuraa

$$\int_{\mathbf{R}^n} \partial_j u\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbf{R}^n} u\partial_j\varphi(x)\,dx$$

Siis

$$\int_\Omega \partial_j u\varphi(x)\;dx = -\int_\Omega u\partial_j\varphi(x)\;dx \quad \text{kaikilla } \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{3.1}$$

3.1. Huomautus. Tarkkaan ottaen yo. laskussa käytetään "tietoa", että $u\in C^1(\mathbf{R}^n)$. Tämä ei ole oleellista (3.1):n aikaansaamiseksi: kun $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ on kiinnitetty, voidaan u korvata funktiolla (u,ψ), missä $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, $0\le\varphi\le 1$ ja $\psi=1$ $\operatorname{spt}\varphi$:ssä. Tällöin u:lle ja $u\psi$:lle (3.1):n integraalit ovat samat.

Kääntäen, on helppo nähdä, että jos v on sellainen jatkuva funktio, jolle

$$\int_\Omega v\varphi dv = -\int_\Omega u\partial_j\varphi\,dx \quad \text{kaikilla } \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

niin $v=\partial_j u$, mikäli $u\in C^1(\Omega)$.

3.2. Määritelmä. (Heikko derivaatta) Olkoon $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja $\alpha\in\mathbf{N}^n$. Jos on olemassa sellainen $v\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, jolle pätee osittaisintegrointikaava

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,dx \quad \text{kaikilla } \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\,, \tag{3.2}$$

niin v on u:n α. (*heikko*) *derivaatta* Ω:ssa (distributiivinen, yleistetty tai Sobolev derivaatta) ja merkitään $v=D^\alpha u$. (Jos $|\alpha|=1$, $D^{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)}u=\partial_j u$ ja $\nabla u=(\partial_1 u,\partial_2 u,\dots,\partial_n u)$.)

3.3. Huomautus.

(1) Aiemmin merkittiin klassisia derivaattoja symbolilla $D^\alpha u$. Tästä ei aiheudu suurta sekaannusta sillä, jos $u\in C^{|\alpha|}(\Omega)$, niin $D^\alpha u = D^\alpha u$ m.k., ts. α. heikko derivaatta on m.k. α. (klassinen) derivaatta.

(2) Variaatiolemman (Lemma 2.3) nojalla heikko derivaatta on m.k. yksikäsitteinen: Jos v_1, v_2 ovat heikkoja α. derivaattoja, niin

$$\int_\Omega (v_1-v_2)\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (uD^\alpha\varphi - uD^\alpha\varphi)\,dx = 0 \quad \text{kaikilla } \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

3.4. Huomautus. Heikko derivaatta $D^\alpha u$ on u:n distributiivinen derivaatta, mutta tässä vaaditaan erityisesti, että se on lokaali L^1-*funktio*.

Monesti jatkossa $|\alpha| = 1$ ja silloin usein merkitään $D^\alpha u = Du$. Erityisesti $\nabla u = (D^{(1,0,\ldots,0)}u, D^{(0,1,0,\ldots,0)}u, \ldots, D^{(0,\ldots,0,1)}u)$ ja 0. derivaatta on funktio itse, $D^0 u = u$.

3.5 . Huomautus. Jos v on $D^\alpha u$ Ω:ssa, niin v on u:n α. derivaatta D:ssä kaikilla $D \subset \Omega$ avoin.

Esimerkki.
a) Olkoon

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{jos } 1 \le x\,. \end{cases}$$

$\Omega =]0,2[\Rightarrow u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Koska heikko derivaatta yhtyy tavalliseen derivaattaan, kun jälkimmäinen on jatkuva, ainoa järkevä yrite derivaataksi on

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } 0 < x < 1 \\ 0,, & \text{jos } x > 1\,. \end{cases}$$

Nyt jos $\varphi \in C_0^\infty(]0,2[)$, niin osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned} \int_{]0,2[} u\varphi'\,dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx + \int_1^2 \varphi'(x)\,dx \\ &= \Big/_0^1 x\varphi(x) - \int_0^1 \varphi(x)\,dx + \Big/_1^2 \varphi(x) \\ &= \varphi(1) + \underbrace{\varphi(2)}_{=0} - \varphi(1) - \int_{]0,2[} v(x)\varphi(x)\,dx \end{aligned}$$

eli $v = D^1 u$ Ω:ssa.

b) Olkoon $\Omega =]0,2[$ ja

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } 0 < x < 1 \\ 2, & \text{jos } x \ge 1 \end{cases}$$

Taas ainoa järkevä yrite derivaataksi on

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{jos } x > 1\,. \end{cases}$$

Olkoon $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, jolloin

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\varphi^1\,dx &= \int_0^1 x\varphi^1(x)\,dx + \int_1^2 2\varphi^1(x)\,dx \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\,dx + 2(\underbrace{\varphi(2)}_{=0} - \varphi(11)) \\ &= -\int_{]0,2[} v(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(1)\,, \end{aligned}$$

joten valitsemalla sellainen funktio φ, jolle $\varphi(1) \neq 0$, osittaisintegrointikaava ei päde. Siispä u:lla ei ole heikkoa derivaattaa Ω:ssa. (Syy: u ei ole jatkuva pisteessä $x = 1$, ja kyseessä on 1-ulotteinen tilanne.)

Esimerkki. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Jos u on rajoitettu eli $u \in L^\infty(\Omega)$ ja u:lla on $\Omega\setminus\{x_0\}$:ssa 1. kertaluvun heikko derivaatta $v = Du \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Tällöin v on u:n heikko derivaatta Ω:ssa: Oletuksen nojalla osittaisintegrointikaava

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega Du\varphi\,dx \qquad \text{pätee kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega\setminus\{x_0\})\,. \tag{3.3}$$

Osoitetaan, että kaava (3.3) pätee kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Olkoon $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Valitaan cut-off funktio $\psi_j \in C_0^\infty(B(x_0, \frac{1}{j}))$ s.e. $\psi_j(x) = 1$, kun $x \in \overline{B}(x_0, \frac{1}{10^{10^{10^{10}}}j})$ ja $0 \leq \psi_j \leq 1$ sekä $|\nabla\psi_j| \leq 10^{10}j$ (ks. Lemma 2.21). Tällöin $\varphi(1-\psi_j) \in C_0^\infty(\Omega\setminus\{x_0\})$, joten sitä voidaan käyttää testifunktiona eo. kaavassa. Saamme

$$\int_{\operatorname{spt}\varphi} \underbrace{Du(\varphi\overbrace{(1-\psi_j)}^{\to 1\text{m.k.}})}_{\leq c|Du|\in L^1}\,dx = -\int_\Omega uD(\varphi(1-\psi_j))\,dx.$$

Dominoidun konvergenssilauseen nojalla vasen puoli suppenee kohti integraalia

$$\int_\Omega Du\cdot\varphi\,dx$$

ja oikea puoli

$$
\begin{aligned}
&= -\int_\Omega \underbrace{uD\varphi\cdot(1-\psi_j)}_{1\cdot 1\le c|u|\in L^1}\,dx + \int_\Omega u\varphi D\psi_j\,dx \\
&\to -\int_\Omega uD\varphi\;dx + 0\,,
\end{aligned}
$$

sillä

$$
\Big|\int_\Omega u\varphi D\psi_j\,dx\Big| \le \int_{B(x,\frac{1}{j})} \overbrace{|u||\varphi|}^{<M}\overbrace{|D\psi_j|}^{<M_j}\,dx \le cMj\big(\frac{1}{j}\big)^n = cj^{1-n} \underset{j\to\infty}{\to} 0\,.
$$

Näin ollen (3.3) on tosi kaikilla $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ ja siten v on u:n heikko derivaatta koko Ω:ssa.

3.6. Huomautus. Heikko derivaatta (ja sen olemassaolo) on määritelmän mukaan globaali ominaisuus. Se on myös lokaali ominaisuus: u:lla on heikko derivaatta $v = D^\alpha u$ Ω:ssa, jos ja vain, jos jokaisella $x\in\Omega$ on ympäristö $B(x,r)$ s.e. u:lla on α. heikko derivaatta v $B(x,r)$:ssä. “Vain jos” -suunta on triviaali. ”Jos-suunta seuraa seuraavasta lemmasta ja lauseesta tai käyttämällä ns. ykkösen ositusta (ks. Lause 4.12).

3.4. Lemma. *Olkoon $u\in L^1_{loc}(\Omega)$, jolla on α. heikko derivaatta $D^\alpha u\in L^1_{loc}(\Omega)$. Olkoon η_ε silottajaydin, jolle* $\operatorname{spt}\eta_\varepsilon\subset\overline{B}(0,\varepsilon)$. *Tällöin*

$$
D^\alpha(\eta_\varepsilon * u)(x) = \eta_\varepsilon * D^\alpha u(x) \quad \textit{kaikilla } x, \textit{ joilla } \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon
$$

TODISTUS: Koska $y\mapsto\eta_\varepsilon(x-y)$ on C_0^∞-funktio, voidaan osittaisintegroida ja saadaan

$$
\begin{aligned}
&D^\alpha(\eta_\varepsilon * u)(x) \overset{\text{L.2.18}}{=} (D^\alpha\eta_\varepsilon) * u(x) \\
&= \int_{\substack{\mathbf{R}^n \\ \text{tai } \Omega}} \underbrace{D^\alpha\eta_\varepsilon(x-y)}_{y\mapsto D^\alpha\eta_\varepsilon(x-y)} u(y)\,dy \overset{\text{os.int.}}{=} (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (-1)^{|\alpha|}\eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)\,dy = \eta_\varepsilon * D^\alpha u(x)\,.
\end{aligned}
$$

□

3.7. Lause. *Olkoon $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Tällöin $v = D^\alpha u$ jos ja vain jos on olemassa jono $\varphi_j \in C^\infty(\Omega)$ s.e. kaikilla avoimilla $D \subset\subset \Omega$:*

$$\varphi_j \to u \quad L^1(D)\text{:ssä}$$

ja

$$D^\alpha \varphi_j \to v \quad L^1(D)\text{:ssä}\,.$$

TODISTUS: $\underline{\Leftarrow}$: harjoitustehtävä .
$\underline{\Rightarrow}$: valitse $\varphi_j = \eta_{\frac{1}{j}} * u$ ja katso Lemmaa 3.4 sekä Lausetta 2.18. □

3.8. Huomautus. Jos u:lla ja v:llä on heikot derivaatat, niin

$$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v\,, \quad \lambda, \mu, \in \mathbf{R}, \text{ HT.}$$

3.9. Lause. (Tulosääntö) *Olkoot $u, v \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ sellaisia, että niillä on 1. kertaluvun yleistetty derivaatta $Du \in L^1_{loc}(\Omega)$ ja $Dv \in L^1_{loc}(\Omega)$ (molemmilla samaan suuntaan). Tällöin tulo uv derivoituu heikosti ja*

$$D(uv) = uDv + (Du)v\,.$$

TODISTUS: Valitaan $u_j \in C^\infty(\Omega)$ s.e. $\|u_j\|_\infty \le \|u\|_\infty$ ja $u_j \to u$ ja $Du_j \to Du$ $L^1(G)$:ssä kaikilla avoimilla $G \subset\subset \Omega$. Osoitetaan, että osittaisintegrointikaava pätee:

Olkoon $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$. Valitaan $G \subset\subset \Omega$ s.e. $\operatorname{spt}\varphi \subset G$. Nyt

$$\begin{aligned}\int_G v \cdot \underbrace{D(u_j\varphi)}_{=(Du_j)\varphi + u_j D\varphi}\, dx &= -\int_G Dv(u_j \cdot \varphi)\, dx \\ &= \int_G v(Du_j \cdot \varphi + u_j D\varphi)\, dx\,,\end{aligned}$$

ts.

$$\int_G (\underbrace{u_j Dv}_{\le c|Dv| \in L^1} + (Du_j)v)\varphi\, dx = -\int_G \underbrace{v u_j D\varphi}_{\le M}\, dx$$

Osajonoon siirtymällä $u_j(x) \to u(x)$ m.k., joten Dom. konvergenssista vasemmalle puolelle seuraa

$$\int (uDv - Duv)\varphi \, dx = -\int uvD\varphi \, dx \,,$$

sillä

$$\Big| \int (Du - Du_j) \underbrace{v\varphi}_{<M} \, dx \Big| \leq M \|Du - Du_j\|_1 \to 0 \,.$$

□

3.10. Huomautus. Tulosäännön oletus $u, v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ voidaan korvata oletuksella $uv \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja $uDv + vDu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ks. Lause 3.21.

3.11. Huomautus. Jos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$, niin

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \frac{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!}{\beta_1! \cdots \beta_n!(\alpha_1 - \beta_1)! \cdots (\alpha_n - \beta_n)!} \,, \text{ jos } \alpha_i \geq \beta_i \,.$$

Sileille funktioille $u, v \in C^\infty(\Omega)$ on voimassa ns. Leibnitzin kaava

$$D^\alpha(u, v)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u(x) D^{(\alpha - \beta)} v(x) \,.$$

Sama kaava pätee myös heikoille derivaatoille mikäli kaikki esiintyvät termit ovat OK, erityisesti lokaalisti integroituvia (tässäpä harjoitustehtävää).

3.12. Lause. *Jos Ω on alue ja funktion $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ensimmäiset heikot derivaatat häviävät Ω:ssa, ts. $\nabla u = 0$ m.k. Ω:ssa, niin on olemassa $c \in \mathbf{R}$, jolle*

$$u(x) = c \quad \text{m.k. } x \in \Omega \,.$$

Todistus: Tyhjennetään Ω: otetaan alueet $D_1 \subset\subset D_2 \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega$, joille

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty D_j \,.$$

Kiinnitetään j ja olkoon $\varepsilon < \operatorname{dist}(D_j, \mathbf{R}^n \setminus \Omega)$. Tällöin

$$\nabla(\eta_\varepsilon * u)(x) = \eta_\varepsilon * \nabla u(x) \quad \text{kaikilla } x \in D_j$$

(voidaan tehdä koordinaateittain, Lemma 3.4). Koska $\eta_\varepsilon * u \in C^\infty(D_j)$, seuraa tästä, että on olemassa vakio $a_\varepsilon \in \mathbf{R}$, jolle

$$\underbrace{\eta_\varepsilon * u(x)}_{\overset{\varepsilon\to 0}{\to} u(x) \text{ m.k.}} = \underbrace{a_\varepsilon}_{\overset{\varepsilon\to 0}{\to} c_j} \qquad \text{kaikilla } x \in D_j\,.$$

On siis $c_j \in \mathbf{R}$ s.e.

$$u(x) = c_j \qquad \text{m.k. } x \in D_j\,.$$

Koska $D_1 \subset\subset D_2 \subset\subset \ldots$, niin $c_j = c_k$ kaikilla k, j ja siten

$$u(x) = c_1 \qquad \text{m.k } x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = \Omega\,.$$

$\square$

3.13. Lause. (Ketjusääntö) *Olkoon $f \in C^1(\mathbf{R})$ s.e. $f' \in L^\infty(\mathbf{R})$. Jos funktiolla $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ on 1. kertaluvun heikko derivaatta $Du \in L^1_{loc}(\Omega)$, niin yhdistetyllä funktiolla $f \circ u$ on 1. kertaluvun heikko derivaatta ja*

$$D(f \circ y)(x) = f'(u(x))Du(x) \qquad \text{m.k. } x\,.$$

3.14. Huomautus. Lauseen 3.13 funktio f on Lipshitz:

$$|f(x) - f(y)| \underset{\text{VAL}}{=} |f'(\xi)(x-y)| \leq \|f'\|_\infty |x-y| \;\; \text{kaikilla } x, y \in \mathbf{R}\,.$$

Todistus: Huomaa, että $f'(u)Du \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Olkoon $u_j \in C^\infty(\Omega)$ sellaisia, että kaikilla $G \subset\subset \Omega$: $u_j \to u$, $Du_j \to Du$ $L(G)$:ssä. (Lause 3.7). Tällöin

$$\begin{aligned}
&\int_G |f \circ u_j(x) - f \circ u(x)|\, dx \\
&\quad = \int_G |f(u_j(x)) - f(u(x))|\, dx \\
&\quad \overset{f \text{ Lip.}}{\leq} \|f'\|_\infty \int_G |u_j(x) - u(x)|\, dx \underset{j\to\infty}{\to} 0\,.
\end{aligned}$$

Siispä $f \circ u_j \to f \circ u$ $L^1(G)$:ssä ja erityisesti $f \circ u \in L^1(G)$. Siten $f \circ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Osoitetaan lopuksi, että $D(f \circ u_j) \to f'(u)Du$ $L^1(G)$:ssä kaikilla $G \subset\subset \Omega$, jolloin väite seuraa Lausessta 3.7. Voidaan osoittaa, että $u_j(x) \to u(x)$ m.k. $x \in \Omega$ (osajonoon siirtymällä).

$$
\begin{aligned}
&\int_G |f'(u)Du - D\underbrace{(f \circ u_j)}_{\in C^1}|\,dx = \int_G |f'(u)Du - f'(u_j)Du_j|\,dx \\
&= \int_G |-f'(u)(Du - Du_j) - Du(f'(u_j) - f'(u))|\,dx \\
&\le \int_G \underbrace{|f'(u)|}_{<M} |Du_j - Du|\,dx + \int_G |Du| \underbrace{|f'(u_j) - f'(u)|}_{\substack{\to 0 \text{ m.k. } x, \\ \text{koska } f' \text{ jva ja } u_j(x) \to u(x)}}\, dx \\
&\le \underbrace{\|f'\|_\infty \|Du_j - Du\|_1}_{\to 0} + \int_G |Du||f'(u_j) - f'(u)|\,dx \underset{j\to\infty}{\to} 0\,.
\end{aligned}
$$

Edellä käytettiin dominoidun konvergenssis lausetta; huomaa, että integrandeilla

$$
|Du||f'(u_j) - f'(u)| \quad \text{on majorantti} \quad 2|Du|\|f'\|_\infty \in L^1(G)\,.
$$

$\square$

Merkintä. Funktioiden positiivi- ja negatiiviosat ovat

$$
\begin{aligned}
u^+(x) &:= \begin{cases} u(x), & \text{jos } u(x) > 0 \\ 0, & \text{jos } u(x \le 0) \end{cases} \\
u^-(x) &:= \begin{cases} -u(x), & \text{jos } u(x) < 0 \\ 0, & \text{jos } u(x) \ge 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Näiden avulla saadaan itseisarvo ja maksimi sekä minimi:

$$
|u| = u^+ + u^-, \quad u = u^+ - u^-\,.
$$

$$
\begin{aligned}
\max(u,v)(x) &= \max(u(x), v(x)) = (u-v)^+(x) + v(x) \\
\min(u,v)(x) &= \min(u(x), v(x)) = v(x) - (u-v)^-(x)\,.
\end{aligned}
$$

3.15. Lause. *Jos funktiolla $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ on 1. kertaluvun heikko derivaatta Du Ω:ssa, niin funktioilla u^+, u^- ja $|u|$ on myös 1. kertaluvun heikko derivaatta ja*

$$Du^+(x) = \begin{cases} Du(x), & \text{jos } u(x) > 0 \\ 0, & \text{jos } u(x) \le 0 \end{cases}$$
$$Du^-(x) = \begin{cases} -Du(x), & \text{jos } u(x) < 0 \\ 0, & \text{jos } u(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$D|u| = Du^+(x) + Du^-(x) = \begin{cases} Du(x), & \text{jos } u(x) > 0 \\ -Du(x), & \text{jos } u(x) < 0 \\ 0, & \text{jos } u(x) = 0 \end{cases}$$

Lisäksi: $Du(x) = 0$ *m.k.* $x \in \{y \in \Omega : u(y) = 0\}$.

Todistus: Koska $u^- = (-u)^+$, niin mikäli väite pätee u^+, niin loput seuraavat siitä; huomaa, että tällöin $Du = D(u^+) - D(u^-) = 0 - 0 = 0$ m.k. joukossa $\{x : u(x) = 0\}$. Siten riittää osoittaa, että on olemassa Du^+ ja että väitteen kaava on sille voimassa.

Olkoon

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, & \text{jos } t > 0 \\ 0, & \text{jos } t \le 0 \end{cases},$$

jolloin

$$f'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}, & \text{jos } t > 0 \\ 0, & \text{jos } t \le 0 \end{cases}$$

ja siis $f \in C^1(\mathbf{R})$ sekä $|f(t)| \le 1$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$. Ketjusäännön 3.13 nojalla $\Rightarrow f_\varepsilon \circ u$ on heikosti derivoituva ja

$$\begin{aligned} D(f_\varepsilon \circ u) =& f'_\varepsilon(u(x))Du(x) \\ =& \begin{cases} \frac{u(x)}{\sqrt{u(x)^2+\varepsilon^2}} \cdot Du(x), & \text{jos } u(x) > 0 \\ 0, & \text{jos } u(x) \le 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Olkoon $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Tällöin

$$\int\limits_\Omega D(f_\varepsilon \circ u)\varphi\,dx = -\int\limits_\Omega f_\varepsilon \circ u D\varphi\,dx$$

Siis

$$\int\limits_{\{x:u(x)>0\}} \underbrace{\overbrace{\frac{u(x)}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}}^{\to 1} \cdot Du(x)\varphi(x)}_{\leq |Du\varphi| \in L^1}\, dx = -\int\limits_{\{x:u(x)>0\}} \underbrace{(\overbrace{\sqrt{u(x)^2+\varepsilon^2}}^{\to u(x)} - \varepsilon)}_{\leq |u+\varepsilon||D\varphi| \in L^1} D\varphi(x)\, dx\,.$$

Vasemmasta puoliskosta saadaan rajalla dominoidun konvergenssilauseen avulla

$$\int\limits_{\{u(x)>0\}} Du\varphi\, dx = \int\limits_{\Omega} \text{"}Du^+\text{"}\varphi\, dx$$

(missä "Du^+" viittaa väitteen kaavalla määriteltyyn funktioon) ja oikeasta puoliskosta saadaan

$$-\int\limits_{\{u(x)>0\}} u(x)D\varphi(x)\, dx = -\int\limits_{\Omega} u^+(x)D\varphi(x)\, dx\,,$$

joten

$$\int\limits_{\Omega} \text{"}Du^+\text{"}\varphi\, dx = -\int\limits_{\Omega} u^+(x)D\varphi(x)\, dx\,.$$

$\square$

3.16. Huomautus.

$$
\begin{aligned}
&-\int Du\varphi\, dx = \int uD\varphi\, dx\\
&= \int u^+ D\varphi\, dx - \int u^- D\varphi\, dx = -\int\limits_{\{u>0\}} Du\varphi\, dx - \int\limits_{\{u<0\}} Du\varphi\, dx\\
\Leftrightarrow\quad & \underbrace{\int u^+ D\varphi\, dx + \int\limits_{\{u>0\}} Du\varphi\, dx}_{=0} = \underbrace{\int u^- D\varphi\, dx + \int\limits_{\{u\leq 0\}} (-Du)\varphi\, dx}_{=0}
\end{aligned}
$$

3.17. Seuraus. {(Hilaominaisuus)} Jos u, v heikosti 1. kertaa derivoituvia, niin $\max(u, v)$ ja $\min(u, v)$ ovat myös ja

$$D\max(u,v)(x) \overset{\text{m.k.}x}{=} \begin{cases} Du(x), & \text{jos } u(x) \geq v(x) \\ Dv(x), & \text{jos } v(x) \geq u(x) \end{cases}$$

$$D\min(u,v)(x) = \begin{cases} Dv(x), & \text{jos } u(x) \geq v(x) \\ Du(x), & \text{jos } u(x) \leq v(x)\,. \end{cases}$$

Erityisesti $Du = 0$ m.k. joukossa $\{u(x) = \lambda\}$ kaikilla $\lambda \in \mathbf{R}$.

Seurauksen 3.17 antama etuus on se, että voidaan typistellä eli tutkia leikattuja funktioita $u \to \max(\min(u, k), -k)$. Sen avulla useat väitteet riittää todistaa rajoitetuille funktioilla (ja huolehtia vain, että ominaisuudet eivät menehdy rajankäyntiin).

3.1. Absoluuttinen jatkuvuus

Muista, että jos $[a, b] \subset \mathbf{R}$, niin funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on *absoluuttisesti jatkuva*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että aina, kun poimitaan äärellisen monta pistevierasta välin $[a, b]$ osaväliä, joiden yhteenlaskettu pituus on alle luvun δ, niin funktion f kokonaisheilahtelu po. välien päätepisteissä on alle ε, ts. jos $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 < \cdots \leq a_k < b_k < b$ ovat sellaiset, että

$$\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j) < \delta\,,$$

niin

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon\,.$$

Muista.

(i) Absoluuttisesti jatkuva on jatkuva.

(ii) Reaalianalyysin kurssilla todistettanen:[5] f on absoluuttisesti jatkuva, jos ja vain, jos on olemassa (tavallinen derivaatta) $f'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$, $f' \in L^1([a,b])$ ja

$$f(y) = f(a) + \int\limits_{[a,y]} f'(x)\,dx \text{ kaikilla } y \in [a,b]\,.$$

"Jos-suunnassa riittää, että eo. integrointikaava on voimassa, kun f' korvataan integroituvalla funktiolla g (joka *a posteriori* on f:n derivaatta m.k.).

Heikko derivaatta ja absoluuttinen jatkuvuus, kun $n = 1$.

3.18. Lause. *Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}$ avoin ja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ heikosti derivoituva (ts. on olemassa $Du \in L^1_{loc}(\Omega)$. Tällöin on olemassa sellainen $v : \Omega \to \mathbf{R}$, että $v|_{[a,b]}$ on absoluuttisesti jatkuva jokaisella osavälillä $[a,b] \subset \Omega$ ja $v(x) = u(x)$ m.k. $x \in \Omega$. Lisäksi $Du(x) = Dv(x)$ m.k. $x \in \Omega$.*

Kääntäen, jos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ on sellainen funktio, jolle rajoittumat $f|_{[a,b]}$ ovat absoluuttisesti jatkuvia kaikilla $[a,b] \subset A$ ja jos $f' \in L^1_{loc}(\Omega)$, niin f on heikosti derivoituva ja $Df = f'$ m.k.

Todistus: "$\Leftarrow$" Riittää osoittaa, että f' on f:n heikko derivaatta (tehtiin oleellisesti harjoituksissa). Olkoon $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Tällöin $(f\varphi)$ on absoluuttisesti jatkuva kaikilla väleillä $[a,b] \subset \Omega$, joten

$$0 \overset{\operatorname{spt} f\varphi \subset\subset \Omega}{=} \int\limits_\Omega (f\varphi)'\,dx = \int\limits_\Omega f'\varphi\,dx + \int\limits_\Omega f\varphi'\,dx\,,$$

ts.

$$\int\limits_\Omega f\varphi'\,dx = -\int\limits_\Omega \varphi f'\,dx \qquad \text{kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ eli } f' = Df\,.$$

"$\Rightarrow$" Voidaan olettaa, että Ω on yhtenäinen. Otetaan $\varphi_j \in C^\infty(\Omega)$ s.e. $\varphi_j \to u$ ja $\varphi' \to Du$ $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$:ssa ja $\varphi_j(x) \to u(x)$ m.k. $x \in \Omega$. Valitaan $x_0 \in \Omega$, jolle $\varphi_j(x_0) \to u(x_0)$.

Väite: Kaikilla $x \in \Omega$

$$\varphi_j(x) \to u(x_0) + \int\limits_{[x_0,x]} Du(y)dy\,.$$

[5] katso esim. Bruckner, Bruckner, and Thomson: Real analysis.

Todistus:

$$\Big| \int\limits_{[x_0,x]} \varphi_j' \, dy - \int\limits_{[x_0,x]} Du(y)\, dy \Big| \le \int\limits_{[x_0,x]} |\varphi_j' - Du| \, dy \to 0 \, .$$

Siten

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_0) + \int\limits_{[x_0,x]} \varphi' \, dy \to u(x_0) + \int\limits_{[x_0,x]} Du(y)\, dy \quad \text{kaikilla } x \in \Omega \, .$$

$\not\subset$

Väitten nojalla rajafunktio v,

$$v(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi_j(x)$$

on absoluuttisesti jatkuva välillä $[a,b]$. Koska $\varphi_j(x) \to u(x)$ m.k. x, on $v(x) = u(x)$ m.k. $x \in \Omega$. Erityisesti siis heikosti derivoituvalla $u \in L^1_{\text{loc}}(]a,b[)$ on (absoluuttisesti) jatkuva edustaja. □

Heikko derivaatta ja absoluuttinen jatkuvuus, kun $n \ge 2$.

Kun $n \ge 2$, niin heikosti derivoituvalla funktiolla ei yleensä ole jatkuvaa edustajaa (esimerkiksi funktio $|x|^{\frac{3}{2}-n}$ on tällainen).

3.19. Määritelmä. Funktio $u : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, on ACL Ω:ssa (eli *absoluuttisesti jatkuva m.k. suorilla*), jos "se on absoluuttisesti jatkuva melkein jokaisella koordinaattiakselin suuntaisella suoralla" tarkasti:

Olkoon L j. koordinaattiakselin suuntainen suora, ts.

$$L = \{x_L + te_j : t \in \mathbf{R}\}$$

ja $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, e_j j. kantavektori.

Jos $J \subset L \cap \Omega$ on suljettu jana, ts.

$$J = \{x_L + te_j : t \in [a,b]\} \, ,$$

niin $t \mapsto u(x_l + te_j)$ on absoluuttisesti jatkuva välillä $[a,b]$.

"Melkein jokaisella suoralla" tarkoittaa: $m_{n-1}(P_j(E)) = 0$ kaikilla $j = 1, \dots, n$, missä

$$E = \{x_L \in \mathbf{R}^n : \text{ ominaisuus ei päde suoralla } \{x_L + te_j : t \in \mathbf{R}\}\}$$

ja $P_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ on j. projektio, ts.

$$P_j((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

3.20. Huomautus. ACL-funktio ei välttämättä ole edes mitallinen.

Varo: Jotkut sisällyttävät jatkuvuuden ACL-funktioiden määritelmään.

3.21. Lause. *Olkoon $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Tällöin u:lla on heikko derivaatta $D_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$, jos ja vain, jos on olemassa sellainen ACL-funktio $v : \Omega \to \mathbf{R}$, jolle*

$$u(x) = v(x) \quad \text{m.k. } x \in \Omega \text{ ja } \partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)\,.$$

Tällöin $\partial_i v = D_i u$ m.k. Ω:ssa.

Tässä $\partial_i v$ on osittaisderivaatta, joka on tavallisessa mielessä olemassa m.k. suorilla L, jolla v on absoluuttisesti jatkuva.

TODISTUS: "$\Leftarrow$" Kuten edellinen lause + Fubini.

"$\Rightarrow$" Voidaan olettaa, että $\Omega = \mathbf{R}^n$ ja että $u(x) = 0$, kun $|x| \geq R$. (Helppoa, kun käyttää cut-off -funktioita, palloja ja diagonaaliargumenttia.)

Valitaan $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ (voidaan olettaa, että $\operatorname{spt} \varphi_j \subset B(0, 2R)$), jolle

$$\begin{aligned} &\varphi_j(x) \to u(x) \text{ m.k. } x \in \mathbf{R}^n \text{ ja} \\ &D_i\varphi_j(x) \to D_i u \;\; L^1(\mathbf{R}^n)\text{:ssä.} \end{aligned}$$

Merkitään pistettä $x \in \mathbf{R}^n$ symbolilla $(\tilde{x}, x_i)$, missä $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n-1}$.

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} |D_i\varphi_j(\tilde{x}, x_i) - D_i u(\tilde{x}, x_i)|\, dx_i \right) d\tilde{x} \overset{j\to\infty}{\to} 0\,.$$

Osajonoon siirtymällä voidaan olettaa, että m.k. $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n-1}$

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \underbrace{|D_i\varphi_j(\tilde{x}, x_i) - D_i u(\tilde{x}, x_i)|\, dx_i}_{x_i \to 0 \text{ on Cauchy } L^1\text{:ssä}} \overset{j\to\infty}{\to} 0$$

Siispä m.k. $\widetilde{x} \in \mathbf{R}^{n-1}$:

$$\int_{\mathbf{R}} |D_i\varphi_j(\widetilde{x}, x_i) - D_i\varphi_k(\widetilde{x}, x_i)|\, dx_i \underset{\text{Cauchy}}{\overset{j,k\to\infty}{\longrightarrow}} 0\,.$$

Nyt kaikilla $x \in B(0, 2R)$ pätee

$$|\varphi_j(\widetilde{x}, x_i) - \varphi_k(\widetilde{x}, x_i)| = \Big| \underset{\text{alarajoilla sij }=0}{\int_{-2R}^{x_i}} D_i\varphi_j(\widetilde{x}, t) - D_i\varphi_k(\widetilde{x}, x_i)dt\Big|$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}} |D_i\varphi_j(\widetilde{x}, t) - D_i\varphi_k(\widetilde{x}, t)|dt \to 0\,.$$

Näin ollen, jono $x_i \mapsto \varphi_j(\widetilde{x}, x_i)$ on tasaisesti Cauchy-jono $\mathbf{R}$:ssä, joten se suppenee tasaisesti kohti jotain jatkuvaa funktiota $x_i \mapsto v(\widetilde{x}, x_i)$.

Toisaalta

$$\underbrace{\int_{-2R}^{x_i} D_i\varphi_j(\widetilde{x}, t)dt}_{=\varphi_j(\widetilde{x}, x_i)} \to \int_{-2R}^{x_i} D_iu(\widetilde{x}, t)dt\,,$$

joten

$$v(\widetilde{x}, x_i) = \int_{-2R}^{x_i} D_iu(\widetilde{x}, t)dt\,.$$

Toisin sanoen, $x_i \mapsto v(\widetilde{x}, x_i)$ on absoluuttisesti jatkuva välillä $[-2R, 2R]$. Toisaalta $\varphi_j(\widetilde{x}, x_i) \to u(\widetilde{x}, x_i)$ m.k. x, joten v on etsitty edustaja. Derivaatta saadaan suoraan integraalista. □

3.22. Huomautus. Lokaalisti Lipschitz-funktio $u : \Omega \to \mathbf{R}$ on absoluuttisesti jatkuva kaikilla suorilla ja sen osittaisderivaatta on lokaalisti rajoitettu, joten u on heikosti derivoituva.

Muista, että u on lokaalisti Lipschitz-funktio, jos kaikilla palloilla $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$ on vakio M_B s.e.

$$|u(x) - u(y)| \leq Mu_B(x, y) \quad \text{kaikilla } x, y \in \overline{B}(x_0, r)\,.$$

4. Sobolev-avaruudet, osa II

4.1. Määritelmä. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ avoin ja $k \in \mathbf{N}$ ja $1 \leq p \leq \infty$. *Sobolev-avaruus* $W^{k,p}(\Omega)$ koostuu kaikista funktioista $u \in L^p(\Omega)$, joilla on heikot derivaatat $D^\alpha u$ Ω:ssa kaikilla $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \leq k$, ja $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. ($k$ =kertaluku)

Siinä käytetään normina[6]

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Vastaava lokaali avaruus on

$$W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) := \{u : u \in W^{k,p}(D) \text{ kaikilla } D \subset\subset \Omega\}\,.$$

Huomaa, että samastuksella

$$u \sim (u, D^{(1,0,\dots)}u, D^{(0,1,0\dots)}, \dots)$$

$W^{k,p}(\Omega)$ voidaan tulkita tuloavaruuden $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$ aliavaruudeksi.

Muita käytettäviä ekvivalentteja normeja $W^{k,p}(\Omega)$:ssa on mm.

$$\|u\| := \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)\,;$$

ekvivalenttius tarkoittaa sitä, että on olemassa sellainen vakio $c \in \mathbf{R}$, jolle

$$\frac{1}{c}\|u\|_{k,p} \leq \|u\| \leq c\|u\|_{k,p} \quad \text{kaikilla } u \in W^{k,p}(\Omega)\,.$$

4.2. Huomautus. Jos $p = 2$, niin avaruuteen $W^{k,2}(\Omega)$ tulee normi sisätulosta

$$(u|v) := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx$$

ja $(u|u) = \|u\|^2$, joka on siis ekvivalentti normin $\|\cdot\|_{k,2}$ kanssa; tätä normia käytetään yleensä $W^{k,2}(\Omega)$:ssa, koska tästä tulee tällöin Hilbert-avaruus.

[6] Huomaa, että $D^0 u$ eli u on summassa mukana.

4.3. Lause. *$(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ on Banach-avaruus.*

TODISTUS: Demot. $\square$

4.4. Huomautus. Jatkossa ei yleensä ole väliä, mitä ekvivalenteista normeista $W^{k,p}(\Omega)$:ssa käytetään; ekvivalenttiusvakio on yleensä $c = c(k, p, n)$.

Lauseesta 3.21 saadaan

4.5. Lause. *Olkoon $u \in L^p(\Omega)$. Tällöin $u \in W^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos on olemassa sellainen ACL-funktio $v \in L^p(\Omega)$, jolle $\partial_j v \in L^p(\Omega)$ kaikilla $j = 1, \dots, n$ ja $v = u$ m.k. Ω:ssa.*

4.6. Huomautus. Monet ilmiöt $W^{k,p}(\Omega)$:ssa voidaan induktiivisella päättelyllä helposti palauttaa $W^{1,p}(\Omega)$:aa koskeviksi ilmiöiksi. Tästä syystä jatkossa useimmiten rajoitumme tarkastelemaan avaruuksia $W^{1,p}(\Omega)$.

Selvästi $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^k(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$; joukon $C_0^\infty(\Omega)$: sulkeumaa $W^{k,p}(\Omega)$:ssa merkitään symbolilla $W_0^{k,p}(\Omega)$. (Sanotaan, että $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ *häviää* $\partial\Omega$:lla *Sobolev-mielessä.*) Siis $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ jos ja vain jos on olemassa jono $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ s.e.

$$\lim_{j\to\infty} \|u - \varphi_j\|_{k,p} = 0\,.$$

Tällöin $(W_0^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ on Banach-avaruuden suljettuna aliavaruutena itsekin Banach-avaruus.

4.7. Huomautus.

- $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$. Yleensä $W_0^{k,p}(\Omega) \neq W^{k,p}(\Omega)$, esimerkiksi kun Ω rajoitettu.
- Intuitiivisesti $W_0^{k,p}(\Omega)$:n funktiot häviävät $\partial\Omega$:lla (ei ole tarkkaan ottaen totta, katso Lause 8.24).
- Jos $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, niin (HT) $v \in W_0^{k,p}(\mathbf{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$, missä

  $$v(x) = \begin{cases} u(x), & \text{jos } x \in \Omega \\ 0, & \text{jos } x \notin \Omega\,. \end{cases}$$

  Käänteinen puoli ei ole selllaisenaan edes mielekäs kysymys (miksei?), vaan tarvitsee lisäpohdintaa (katso Lause 8.24).

4.8. Määritelmä. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbf{N}$. *Sobolev-avaruus* $H^{k,p}(\Omega)$ on joukon $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ sulkeuma $W^{k,p}(\Omega)$:ssa, ts. $u \in H^{k,p}(\Omega)$ jos ja vain jos $u \in L^p(\Omega)$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ kaikilla $\alpha : |\alpha| \le k$ ja on olemassa jono $\varphi_j \in C^\infty(\Omega)$, jolle

$$\|u - \varphi_j\|_{k,p} \to 0\,, \text{ kun } j \to \infty\,.$$

4.9. Huomautus.

- $(H^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ on Banach-avaruus.
- $u \in H^{k,p}(\Omega)$ jos ja vain jos $u \in L^p(\Omega)$ ja on olemassa funktiot $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ kaikilla $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \le k$, ja $\varphi_j \in C^\infty(\Omega)$ s.e.

  $$\varphi_j \to u \quad L^p(\Omega) : \text{ssa}$$

  ja

  $$D^\alpha \varphi_j \to v_\alpha\, L^p(\Omega) \text{ kaikilla } \alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| \le k\,.$$

  Tällöin $v_\alpha =: D^\alpha u$. (Lause 3.7.)

4.10. Huomautus. Jatkossa joskus merkitään vastaavasti $H_0^{k,p}(\Omega) := W_0^{k,p}(\Omega)$.

4.11. Huomautus. Kun $p = 2$, usein kirjallisuudessa merkitään $H^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ ja $H_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$.

HAVAINTO: Inkluusio $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ tulee suoraan määritelmästä. Edelleen, $H^{k,p}(\mathbf{R}^n) = W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$.

Syy: Jos $u \in W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$, niin silotetaan $\varphi_j = \eta_{1/j} * u$, jolloin $\varphi_j \in L^p(\mathbf{R}^n)$ ja $\varphi_j \to u$ $L^p(\mathbf{R}^n)$:ssa (Lause 2.5) ja

$$D^\alpha \varphi_j = D^\alpha(\eta_{\frac{1}{j}} * u) \overset{\text{Lemma 3.4}}{=} \eta_{\frac{1}{j}} * D^\alpha u \to D^\alpha u \quad L^p(\mathbf{R}^n) : \text{ssä}.$$

Itse asiassa näin on kaikilla $\Omega \subset \mathbf{R}^n$:

$$H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)\,.$$

Eo. päättely osoittaa, että[7]

$$W^{k,p}(\Omega) \subset H^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,.$$

Yhtäsuuruuden $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$ todistamiseksi tarvitsemme ns. ”ykkösen ositusta”:

4.12. Lause. (Ykkösen ositus) *Jos $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $\mathcal{G}$ kokoelma avoimia joukkoja $U \subset \mathbf{R}^n$, joille $E \subset \bigcup_{U\in\mathcal{G}} U$. Tällöin on olemassa sellainen kokoelma $\Psi \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, että kaikilla $\psi \in \Psi$: $0 \le \psi(x) \le 1$ kaikilla $x \in$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ja*

i) kaikilla $\psi \in \Psi$ on olemassa $U \in \mathcal{G}$ s.e. $\operatorname{spt}\psi \subset U$, ts. $\psi \in C_0^\infty(U)$

ii) jos $K \subset E$ kompakti, niin

$$\#\{\psi \in \Psi : \operatorname{spt}\psi \cap K \neq \emptyset\} < \infty$$

iii)

$$\sum_{\psi\in\Psi} \psi(x) = 1 \qquad \textit{kaikilla } x \in E\,.$$

(Kokoelma Ψ on joukon E peitteeseen $\mathcal{G}$ liittyvä ykkösen ositus.)

TODISTUS: **A.** *E kompakti*: Tällöin on olemassa $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathcal{G}$ s.e. $E \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ ja on olemassa kompaktit $E_j \subset U_j$ s.e.

$$E = \bigcup_{j=1}^{k} E_k\,.$$

(Esimerkiksi $E_j = \{x \in E : \operatorname{dist}(x, \complement U_j) \ge c$ pienellä $c\}$.) Olkoon $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$, $0 \le \varphi_j \le 1$, $\varphi_j = 1$ E_j:ssä (Seuraus 2.21) ja olkoon

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j\,.$$

7

$$H^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{v \in H^{k,p}(D) : D \subset\subset \Omega\}\,.$$

Tällöin

$$\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ ja } E \subset \underbrace{\{x : \varphi(x) \geq 1\}}_{\text{on kompakti}} .$$

Merkitään

$$\widetilde{E} := \{x : \varphi(x) \geq 1\} \subset \{x : \varphi(x) > \frac{1}{2}\} =: V ,$$

jolloin V on avoin. Valitaan $h \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ s.e. $h(x) > 0$ kaikilla x ja $h(x) = \varphi(x)$ kaikilla $x \in E$.

(Tällainen h on olemassa: olkoon $g \in C_0^\infty(V)$, $0 \leq g \leq 1$ s.e. $g = 1$ $\widetilde{E}$:ssa, jolloin esimerkiksi $h = 1 + \varphi - g$ käy.)

Määritellään

$$\Psi = \{\frac{\varphi_j}{h} : j = 1, 2, \ldots, k\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n) .$$

Ehdot (i) ja (ii) ok tälle perheelle Ψ.. Jos $x \in E$,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi_j(x)}{h(x)} = \frac{1}{h(x)} \underbrace{\sum \varphi_j(x)}_{=\varphi(x)} = 1 ,$$

joten (iii) on ok; tämä on siis etsitty perhe.

B. *E avoin:* Valitaan

$$E_i := \overline{B}(0, i) \cap \{x \in E : \operatorname{dist}(x, \complement E) \geq \frac{1}{i}\} , i = 1, 2, \ldots$$

Tällöin joukot E_i ovat kompakteja ja

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E .$$

Merkitään $E_0 := \emptyset =: E_{-1}$. Kun

$$\mathcal{U}_j := \{U \cap (\operatorname{int} E_{j+1}) \backslash E_{j-2} : U \in G\} , \quad j = 1, 2, \ldots ,$$

on $\mathcal{U}_j$ $\underbrace{E_j \backslash \operatorname{int} E_{j-1}}_{\text{kompakti}}$:n avoin peite.

Kohdan A nojalla jokaisella j on olemassa sellainen $\Psi_j \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, että $\#\Psi_j < \infty$ ja Ψ_j on $E_j \setminus \mathrm{int} E_{j-1}$:n peitteeseen $\mathcal{U}_j$ liittyvä ykkösen ositus. Olkoon nyt[8]

$$s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\psi \in \Psi_j} \psi(x)$$

Tällöin $s(x) > 0$ kaikilla $x \in E$ ja $s \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Määritellään

$$\Psi = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{\psi \in \Psi_j} \left\{ f : \text{ missä } f(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x)}{s(x)}, & \text{jos } x \in E, \\ f(x) = 0, & \text{jos } x \notin E \end{cases} \right\}.$$

Tällöin $\Psi \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ on etsitty funktioperhe.

C. *E mielivaltainen:* Tällöin

$$G = \bigcup_{U \in \mathcal{G}} U$$

on avoin joukko ja sen peitteeseen $\mathcal{G}$ liittyvä ykkösen ositus on myös joukon $E \subset G$ peitteeseen $\mathcal{G}$ liittyvä ykkösen ositus. $\square$

4.13. Lause. ($H = W$, sileillä approksimointi) *Kun $1 \leq p < \infty$, niin $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$, ts. jokaisella $u \in W^{k,p}(\Omega)$ on olemassa jono $\varphi_j \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ s.e.*

$$\varphi_j \to u \quad L^p(\Omega)\text{:ssa}$$

ja

$$D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha u \quad L^p(\Omega)\text{:ssa kaikilla } \alpha : |\alpha| \leq k\,.$$

TODISTUS: Valitaan $\emptyset = \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega$ s.e.

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j\,.$$

Olkoon Ψ Ω:n peitteeseen $\{\Omega_{j+1} \setminus \overline{\Omega}_{j-1} : j = 1, 2, \ldots\}$ liittyvä ykkösen ositus. Olkoon

$$\Psi_j = \{\psi \in \Psi : \mathrm{spt}\, \psi \subset \Omega_{j+1} \setminus \overline{\Omega}_{j-1}\}$$

[8]Huomaa, että summassa vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä kerrallaan annetulla kompaktilla joukolla.

Tällöin $\#\Psi_j < \infty$ ja $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_{j+1} \backslash \overline{\Omega}_{j-1})$, missä

$$\psi_j = \sum_{\psi \in \Psi_j} \psi \,.$$

Lisäksi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\psi \in \Psi_j} \psi(x) = \sum_{\psi \in \Psi} \psi(x) = 1 \text{ kaikilla } x \in \Omega \,.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_{j+1} \backslash \overline{\Omega}_{j-1}, \complement(\Omega_{j+2} \backslash \overline{\Omega}_{j-2})))$.

Nyt

$$\underbrace{\eta_\varepsilon * (\psi_j u)}_{\in C_0^\infty(\Omega_{j+2} \backslash \overline{\Omega}_{j-2})} \overset{\varepsilon \to 0}{\to} \psi_j u \quad L^p(\Omega)\text{:ssa} \,.$$

Edelleen

$$D^\alpha(\eta_\varepsilon * (\psi_j u)) \overset{\Omega\text{:ssa}}{=} \eta_\varepsilon * D^\alpha(\psi_j u) \to D^\alpha(\psi_j u)$$

$L^p(\Omega)$:ssa kaikilla α, joille $|\alpha| \leq k$. Olkoon $\delta > 0$. On olemassa $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_{j+2} \backslash \overline{\Omega}_{j-2})$ s.e.

$$\|\psi_j u - \psi_j\|_{k,p} < \frac{\delta}{2^j} \,.$$

Olkoon $\varphi = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j \in C^\infty(\Omega)$ ja

$$\begin{aligned}
\|\varphi - u\|_{k,p} &= \| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j - \big(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \big) u \|_{k,p} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\|\varphi_j - \psi_j u\|_{k,p}}_{< \frac{\delta}{2^j}} < \delta \,.
\end{aligned}$$

□

4.14. Huomautus.

- Lauseessa 4.13 ei väitetä, että funktiota $u \in W^{k,p}(\Omega)$ voitaisiin approksimoida funktioilla $\varphi_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Tällaista approksimointia ei voida saavuttaa kuin poikkeustapauksissa. (HT)
- Yleensä $W_0^{k,p}(\Omega) \neq W^{k,p}(\Omega)$, mutta jos $\Omega = \mathbf{R}^n$ avaruudet ovat samat:

4.15. Lause. *Jos $1 \le p < \infty$, niin $W^{k,p}(\mathbf{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbf{R}^n)$.*

Todistus: Todistetaan yksinkertaisuuden vuoksi vain tapaus $k = 1$.

Olkoon $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ ja $\varepsilon > 0$. Pitää löytää $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ s.e. $\|u - \varphi\|_{1,p} < \varepsilon$. Koska $W_0^{1,p}(\Omega)$ on Banach, riittää löytää $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ s.e. $\|v - u\|_{1,p} < \varepsilon$.

Valitaan $r > 0$ s.e.

$$\Big(\int\limits_{\complement B(0,r)} |u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \sum_{j=1}^n \Big(\int\limits_{\complement B(0,r)} |D_j u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{n+1}\,.$$

Valitaan (cut-off) $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ s.e. $0 \le \psi \le 1$, $\psi|_{B(0,r)} \equiv 1$ ja $|\nabla\psi(x)| \le 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$. Tällöin $v = u\psi \in W_0^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ (ks. Harj.)

Lasketaan: koska $\psi = 1$ pallossa $B(0,r)$

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_{1,p} &= \|\underbrace{u - v}_{=(1-\psi)u}\|_p + \sum_{j=1}^n \underbrace{\|D_j u - D_j v\|_p}_{=D_j(1-\psi)u=(1-\psi)D_j u - uD_j\psi} \\
&= \Big(\int\limits_{\complement B(0,r)} |\underbrace{(1-\psi)}_{\le 1}u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \sum_{j=1}^n \Big(\int\limits_{\complement B(0,r)} |\underbrace{(1-\psi)}_{\le 1}D_j u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \Big(\int\limits_{\complement B(0,r)} |uD_j\psi|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le (n+1)\Big(\int\limits_{\complement B(0,r)} |u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \sum_{j=1}^n \Big(\int\limits_{\complement B(0,r)} |D_j u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le (n+1)\frac{\varepsilon}{n+1} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

$\square$

5. Perusepäyhtälöt

5.1. Sobolevin epäyhtälöt

5.1. Lause. (Sobolevin epäyhtälö, kun $p = k = 1$) *Olkoon* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *avoin,* $n \geq 2$. *Tällöin on olemassa vakio* $c = c(n) > 0$ *s.e.*

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq c\|\nabla u\|_1 \quad \textit{kaikilla } u \in C_0^1(\Omega)\,.$$

Huomaa, että $\frac{n}{n-1} > 1$.

5.2. Määritelmä. Olkoon $1 \leq p < n$. Tällöin p:n *Sobolev-konjugaatti* on luku

$$p^* = \frac{np}{n-p}\,.$$

Huomaa:

$$p^* = \frac{np}{n-p} \geq \frac{n}{n-1}p > p \quad \text{ja} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{sekä} \quad (\frac{pn}{n+p})^* = p\,.$$

5.3. Lause. (Sobolevin epäyhtälö/ Sobolevin upotuslause) *Kun* $1 < p < n$, *niin on olemassa vakio* $c = c(n,p) > 0$ *s.e.*

$$\|u\|_{p^*} \leq c\|\nabla u\|_p \quad \textit{kaikilla } u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,,$$

missä $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *on avoin.*

Lauseen 5.1 todistus: Voidaan olettaa, että $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Koska $\operatorname{spt} u \subset \Omega$ on kompakti, voidaan olettaa, että $\Omega = \mathbf{R}^n$. Nyt

$$\begin{aligned}|u(x)| &= |\int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)dt| \\ &\leq \int_{-\infty}^{x_i} |\nabla u(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)|dt\end{aligned}$$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$, joten

$$|u(x)|^n \leq \Big(\int_{-\infty}^{x_1} |\nabla u| \, dy_1 \Big) \Big(\int_{-\infty}^{x_2} |\nabla u| \, dy_2 \Big) \ldots \Big(\int_{-\infty}^{x_n} |\nabla u| \, dy_n \Big).$$

Nyt integroimalla ja käyttämällä yleistettyä Hölderin epäyhtälöä eksponeneteilla $n-1$ saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \, dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \big(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_i \big)^{\frac{1}{n-1}} \, dx_1 \\
&= \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_1 \Big)^{\frac{n}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \big(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_i \big)^{\frac{1}{n-1}} \, dx_1 \\
&\leq \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_1 \Big)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_i \, dx_1 \Big)^{\frac{1}{n-1}} .
\end{aligned}$$

Toistamalla tämä $n-1$ kertaa

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\\
&\le \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1\text{ kpl}}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dy_i\,dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]dx_2\ldots dx_n\\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-2\text{ kpl}}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dy_2\,dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\quad\times\right.\\
&\quad\left.\times\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dy_i\,dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_2}_{\le\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_2\,dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}}\right]dx_3\ldots dx_n\\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1\,dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1\,dx_2\right)^{\frac{2}{n-1}}dx_3\ldots dx_n\\
&\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1\ldots dx_n\right)^{\frac{n}{n-1}} = \left(\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|\,dx\right)^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Siispä saatiin haluttu epäyhtälö

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \le \|\nabla u\|_1 .$$

5.4. Huomautus. Hieman huolellisemmalla arvioinnilla saisimme Lauseen 5.1 epäyhtälöön hieman paremman vakion[9]

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla u\|_1 .$$

Lauseen 5.3 vakio sen sijaan riippuu p:sta. (Ei ole totta, että voitaisiin antaa $p\to n$ ja saada epäyhtälö

$$\|u\|_\infty \overset{\text{ei tosi}}{\le} c\|\nabla u\|_n ,$$

[9]Ks. esim Gilbarg & Trudinger, Theorem 7.10.

sillä on olemassa $u \in W_0^{1,n}(B) \setminus L^\infty(B)$ (HT).)

5.5. Huomautus. Lauseen 5.3 nojalla $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^{p^*}_{\text{loc}}(\Omega)$, kun $p < n$ (ja lisäksi upotus on jatkuva).

LAUSEEN 5.3 TODISTUS: Riittää osoittaa epäyhtälö, kun $u \in C_0^1(\Omega)$. (Jos $\varphi_j \to u W^{1,p}(\Omega)$:n $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, niin sovelletaan epäyhtälöä funktioihin $\varphi_j - \varphi_k$, jolloin siis

$$\|\varphi_j - \varphi_k\|_{p^*} \le c\|\nabla(\varphi_j - \varphi_k)\| = c\|\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_k\|.$$

Siis φ_j on Cauchy-jono, joten se suppenee $L^{p^*}(\Omega)$:ssa. Niinpä $u \in L^{p^*}$ ja $\varphi_j \to u L^{p*}(\Omega)$:ssa ja siten

$$\|u\|_{p^*} = \lim \|\varphi_j\|_{p^*} \le \lim c\|\nabla\varphi_j\|_p = \|\nabla u\|_p\,.)$$

Väite $C_0^1(\Omega)$:n funktioille, kun $p = 1$, todistettiin edellisessä lauseessa, joten voidaan olettaa, että $1 < p < n$.

Olkoon $u \in C_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, ja $\gamma > 0$. Olkoon $v(x) = |u(x)|^\gamma \in W_0^{1,1}(\mathbf{R}^n)$ (voidaan olettaa, että $\Omega = \mathbf{R}^n$). Sobolev epäyhtälö, kun $p = 1$ antaa

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} \le \|\nabla v\|_1\,.$$

Siis

$$\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^{\gamma\frac{n}{n-1}}\,dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \le \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla |u|^\gamma|\,dx = \gamma \int_{\mathbf{R}^n} \underbrace{|u|^{\gamma-1}}_{\frac{p}{p-1}}\underbrace{|\nabla u|}_{p}\,dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \gamma\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}\,dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}}_{=\|\nabla u\|_p}.$$

Valitaan γ siten, että $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$, jolloin $\frac{(\gamma-1)p}{p-1} = p^*$, ja siis edellinen epäyhtälö saa muodon

$$\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^{p^*}\,dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \le \frac{p(n-1)}{n-p}\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^{p^*}\,dx\Big)^{\frac{p-1}{p} = 1-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p\,.$$

Siis

$$\Big(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^{p^*}\,dx\Big)^{\overbrace{1-\frac{1}{n}-(1-\frac{1}{p})}^{=\frac{1}{p^*}}} \le \frac{p(n-1)}{n-p}\|\nabla u\|_p\,.$$

$\square$

5.6. Seuraus. *Kun $1 \le p < n$, niin $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ ja "upotus on jatkuva". Erityisesti $W^{1,p}(\mathbf{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbf{R}^n)$.*

Funktioiden $C_0^1(\Omega)$:n sulkeuma gradientin L^p-normin suhteen antaa avaruuden uppoaa $L^{p^*}(\Omega)$:n aliavaruudeksi.

5.7. Seuraus. *Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $|\Omega| < \infty$ ja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tällöin*

$$\left(\fint_\Omega |u|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \le c|\Omega|^{\frac{1}{n}} \left(\fint_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

missä

$$\begin{cases} 1 \le q \le \frac{np}{n-p} = p^*, & \text{jos } 1 \le p < n \\ 1 \le q < \infty, & \text{jos } p \ge n \end{cases}$$

ja $c = c(n, p, q.) > 0$.

Todistus: Helppo, ks. demot. $\square$

5.8. Seuraus. *Jos Ω on rajoitettu ja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, niin*

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \le c \operatorname{diam}(\Omega)^p \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \,,$$

missä $c = c(n, p) > 0$.

Todistus: Olkoon $x_0 \in \Omega$ ja $r = \operatorname{diam}(\Omega)$. Tällöin $\Omega \subset B(x_0, r)$, joten soveltamalla Seurausta 5.7 kun $\Omega \to B(x_0, r)$ ja $q = p$, saadaan

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^p \, dx &\overset{u\text{:n nollajako}}{=} \int_{B(x_0,r)} |u|^p \, dx \le c \underbrace{|B(x_0, r)|^{\frac{p}{n}}}_{\sim r^{n\frac{p}{n}}} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p \, dx \\ &\overset{u\text{:n nollajako}}{=} c \operatorname{diam}(\Omega)^p \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \,. \end{aligned}$$

$\square$

5.9. Seuraus. *Jos* $|\Omega| < \infty$ *ja* $p \geq n$*, niin* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *kaikilla* $q \in [1, \infty[$.

5.10. Lause. (Sobolevin epäyhtälö korkeammille kertaluvuille) *Olkoon* $k \in \mathbf{N}$ *ja* $1 \leq pk < n$. *Jos* $u \subset W_0^{k,p}(\Omega)$*, niin* $u \in L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega)$ *ja*

$$\|u\|_{\frac{np}{n-kp}} \leq c \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p \,,$$

missä $c = c(n, p, k) > 0$.

Todistus: Sovelletaan Sobolevin epäyhtälöä k kertaa. Voidaan olettaa, että $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Nyt

$$\|u\|_{q^*} \leq c\|\nabla u\|_q \,, \text{ missä } q = \frac{np}{n-(k-1)p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} = \frac{np}{n-(k-1)p} - \frac{p}{np} = \frac{n-kp}{np} \,,$$

eli $q^* = \frac{np}{n-kp}$ Siis

$$\|u\|_{\frac{np}{n-kp}} \leq c \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{\frac{np}{n-(k-1)p}} \leq c \sum_{|\beta|=2} \|D^\beta u\|_{\frac{np}{n-(k-2)p}} \leq \dots$$

Sovelletaan Sobolev epäyhtälöä funktioon $D^\alpha u$ ja eksponenttiin $\frac{np}{n-(k-2)p}$; jotta niin voidaan tehdä, pitää olla

$$\frac{np}{n-(k-2)p} < n \,.$$

Näin on, kun $(k-1)p < n$, joten saamme edelleen

$$\|u\|_{\frac{np}{n-kp}} \leq \dots \leq c \sum_{|\gamma|=k} \|D^\gamma u\|_{\frac{np}{n-(k-k)p}} = c \sum_{|\gamma|=k} \|D^\gamma u\|_p \,.$$

$\square$

5.2. Poincaré-epäyhtälöt

Aloitamme lemmalla:

5.1. Lemma. *Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $B(x_0, r) \subset \mathbf{R}^n$ pallo. Tällöin on olemassa vakio $c = c(n,p) > 0$, jolle*

$$\int_{B(x_0,r)} |u(x) - u(y)|^p \, dy \leq c r^{n+p-1} \int_{B(x_0,r)} \frac{|\nabla u|^p}{|x-y|^{n-1}} \, dy$$

kaikilla $x \in B(x_0, r)$ ja $u \in C^1(B(x_0, r))$.

Todistus: Merkitään $B = B(x_0, r)$. Jos $x, y \in B$, niin

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \Big| \int_0^1 \nabla u(x + t(y-x)) \cdot (y-x) dt \Big| \\ &\leq \int_0^1 |\nabla u(x + t(y-x))| |y - x| dt \, . \end{aligned}$$

Integroimalla epäyhtälöön molemmat puolet yli pallon saadaan Hölderin epäyhtälöstä

$$\begin{aligned} \int_B |u(x) - u(y)|^p \, dy &\leq \int_B \int_0^1 |\nabla u(x + t(y-x))|^p |y - x|^p dt \, dy \\ &= \int_0^1 \int_B |\nabla u(\underbrace{x + t(y-x)}_{=:z})|^p |y - x|^p \, dy dt \end{aligned}$$

Muuttujanvaihdolla $z := x + t(y-x)$, $J_z = t^{-n}$, $z_0 := x + t(x_0 - x) = tx_0 + (1-t)x$, $|x - y| = \frac{1}{t}|z - x|$, joten

$$\int_B |u(x) - u(y)|^p \, dy = \int_0^1 \int_{B(z_0, t_r)} |\nabla u(z)|^p t^{-(n+p)} |z - x|^p dz dt$$

Huomaa, että $B(z_0, t_r) \subset B(x, 2r)$, sillä jos $w \in B(z_0, tr)$, niin

$$|w - x| \leq |w - z_0| + |z_0 - x| \leq tr + t|x - x_0| < 2rt \, .$$

$$\int\limits_B |u(x)-u(y)|^p\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_{\substack{B\cap B(x,2rt)\\ \Rightarrow |z-x|\le 2rt\\ \Rightarrow t\ge \frac{|z-x|}{2r}}} |\nabla u(z)|^p t^{-(n+p)} \underbrace{|z-x|^p}_{\le 2rt} dz dt$$

$$\le (2r)^p \int\limits_{B\cap B(x,r2t)} |\nabla u(z)|^p \underbrace{\int\limits_{\frac{|z-x|}{2r}} t^{-n} dt dz}_{=\frac{1}{n-1}(\underbrace{\frac{|z-x|^{1-n}}{(2r^{1-n})}-1)}_{\le \frac{|z-x|^{1-n}}{(2r)^{1-n}}}}$$

$$\le cr^{p-1+n} \int\limits_B |\nabla u(z)|^p |z-x|^{1-n} dz\,.$$

□

5.11. Lause. (Poincarén epäyhtälö pallossa) *Olkoon* $1 \le p < \infty$ *ja* $B = B(x_0, r)$. *Tällöin on olemassa vakio* $c = c(n,p) > 0$ *s.e.*

$$\int\limits_B |u-u_B|^p\,dx \le cr^p \int\limits_B |\nabla u|^p\,dx$$

kaikilla $u \in W^{1,p}(B)$; *tässä*

$$u_B := \fint_B u\,dx\,.$$

Todistus: Voidaan olettaa, että (miksi?) $u \in C^1(B)$. Lasketaan:

$$
\begin{aligned}
&\fint_B |u^* - u_B|^p = \fint_B |\underbrace{u(x)}_{=\fint_B u(x)\,dy} - \fint_B u(y)\,dy|^p\,dx \\
&= \fint_B |\fint_B u(x) - u(y)\,dy|^p\,dx \\
&\overset{\text{Jensen}}{\leq} \fint_B \fint_B |u(x) - u(y)|^p\,dy\,dx \\
&\overset{L.5.1}{\leq} cr^{p-1} \fint_B \int\limits_B \frac{|\nabla u(y)|^p}{|x-y|^{n-1}}\,dy\,dx \\
&= cr^{p-1} \fint_B |\nabla u(y)|^p \underbrace{\frac{1}{r} \int\limits_B \frac{1}{|x-y|^{n-1}}\,dx}_{\leq \frac{1}{r}\int_{B(y,2r)} |x-y|^{1-n}\,dx = \frac{c}{r}\int_0^{2r} t^{1-n} t^{n-1} dt = \frac{c2r}{r} = \tilde{c}(n)} dy \\
&\leq c_2 r^p \fint_B |\nabla u(y)|^p\,dy\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

5.12. Huomautus. Ei pidä luulla, että Poincarén epäyhtälössä pallon voisi korvata mielivaltaisella rajoitetulla joukolla Ω.

5.13. Lause. (Sobolev-Poincaré -epäyhtälö) *Olkoon* $1 \leq p < n$. *On olemassa vakio* $c = c(n,p) > 0$ *s.e.*

$$
\left(\fint_{B_r} |u - u_B|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq cr \left(\fint_{B_r} |\nabla u|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}
$$

kaikilla palloilla $B_r = B(x_0, r)$ *ja kaikilla* $u \in W^{1,p}(B_r)$.

Todistus: Todistetaan ensin apuväite:

5.2. Lemma. *On olemassa* $c = c(n,p) > 0$*:*

$$
\left(\fint_{B_r} |v|^{p^*}\,dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c \left(r^p \fint_{B_r} |\nabla v|^p\,dx + \fint_{B_r} |v|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}
$$

kaikilla $v \in W^{1,p}(B_r)$.

Lemman todistus: Voidaan olettaa, että $x_0 = 0$. Skaalaamalla ($v(y)$ korvataan funktiolla $\frac{1}{r}v(ry)$) voidaan olettaa, että $r = 1$. Myöhemmin todistamme, että on olemassa sellainen $w \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, jolle

$$w|_{B_1} = v \quad \text{ja} \quad \|w\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} \le c\|v\|_{W^{1,p}(B_1)}\,,$$

missä $c = c(n,p) > 0$. Siis

$$\begin{aligned}\Big(\int\limits_{B_1} |v|^{p^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} &= \Big(\int\limits_{B_1} |w|^{p^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} \le \Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |w|^{p^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\overset{\text{Sob.ey}}{\le} c\Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla w|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{c}\|w\|_{1,p} \le c\Big(\int\limits_{B_1} |\nabla v|^p\,dx + \int\limits_{B_1} |v|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

(HT: $a_j \ge 0$ ja $p > 0$ $(\sum_{j=1}^k a_j)^p \le k^p \sum_{j=1}^k a_j^p$.) $\not\square$

Varsinaisen väitteen todistus:
Sovelletaan Lemmaa funktioon $v = u - u_{B_r} \in W^{1,p}(B_r)$, siis

$$\begin{aligned}\Big(\fint_{B_r} |u - u_{B_r}|^{p^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} &= \Big(\fint_{B_r} |v|^{p^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\le c\Big(r^p \fint_{B_r} \underbrace{|\nabla v|^p}_{=|\nabla u|^p}\,dx + \underbrace{\fint_{B_r} \underbrace{|v|^p}_{=|u-u_{B_r}|^p}\,dx}_{\underset{\text{Poincaré}}{\le} cr^p \fint_{B_r} |\nabla u|^p}\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\le c\Big(r^p \fint_{B_r} |\nabla u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

$\square$

Tapaus $p = n$ ("konformi-invariantti tapaus")

Ei ole totta, että $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. [Esim. $\log((-\log(|x|))_+)$] Kuitenkin jokainen $u \in W^{1,n}(\mathbf{R}^n)$ on BMO-funktio: (rajoitettu keskiheilahtelu, Bounded Mean Oscillation).

5.14. Määritelmä. $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ on BMO-funktio, jos on olemassa $c > 0$ s.e.

$$\fint_B |f - f_B|\,dx \le c \quad \text{kaikilla palloilla } B \subset \mathbf{R}^n\,.$$

5.15. Lause. *Jos $u \in W^{1,n}(\mathbf{R}^n)$, niin $u \in BMO$.*

TODISTUS: Olkoon $B \subset \mathbf{R}^n$ pallo.

$$
\begin{aligned}
&\fint_B |u - u_B|\,dx \overset{\text{Jensen}}{\leq} \left(\fint_B |u-u_B|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\overset{\text{Poincaré}}{\leq} c|B|^{\frac{1}{n}}\left(\fint_B |\nabla u|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = c\frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|B|^{\frac{1}{n}}}\left(\int_B |\nabla u|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq c\|u\|_{1,n}\,.
\end{aligned}
$$

□

5.16. Lause. (Trudingerin epäyhtälö) *Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ rajoitettu. Tällöin on olemassa vakiot $c_1 = c_1(n), c_2 = c_2(n)$ s.e.*

$$
\fint_\Omega \exp\left(\left(\frac{|u|}{c_1\|\nabla u\|_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)dx \leq c_2
$$

kaikilla $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. ($n \geq 2$)

TODISTUS: (Idea) Voidaan olettaa, että $\|\nabla u\|_n = 1$.

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \exp\left(\frac{|u|^{\frac{n}{n-1}}}{A}\right)dx = \int_\Omega \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{|u|^{\frac{n}{n-1}}}{A}\right)^k dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega \frac{|u|^{\frac{kn}{n-1}}}{k!A^k}\,dx \overset{\text{Sob.ey+Jensen}}{\leq} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!A^k} c_k \underbrace{\|\nabla u\|_n^{\frac{kn}{n-1}}}_{=1} |\Omega|
\end{aligned}
$$

Käytetään Rieszin potentiaalia ja osoitetaan, että c_k voidaan valita s.e. sarja suppenee. □

5.17. Lause. (Morreyn epäyhtälö) *Olkoon $1 < n < p < \infty$ ja $B_r = B(x_0, r)$ pallo. Tällöin on olemassa vakio $c = c(n,p) > 0$ s.e.*

$$
|u(x) - u(y)| \leq cr\left(\fint_{B_r} |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}
$$

m.k. $x, y \in B_r$ ja kaikilla $u \in W^{1,p}(B_r)$.

Todistus: Approksimoimalla voidaan olettaa, että $u \in C^1(B_r)$. Olkoon $x, y \in B_r$;

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq \fint_{B_r} |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)| dz \\
&\overset{\text{L.5.1}}{\leq} c \int_{B_r} |\nabla u(z)| (|x - z|^{1-n} + |y - z|^{1-n}) dz \\
&\overset{\text{Hölder+aiempi HT}}{\leq} c \Big(\int_{B_r} |\nabla u|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{B_r} (|x - z|^{\frac{p(1-n)}{p-1}} + |y - z|^{\frac{p(1-n)}{p-1}}) dz \Big)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

Koska

$$\int_{B_r} (|x - z|^{\frac{p(1-n)}{p-1}} \leq \int_{B(x,2r)} |x - z|^{\frac{p}{p-1}(1-n)} dz = c \int_0^{2r} t^{\frac{p}{p-1}(1-n)+n} \frac{dt}{t} = \tilde{c}(2r)^{\frac{p}{p-1}(1-n)+n}$$

ja

$$|y - z|^{\frac{p(1-n)}{p-1}} \leq \int_{B(y,2r)} |y - z|^{\frac{p}{p-1}(1-n)} dz = \tilde{c}(2r)^{\frac{p}{p-1}(1-n)},$$

niin

$$|u(x) - u(y)| \leq c r^{1-n+\frac{n(p-1)}{p}} \Big(\int_{B_r} |\nabla u|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} = c r^{1-\frac{n}{p}} \Big(\int_{B_r} |\nabla u|^p dz \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

□

5.18. Seuraus. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, $n < p < \infty$. Tällöin on olemassa jatkuva funktio v, jolle $v(x) = u(x)$ m.k. $x \in \mathbf{R}^n$. Tarkemmin: v on Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, ts. on olemassa vakio $c = c(n,p) > 0$, jolle*

$$|v(x) - v(y)| \leq c|x - y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla v\|_p \quad \textit{kaikilla } x, y \in \mathbf{R}^n. \tag{5.3}$$

Todistus: Riittää todistaa (5.3), kun $v \in C^1(\mathbf{R}^n)$ (mieti!). Valitaan $r = |x - y|$. Sovelletaan Morreyn epäyhtälöä pallossa $B(x_0, r)$, missä $x_0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ ja saadaan

$$\begin{aligned}
|v(x) - v(y)| &\leq c r \Big(\fint_{B(x_0,r)} |\nabla v|^p dz \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= c r^{1-\frac{n}{p}} \Big(\int_{B_r} |\nabla v|^p dz \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c|x - y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla v\|_p .
\end{aligned}$$

□

5.19. Seuraus. *Olkoon $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $n < p \leq \infty$. Tällöin on olemassa jatkuva $v : \Omega \to \mathbf{R}$ s.e. $v = u$ m.k. ja v on lokaalisti Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, (kun $p = \infty$, v on Lipschitz) ts. jokaisella $D \subset\subset \Omega$ on vakio M s.e.*

$$|v(x) - v(y)| \leq M|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \quad \textit{kaikilla } x, y \in D\,.$$

TODISTUS: HT, käytä cut-off -funktioita. Tapaus $n = 1$ on todistettu demoissa. □

Seuraavaksi osoitetaan, että $W^{1,p}$-funktiot ovat differentiotuvia m.k. kun $p > n$.

5.20. Määritelmä. Funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ on *differentioituva* pistessä $x_0 \in \mathbf{R}^n$, jos on olemassa lineaarikuvaus $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ s.e.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0\,.$$

Jos tällainen lineaarikuvaus L on olemassa, niin sitä merkitään $f'(x_0) = L$ ($= f$:n derivaatta pisteessä x_0).

Tarvitsemme seuraavan reaalianalyysin perustuloksen:

5.21. Lause. (Lebesguen differentioituvuuslause) *Olkoon $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$. Tällöin m.k. $x_0 \in \mathbf{R}^n$*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|^p \, dx = 0\,.$$

TODISTUS: Ks. reaalianalyysi. □

5.22. Lause. *Olkoon $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $p > n$. Tällöin u on differentioituva m.k. Ω:ssa (tarkkaan ottaen u:n jatkuva edustaja on differentioituva m.k.) ja u:n derivaatta on u:n heikko gradientti m.k.*

TODISTUS: $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}} \subset W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, joten voidaan olettaa, että $p < \infty$. Lisäksi voidaan olettaa, että $u \in C(\Omega)$. Lebesguen differentioituvuuslauseen nojalla m.k. $x \in \mathbf{R}^n$ pätee

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |\nabla u(y) - \nabla u(x)|^p \, dy = 0\,. \tag{5.4}$$

Valitaan $x \in \mathbf{R}^n$, jolle (5.4) pätee ja näytetään, että u on tässä pisteessä x differentioituva ja että $u'(x) = \nabla u(x)$.

Olkoon $g(y) := u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x)$. Tällöin

$$g \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n) \cap C(\mathbf{R}^2) \quad \text{ja} \quad \nabla g(y) = \nabla u(y) - \nabla u(x)\,.$$

Sovelletaan Morreyn epäyhtälöä funktioon g:

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &\leq cr\biggl(\fint_{B(x,r)} |\nabla g|^p dz\biggr)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{r=|x-y|}{=} c|x-y|\biggl(\fint_{B(x,r)} |\nabla u(z) - \nabla u(x)|^p dz\biggr)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} \frac{|u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (x - y)|}{|x - y|} &= \frac{|g(y) - \overbrace{g(x)}^{=0}|}{|x - y|} \\ &\leq c\biggl(\fint_{B(x,r)} |\nabla u(z) - \nabla u(x)|^p dz\biggr)^{\frac{1}{p}} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

Siis u on differentioituva pisteessä x ja $u'(x) = \nabla u(x)$. □

5.23. Seuraus. (Rademacher) *Lokaalisti Lipschitz-funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ on m.k. differentioituva.*

Todistus: Lokaalisti Lipschitz-funktio $f \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. ja *ACL*-funktioilla on m.k. osittaisderivaatat, joten väite seuraa edellisestä lauseesta 5.22. □

5.24. Lause. (Dirichletin kasvulause) *Olkoon $1 \leq p \leq n$. Oletetaan, että $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, jolle on olemassa $M < \infty$ ja $0 < \alpha \leq 1$ s.e.*

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p \, dx \leq M^p r^{n-p+\alpha p}$$

aina kun $x_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ s.e. $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Tällöin on olemassa sellainen $v \in C(\Omega)$, jolle $v = u$ m.k. ja

$$|v(x) - v(y)| \leq \frac{c}{r} M |x - y|^\alpha$$

kaikilla $x, y \in \Omega$, joille $B(x, 3|x - y|) \subset \Omega$; vakio $c = c(n, p) > 0$.

Todistus: Voidaan olettaa, että $u \in C^1(\Omega)$ (Miksi?)

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|\, dx \overset{\text{Jensen}}{\leq} |B(x_0,r)|^{1-\frac{1}{p}} \left(⨍_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq c_{n,p} r^{n-\frac{n}{p}} (M r^{\frac{n}{p}+\alpha-1}) = c_{n,p} M r^{n-1+\alpha}$$

aina, kun $B(x_0, 2r) \subset \Omega$.

Olkoon $x, y \in \Omega$ s.e. $B(x, 3|x-y|) \subset \Omega$. Olkoon $x_0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ ja $r = \frac{1}{2}|x-y|$. Tällöin $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Siis

$$\int_{B(x_0,r)} |u(x) - u(z)| dz \overset{\text{ks. 5.1:n tod.}}{\leq} \int_0^1 \int_{B(x,2tr)} |\nabla u(z)| \underbrace{|z-x|}_{\leq 2tr} t^{-1-n} dz dt$$
$$\leq 2r \int_0^1 t^{-n} \int_{\substack{B(x,2tr) \\ B(x,4tr) \subset B(x,2|x-y|)}} |\nabla u(z)| dz dt$$
$$\leq 2r \int_0^1 t^{-n} c M (2tr)^{n-1+\alpha} dt$$
$$= 2cMr^{n+\alpha} \underbrace{\int_0^1 t^{-n+n-1+\alpha} dt}_{=\frac{1}{\alpha}} = \frac{2c}{\alpha} M 2^{-(n+\alpha)} |x-y|^{n+\alpha}.$$

Samanlainen lasku antaa

$$\int_{B(x_0,r)} |u(y) - u(z)| dz \leq \frac{2^{1-n-\alpha} c}{\alpha} M |x-y|^{n+\alpha}$$

Siis

$$|u(x) - u(y)| \leq ⨍_{B(x_0,r)} |u(x) - u(z)| dz + ⨍_{B(x_0,r)} |u(z) - u(y)| dz$$
$$\leq 2 \cdot \frac{1}{\alpha} 2^{1-n-\alpha} c M |x-y|^{n+\alpha} c \cdot \underbrace{r^{-n}}_{=2^n |x-y|^{-n}}$$
$$\leq \frac{2c}{\alpha} M |x-y|^{\alpha}.$$

□

5.25. Huomautus. Kun $p > n$, Hölder-jatkuvuusestimaatti seuraa Dirichlet'n kasvulauseesta (HT).

Esimerkki. Olkoon $u(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. $|\nabla u(x)| = \alpha |x|^{\alpha-1}$. Tällöin

$$\int\limits_{B(0,r)} |\nabla u| \, dx = \alpha \int\limits_{B(0,r)} |x|^{\alpha-1} \, dx = c \int\limits_0^r t^{n-1+\alpha-1} dt = c r^{n-1+\alpha} \,.$$

Siis Dirichlet'n kasvulauseen ehto on optimaalinen.

6. Muuttujanvaihto ja ekstensio

6.1. Muuttujanvaihto

6.1. Määritelmä. $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ on *bi-Lipschitz* (kvasi-isometria), jos on vakio $M \geq 1$ s.e.

$$\frac{1}{M}|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq M|x-y| \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbf{R}^n\,.$$

6.2. Huomautus.

(a) bi-Lipschitz on injektio

(b) bi-Lipschtitz $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ on surjektio (HT) eli siis bijektio

(c) $f^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ on myös bi-Lipschitz

(d) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ on bi-Lipschitz $\Leftrightarrow$ f on bijektio ja sekä f että f^{-1} ovat Lipschitz-funktioita

(e) esim. lineaaribijektio $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ on bi-Lipschitz. HT.

Rademacher $\Rightarrow$ bi-Lipschitz- funktio on m.k. differentioituva, ts. m.k. $x \in \mathbf{R}^n$ tavallinen derivaatta $f'(x)$ on olemassa. Määritellään

$$J_f(x) = |\det(f'(x))|$$

on f:n *Jacobi(n determinantti)* eli derivaattamatriisin determinantti.

6.3. Huomautus. Olkoon $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineaarikuvaus ja

$$\|L\| := \sup_{\substack{|h|=1 \\ h \in \mathbf{R}^n}} |Lh|$$

lineaarikuvauksen L normi.

Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ bi-Lipschitz. Tällöin $\frac{1}{M} \leq \|f'(x)\| \leq M$ kaikilla x, jossa on olemassa $f'(x)$, sillä

$$
\begin{aligned}
&|f'(x)\frac{h}{|h|}| = \frac{1}{|h|}|f'(x)h| = |f(x+h) - f(x) + \nu(|h|)|\frac{1}{|h|} \\
&\leq \big(|f(x+h) - f(x)| + \nu(|h|)\big) \cdot \frac{1}{|h|} \\
&\leq \frac{1}{|h|}\big(M|x+h-x| + \nu(|h|)\big) = \frac{1}{|h|}\big(M|h| + \nu(|h|)\big) \\
&= M + \underbrace{\frac{\nu(|h|)}{|h|}}_{\to 0}
\end{aligned}
$$

ja

$$
\frac{1}{M^n} \leq J_f(x) \leq M^n \qquad \text{kaikilla } x, \text{ joissa on olemassa } f'(x)\,.
$$

Area- kaava: *Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ injektiivinen ja Lipschitz. Tällöin*

$$
|f(E)| = \int_E J_f(x)\,dx \qquad \textit{kaikilla mitallisilla } E \subset \mathbf{R}^n\,.
$$

TODISTUS: Ks. Evans-Gariepy s. 96. □

Huomaa, että Lipschitz-funktiolle pätee erityisesti, että $|E| = 0$ täsmälleen silloin, kun $|f(E)| = 0$.

6.4. Lause. (Muuttujanvaihtokaava) *Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ bi-Lipschitz ja $u : E \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen ($E \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen). Tällöin*

$$
\int_E u \circ f(x) J_f(x)\,dx = \int_{f(E)} u(y)\,dy\,,
$$

mikäli jompikumpi integraaleista on olemassa.

TODISTUS: HT. □

Haluamme vaihtaa muuttujia Sobolev-avaruuksissa. Muistetaan C^1-funktioiden ketjusääntö: $u \in C^1(\Omega)$ ja f differentioituva pisteessä x (ja $f(x) \in \Omega$). Tällöin $v = u \circ f$ on differentioituva pisteessä x ja

$$\nabla v(x) = f'(x)^* \nabla u(f(x))\,,$$

missä A^* on matriisin A transpoosi.

6.5. Lause. (Muuttujanvaihto Sobolev-funktioille) *Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ bi-Lipschitz. Jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$, niin $v = u \circ f \in W^{1,p}(f^{-1}(\Omega))$ ja*

$$\nabla v(x) = f'(x)^* \nabla u(f(x)) \quad \textit{m.k. } x \in f^{-1}(\Omega)\,.$$

TODISTUS: Olkoon $u_j \in C^1(\Omega)$. Jos $x \in f^{-1}(\Omega)$ on sellainen, että f on differentioituva pisteessä x, niin

$$\nabla(u_j \circ f)(x) = f'(x)^* \nabla u_j(f(x))\,.$$

M.k. $x \in f^{-1}(\Omega)$ ovat tällaisia, joten *ACL*-funktio $u_j \circ f$ on differentioituva m.k. $x \in f^{-1}(\Omega)$; *ACL*-karakterisointilauseen 4.5 nojalla riittää todeta, että $u_j \circ f \in L^p(f^{-1}(\Omega))$ ja $\nabla(u_j \circ f) \in L^p(f^{-1}(\Omega))$ osoittamaan, että $u_j \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$. Tämä seuraa muuttujanvaihtokaavasta. HT.

"Osoitetaan", että jos $u_j \to u$ $W^{1,p}(\Omega)$, niin $u_j \circ f \to u \circ f$ ja

$$\nabla(u_j \circ f) \to f'(x)^* \nabla u(f(x)) \quad L^p(f^{-1}(\Omega))\text{:ssa.}$$

Osoitetaan derivaatan konvergenssi:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{f^{-1}(\Omega)} |\underbrace{\nabla(u_j \circ f)}_{=f'(x)^*\nabla u_j(f(x))} - f'(x)^* \nabla u(f(x))|^p\,dx \\
&= \int\limits_{f^{-1}(\Omega)} |f'(x)^*(\nabla u_j(f(x)) - \nabla u(f(x)))|^p\,dx \\
&\le \int\limits_{f^{-}(\Omega)} \underbrace{\|f'(x)^*\|^p}_{\|f'(x)\|^p \le M^p = M^{n+p}M^{-n} \le M^{n+p} J_f(x)} |\nabla u_j(f(x)) - \nabla u(f(x))|^p\,dx \\
&\le M^{n+p} \int\limits_{f^{-1}(\Omega)} J_g(x) |\nabla u_j(f(x)) - \nabla u(f(x))|^p\,dx \\
&\overset{\text{muuttujanvaihto}}{=} M^{n+p} \int\limits_{\Omega} |\nabla u_j(f(x)) - \nabla u(f(x))|^p\,dx \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

□

Jos $p = n$, kvasikonforminen muuttujanvaihto on ok.

6.2. Laajentaminen

Tasossa ($n = 2$) jokaisessa Jordan- alueessa Ω $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ on tiheä $W^{1,p}(\Omega)$:ssa (J.L. Lewis 1980-luku.)

Osoitetaan, ensin seuraava peruslaajennuslause:

6.6. Lause. *Olkoon $1 \le p \le \infty$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarikuvaus $E_0 : W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, jolle $E_0 u|_{\mathbf{R}^n_+} = u$ ja*

$$\|E_0 u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} \le c\|u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)} \quad \textit{kaikilla } u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)\,.$$

Tässä[10] $c = c(n,p) > 0$ *ja*

$$\mathbf{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}\,.$$

6.7. Huomautus.

(1) Erityisesti lauseen 6.6 nojalla jokainen $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)$ on jonkin funktion $v \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ rajoittuma.

(2) Lauseen lineaarikuvaus E_0 on *laajennusoperaattori* (extension operator). Se on rajoitettu eli jatkuva lineaarikuvaus.

TODISTUS: Määritellään

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} u(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{jos } x_n > 0 \\ u(x_1, x_2, \ldots, -x_n), & \text{jos } x_n < 0 \end{cases}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}^n_+$ ja

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &= \eta_\varepsilon * u(x + 2\varepsilon e_n) \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} u(y)\eta_\varepsilon(x + 2\varepsilon e_n - y)\,dy\,. \end{aligned}$$

Tällöin $v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}^n_+}) \cap W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)$ ja $v_\varepsilon \to u$ avaruudessa $W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)$.

[10] Itse asiassa todistuksessa saadaan $c = 2$.

Heijastetaan v_ε:

$$\widetilde{v_\varepsilon}(x) = \begin{cases} v_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), & \text{jos } x_n > 0 \\ v_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n), & \text{jos } x_n \leq 0\,. \end{cases}$$

Tällöin v_ε on lokaali Lipschitz, $\widetilde{v_\varepsilon} \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ ja

$$\|\widetilde{v_\varepsilon}\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} \leq 2\ |\widetilde{v_\varepsilon}\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)}\,.$$

Siis $\widetilde{v_\varepsilon}$ konvergoi $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$:ssä kohti funktiota v m.k. (Syy: $\widetilde{v_\varepsilon} = v_\varepsilon \to v$ $W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)$:ssa ja $\widetilde{v_\varepsilon} \to v$ $W^{1,p}(\mathbf{R}^n_-)$:ssa.)

Määritellään $E_0 u := v$, jolloin E_0 on etsitty lineaarikuvaus ja

$$\|E_0 u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)}\,.$$

$\square$

Esimerkki. Alueessa

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\} \setminus \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0\}$$

on $u \in W^{1,p}(\Omega)$, joka ei ole niinkään funktion $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^2)$ rajoittuma; esimerkkifunktioksi käy (vrt. *ACL*-karakterisointi)

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x, y > 0\,, \\ \min(1, y) & \text{muutoin.} \end{cases}$$

6.8. Määritelmä. Rajoitettu alue $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ on *Lipschitz-alue* ($\partial\Omega$ on Lipschitz), jos jokaisella $x_0 \in \partial\Omega$ on pieni pallo $B = B(x_0, r)$ ja bijektio $\psi : B \to D$, missä $D \subset\subset \mathbf{R}^n$, s.e.

(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbf{R}^n_+$

(ii) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbf{R}^n_+$

(iii) ψ on bi-Lipschitz eli ψ ja ψ^{-1} ovat Lipschitz-funktioita.

6.9. Huomautus. Jos $\partial\Omega$ on lokaalisti Lipschitz-funktion graafi eli kaikilla $x_0 \in \partial\Omega$ on olemassa (koordinaatiston kiertoa ja uudelleen nimeämistä vailla) Lipschitz $f : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ s.e.

$$\Omega \cap B = \{y \in \mathbf{R}^n : f(y_1, \ldots, y_{n-1}) < y_n\} \cap B \,,$$

niin Ω on Lipschitz-alue.

6.10. Määritelmä. Sanotaan, että Ω on $(1,p)$-*laajennusalue* (extension domain), jos on olemassa lineaarikuvaus $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ s.e. $Eu|_\Omega = u$ kaikilla $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja on olemassa vakio $c > 0$ s.e.

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \,.$$

6.11. Lause. *Lipschitz-alueet ovat* $(1,p)$*-laajennusalueita.*

Todistus: Jos Ω on Lipschitz, niin on olemassa $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N \subset \mathbf{R}^n$, jotka peittävät $\partial\Omega$:n ja $\psi_j : \Omega_j \to B = B(0,1)$ s.e.

(i) $\psi_j(\Omega_j \cap \Omega) = B_+ = B \cap \mathbf{R}^n_+$

(ii) $\psi_j(\partial\Omega \cap \Omega_j) \subset \partial\mathbf{R}^n_+$

(iii) ψ_j ja ψ^{-1} ovat M-Lipschitz-funktioita.

Olkoon $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ sellainen, että $\Omega_0 \cup \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j \supset \Omega$. Olkoon $\{\eta_j\}_{j=0}^N$ $\overline{\Omega}$:n peitteeseen $\{\Omega_j\}_{j=0}^N$ liittyvä ykkösen ositus. Tällöin $(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1} \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)$, $j = 1, \ldots, N$, joten Lauseen 6.6 nojalla

$$E_0\big((\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}\big) \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n) \,, \quad E_0\big((\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}\big)|_{B_+} = \big((\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}\big)$$

ja

$$\|E_0\big((\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}\big)\|_{1,p} \leq 2\|(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}\|_{1,p} \,.$$

Lisäksi

$$\underbrace{E_0\big((\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}\big)}_{\text{kantaja kompakti } B\text{:ssä}} \circ \psi_j \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$$

Määritellään

$$Eu := \underbrace{u\eta_0}_{\in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} + \sum_{j=1}^{N} \underbrace{E_0\big((\eta_j u)\circ \psi_j^{-1}\big)}_{\in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} \circ \psi_j \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$$

Jos $x \in \Omega$, niin

$$\begin{aligned} Eu(x) &= \eta_0 u(x) + \sum_{j=1}^{N} E_0\big((\eta_j u)(\psi_j^{-1}(\psi_j(x)))\big) \\ &= \sum_{j=0}^{N} \eta_j(x)u(x) = u(x)\,. \end{aligned}$$

Lineaarisuus on selvä ja

$$\begin{aligned} \|Eu\|_{1,p} &\le \underbrace{\|u\eta_0\|_{1,p}}_{\le c\|u\|_{1,p}} + \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\|E_0\big((\eta_j u)\circ \psi^{-1}\big)\circ \psi_j\|_{1,p}}_{\substack{\le \|E_0(\eta_j u)\circ\psi^{-1}\|_{1,p}\|\psi_j\|_{1,p} \le 2\|(\eta_j u)\circ\psi^{-1}\|_{1,p} \\ \le 2c\|\eta_j u\|_{1,p} \le c\|u\|_p}} \\ &\le c\|u\|_{1,p}\,. \end{aligned}$$

□

Harjoitutehtävä: Laajenna $u(x) \equiv 1$ pallosta $B(0,r)$ ja huomaa, että laajennusoperaattorin normi c riippuu myös säteestä, jos $r < 1$.

6.12. Huomautus. Jos Ω on $(1,p)$-laajennusalue (erityisesti, jos Ω on Lipschitz), niin $C^\infty(\mathbf{R}^n) \cap W^{1,p}(\Omega)$ on tiheässä $W^{1,p}(\Omega)$:ssa. (ks. demo 8.7)

6.13. Huomautus. Useimmat $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$-funktioita koskevat ilmiöt toimivat myös $W^{1,p}(\Omega)$- funktioille, jos Ω on laajennusalue.

6.14. Seuraus. *Jos Ω on $(1,p)$-laajennusalue ja $p > n$, niin on vakio $c > 0$ s.e.*

$$|u(x) - u(y)| \le c|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\|u\|_{1,p}$$

kaikilla $u \in W^{1,p}(\Omega)$ m.k. $x, y \in \Omega$.

Todistus: HT. □

6.15. Huomautus. On paljon muitakin laajennusalueita kuin Lipschitz-alueet, esim. ns. (ε, δ)-alueet.

6.16. Huomautus. Jos $f : A \to \mathbf{R}$ on Lipschitz, $A \subset \mathbf{R}^n$, niin on olemassa Lipschitz-funktio $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ s.e. $g|_A = f$ ja Lip(g) =Lip(f). Esim.

$$g(x) = \inf_{y \in A} \{f(y) + L|x - y|\}, \qquad \text{missä } L = Lip(f)\,;$$

tämä on McShane-ekstensiokaava.

7. Heikko konvergenssi

7.1. Määritelmä. Olkoon $1 \leq p < \infty$ [11]. Sanotaan, että jono $f_j \in L^p(A)$ *suppenee heikosti* kohti funktiota $f \in L^p(A)$, jos

$$\lim_{j\to\infty} \int_A f_j g \, dx = \int_A f g \, dx \quad \text{kaikilla } g \in L^q(A)\,,$$

missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pätee:

7.2. Lause. (Rieszin esityslause) *Olkoon A mitallinen, $1 < p < \infty$. Tällöin $L : L^p(A) \to \mathbf{R}$ on jatkuva lineaarikuvaus joss on olemassa $g \in L^q(A)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, s.e.*

$$L(f) = \int_A f g \, dx \quad \textit{kaikilla } f \in L^p(A)$$

(g on L:n mukana yksikäsitteinen.)

Todistus: HT. □

7.3. Huomautus. Heikko raja-arvo on yksikäsitteinen: $f_j \to f$, $f_j \to h$ heikosti $L^p(A)$:ssa (monet kirjoittavat $f_j \to f$ tarkoittaen $f_j \to f$ heikosti) niin

$$\int_A (f - h) g \, dx = \lim_{j\to\infty} \int_A (f_j - f_j) g \, dx = 0 \quad \text{kaikilla } g \in L^q(A)$$

Siten $f - h = 0$ m.k. eli $f = h$ $L^p(A)$-mielessä.

7.1. Lemma. *Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $f_j, f \in L^p(A)$.*

(i) Jos $f_j \to f$ (vahvasti) $L^p(A)$:ssa, niin $f_j \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa.

[11] Varo: $p = 1$ on vaarallinen!

(ii) Jos $f_j \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa, niin on $M > 0$ s.e.

$$\|f_j\|_p \leq M \quad \textit{kaikilla } j = 1, 2, \ldots$$

TODISTUS: (i)

$$\Big|\int_A (f_j - f) g \, dx\Big| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f_j - f\|_p \underbrace{\|g\|_q}_{<\infty} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ kaikilla } g \in L^q(A)\,.$$

Siis $f_j \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa. $\not\Box$

(ii) Todistus seuraa tasaisen rajoituksen periaatteesta ja löytyy esim. Funktionaalianalyysin kurssilta.

$\Box$

7.4. Huomautus. Kohta (i) ei päde kääntäen! Esim. $1 < p < \infty$. Olkoon

$$f_k = k^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,\frac{1}{k}]}\,.$$

Tällöin

$$f_k \in L^p([0,1]),\ \|f_k\|_p = \Big(\int_{[0,\frac{1}{k}]} k\Big)^{\frac{1}{p}} = 1 \text{ kaikilla } k$$

ja $f_k \to 0$ heikosti $L^p([0,1])$:ssä. Olkoon $g \in L^q([0,1])$.
Väite:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{[0,1]} f_j g \, dx = 0\,.$$

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\varphi \in C_0(]0,1[)$ s.e. $\|\varphi - g\|_q < \varepsilon$, jolloin

$$\Big|\int_A f_j g \, dx\Big| \leq \underbrace{\Big|\int_{[0,\frac{1}{j}]} f_j \varphi \, dx\Big|}_{\substack{=0, \text{ kun } j \text{ iso,} \\ \text{sillä spt } \varphi \text{ kompakti}}} + \underbrace{\Big|\int_A f_j |g - \varphi| \, dx\Big|}_{\overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\|f_j\|_p}_{=1} \underbrace{\|g-\varphi\|_q}_{<\varepsilon}} < \varepsilon\,,$$

kun j iso.

7.2. Lemma. *Olkoon* $1 \le p < \infty$, $f_j, f \in L^p(A)$. *Tällöin* $f_j \to f$ *heikosti* $L^p(A)$*:ssa jos ja vain, jos*

(i) $\sup \|f_j\|_p < \infty$

(ii)
$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_A f_j \varphi \, dx = \int\limits_A f \varphi \, dx$$
kaikilla $\varphi \in D$, *missä* D *on* $L^q(A)$*:n tiheä osajoukko.*

Todistus: HT. $\square$

7.5. Huomautus. Erityisesti siis Lemmasta 7.2 seuraa, että kun $1 < p < \infty$ ja $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ avoin, niin $f_j \to f$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa jos ja vain jos $\|f_j\|_p$ on rajoitettu $f \in L^p(A)$ ja

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega f_j \varphi \, dx = \int\limits_\Omega f \varphi \, dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Normi on alhaalta puolijatkuva heikon konvergenssin suhteen:

7.3. Lemma. *Jos* $f_j \to f$ *heikosti* $L^p(A)$*:ssa, niin*

$$\liminf_{j\to\infty} \|f_j\|_p \ge \|f\|_p\,, \quad 1 \le p < \infty\,.$$

Todistus: Voidaan olettaa, että $\|f\|_p > 0$. Olkoon $g(x) = \operatorname{sign} f(x) |f(x)|^{p-1}$. Tällöin $g \in L^q(A)$ (myös $p = 1$ ok.) ja

$$\begin{aligned}\int\limits_A |f|^p \, dx &= \int\limits_A f g \, dx = \lim_{j\to\infty} \int\limits_A f_j g \, dx \\ &\le \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|_p \|g\|_q \le (\liminf \|f_j\|_p) \|f\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

kun

$$\|g\|_q = \begin{cases} 1, & \text{kun } p = 1 \\ \left(\int_A |f|^{(p-1)q} \, dx \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \end{cases}$$

$\square$

Muista. Jos $1 \le p < \infty$ ja $f_j, f \in L^p(A)$ ovat sellaisia, että $f_j(x) \to f(x)$ m.k. $x \in A$, niin $f_j \to f$ $L^p(A)$:ssa jos ja vain jos $\|f_j\|_p \to \|f\|_p$. (Fatoun lemman seuraus). Jos $1 < p < \infty$, on voimassa ns. Radon-Riesz.

7.6. Lause. (Radon-Riesz) *Olkoon* $1 < p < \infty$. *Tällöin*[12] $f_j \to f$ $L^p(A)$*:ssa jos ja vain jos* $f_j \to f$ *heikosti* $L^p(A)$*:ssa ja*

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j\|_p = \|f\|_p \,.$$

L^p-avaruus on heikosti kompakti, kun $1 < p < \infty$:

7.7. Lause. *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja* $\mathcal{B} \subset L^p(A)$ *rajoitettu (ts. on olemassa* $M \in \mathbf{R}$ *s.e.* $\|h\|_p < M$ *kaikilla* $h \in \mathcal{B}$*). Tällöin (jos* $\#\mathcal{B} = \infty$*), on olemassa jono* $f_k \in \mathcal{B}$ *ja* $f \in L^p(A)$ *s.e.* $f_k \to f$ *heikosti* $L^p(A)$*:ssa. (Erityisesti jokaisella* $L^p(A)$*:n rajoitetulla jonolla on heikosti suppeneva osajono.)*

Todistus: Olkoon $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset L^q(A)$ numeroituva tiheä osajoukko (sellainen on olemassa, koska $q < \infty$). Olkoon $\{f_k\} \subset \mathcal{B}$ mielivaltainen jono ja

$$a_k^{(1)} := \int\limits_A f_k \psi_1 \, dx \,,$$

jolloin

$$|a_k^{(1)}| \le \|f_k\|_p \|\psi_1\|_q \le M \|\psi_1\|_q < \widetilde{M} < \infty \quad \text{kaikilla } k.$$

Siis $a_k^{(1)}$:lla on osajono $a_{k_j}^{(1)}$, joka suppenee $\mathbf{R}$:ssä kohti lukua $a^{(1)}$.

Merkitään vastaavien funktioiden f_{k_j} jonoa $f_k^{(1)}$. Sovelletaan samanlaista prosessia funktiojonoon $(f_k^{(1)})$. Merkitään

$$a_k^{(2)} := \int\limits_A f_k^{(1)} \psi_2 \, dx$$

ja valitaan osajono $a_{k_j}^{(2)} \to a^{(2)}$ $\mathbf{R}$:ssä ja merkitään vastaavaa funktiojonon $(f_k^{(1)})$ osajonoa $f_k^{(2)}$:lla. Jatketaan, valitaan $(f_k^{(j)})$:n osajono $(f_k^{(j+1)})$, jolle

$$\widetilde{a}_k^{(j+1)} := \int\limits_A f_k^{(j+1)} \psi_{j+1} \, dx \to a^{(j+1)} \,.$$

[12] Ei ole totta, kun $p = 1$!

Valitaan diagonaalijono (f_k^k) ja osoitetaan, että on olemassa $f \in L^p(A)$ s.e. $f_k^{(k)} \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa. Nyt

$$\int_A f_k^{(k)} \psi_j \, dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a^{(j)} \qquad \text{kaikilla } j = 1, 2, \ldots .$$

Määritellään

$$L\psi_j := a^{(j)} = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k^{(k)} \psi_j \, dx$$

ja edelleen

$$L(\lambda\psi_j + \mu\psi_l) := \lambda L\psi_j + \mu L\psi_l = \lambda a^{(j)} + \mu a^{(l)}$$

kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $l, j \in \mathbf{N}$, jolloin $L : \mathrm{span}\{\psi_j\} \to \mathbf{R}$ on lineaarinen. Lisäksi

$$\begin{aligned}
&|L(\lambda\psi_j + \mu\psi_l)| = |\lambda \lim_{k\to\infty} \int \psi_j f_k^{(k)} \, dx + \mu \lim_{m\to\infty} \int \psi_l f_m^{(m)} \, dx| \\
&= |\lim_{k\to\infty} \int_A f_k^{(k)} (\lambda\psi_j + \mu\psi_l) \, dx| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \underbrace{\|f_k^{(k)}\|_p}_{\leq M} \|\lambda\psi_j + \mu\psi_l\|_q \\
&\leq M \|\lambda\psi_j + \mu\psi_l\|_q \,.
\end{aligned}$$

Siis

$$|Lg| \leq M\|g\|_q \qquad \text{kaikilla } g \in \mathrm{span}\{\psi_j\} \,.$$

Laajennetaan L koko $L^q(A)$:han asettamalla

$$Lg := \lim_{j\to\infty} Lg_j \in \mathbf{R}, \qquad \text{missä } g_j \in \mathrm{span}\{\psi_k\} \text{ s.e. } g_j \to g \; L^q(A)\text{:ssa} \,.$$

Silloin $L : L^q(A) \to \mathbf{R}$ on (rajoitettu eli) jatkuva lineaarikuvaus. Rieszn esityslauseen nojalla on olemassa $f \in L^p(A)$ s.e.

$$Lg = \int_A fg \, dx \qquad \text{kaikilla } g \in L^p(A) \,.$$

Siis

$$\int_a fg \, dx = Lg = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k^{(k)} g \, dx \qquad \text{kaikilla } g \in L^q(A) \,.$$

$\square$

7.8. Huomautus. Lause 7.7 ei päde, jos $p = 1$. (katso demot: on olemassa jono $f_j \in L^1(]-1,1[)$ s.e. $\|f_j\|_1 = 1$ ja

$$\lim_{j\to\infty} \int_{]-1,1[} f_j \psi\, dx = \underbrace{\psi(0)}_{\substack{\text{ei ole minkään funktion integraali,}\\ \text{syynä integraalin abs.jvuus.}}} \qquad \text{kaikilla } \psi \in C(]-1,1[)\,.)$$

7.9. Lause. *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja* $f_j, f \in L^p(A)$. *Jos* $f_j(x) \to f(x)$ *m.k.* $x \in A$ *ja* $\sup_j \|f_j\|_p < \infty$, *niin* $f_j \to f$ *heikosti* $L^p(A)$*:ssa.*

Todistusta varten tarvitaan *Egorovin lause*: *Olkoon* $|A| < \infty$ *ja* f_j, f *mitallisia s.e.* $f_j(x) \to f(x)$ *m.k.* $x \in A$. *Tällöin jokaisella* $\varepsilon > 0$ *on olemassa suljettu* $F \subset A$ *s.e.* $|A \setminus F| < \varepsilon$ *ja* $f_j \to f$ *tasaisesti* F*:ssä.*
Todistus HT.

Lauseen 7.9 todistus: Merkitään $M = \sup_j \|f_j\|_p$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $g \in L^q(A)$.

$$\begin{aligned}
\Big|\int_A f_j g - f g\, dx\Big| &\le \int_A |f_j - f||g|\, dx \\
&\overset{\text{Egorov}}{=} \underbrace{\int_F \underbrace{|f_j - f|}_{<\varepsilon} |g|\, dx}_{\to 0,\ \text{ok}} + \underbrace{\int_{A\setminus\widetilde{A}} |f_j - f||g|\, dx}_{<\varepsilon M} + \underbrace{\int_{\widetilde{A}\setminus F} |f_j - f||g|\, dx}_{<\varepsilon M}
\end{aligned}$$

Valitaan siis $\delta > 0$ s.e.

$$\Big(\int_E |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon \quad \text{kaikilla } E \subset A, \text{ joille } |E| < \delta \text{ (int. abs. jvuus)}\,.$$

Nyt

$$\int_{\widetilde{A}\setminus F} |f_j - f||g|\, dx \le \|f_j - f\|_p \Big(\int_{\widetilde{A}\setminus F} |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon M, \text{ jos } |\widetilde{A}\setminus F| < \delta\,.$$

Valitaan $\widetilde{A} \subset A$ s.e. $|\widetilde{A}| < \infty$ ja $\big(\int_{A\setminus\widetilde{A}} |g|^q\, dx\big)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$.

$$\int_{A\setminus\widetilde{A}} |f_j - f||g|\, dx \le \|f_j - f\|_p \Big(\int_{A\setminus\widetilde{A}} |g|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le M\varepsilon\,.$$

Egorovin lauseesta seuraa, että on olemassa $F \subset A$ s.e. $f_j \to f$ tasaisesti F:llä ja $|\widetilde{A}\setminus F| < \delta$.

7.4. Lemma. (Mazurin lemma) *Olkoon* $1 \le p < \infty$. *Jos* $f_j \to f$ *heikosti* $L^p(A)$*:ssa, niin on olemassa sellainenjono* $g_j \in L^p(A)$*, joka suppenee kohti* f*:ää* $L^p(A)$*:ssa ja* g_j*:t ovat* f_k*:iden konvekseja kombinaatioita, ts. on olemassa* $\lambda_{k,j} \in [0,1]$ *s.e.*

$$g_j(x) = \sum_{k=1}^{j} \lambda_{k,j} f_k(x) \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{j} \lambda_{k,j} = 1\,,$$

ja $g_j \to f$ $L^p(A)$*:ssa.*

TODISTUS: Seuraa Hahn-Banachin lauseesta, ks. Yosida s. 120. □

Esimerkki. Olkoon $\emptyset \neq \mathcal{K} \subset L^p(A)$, $1 < p < \infty$ konveksi ja suljettu joukko. Tällöin on olemassa $f_0 \in \mathcal{K}$ s.e.

$$\|f_0\|_p = \inf\{\|f\|_p : f \in \mathcal{K}\}\,.$$

TODISTUS: Olkoon $f_j \in \mathcal{K}$ sellainen jono, jolle

$$\|f_j\| \to \inf\{\|f\|_p : f \in \mathcal{K}\}\,.$$

Tällöin $\|f_j\|_p$ on rajoitettu, joten on olemassa osajono f_j, joka suppenee heikosti kohti jotakuta $f \in L^p(A)$. Edelleen,

$$\|f\|_p \overset{\text{lemma 7.4}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|_p = \inf\{\|f\|_p : f \in \mathcal{K}\}\,.$$

Lisäksi $f \in \mathcal{K}$, koska Mazurin lemman nojalla on olemassa sellaiset $\lambda_{k,j} > 0$, joille $\sum_{k=1} \lambda_{k,j} = 1$ ja

$$\sum_{k=1}^{j} \lambda_{k,j} f_k \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f \ L^p(A)\text{:ssa}\,.$$

Siis $f \in \mathcal{K}$, koska $\mathcal{K}$ suljettu. □

L^p-avaruuksien heikosta kompaktiudesta saadaan muutamia muikeita tuloksia Sobolev-avaruuksille.

7.10. Lause. *Olkoon $1 < p < \infty$. Olkoon $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ rajoitettu, ts*

$$||u_j||_{1,p} \leq M < \infty \quad \text{kaikilla } j\,.$$

Tällöin on olemassa $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja sellainen jonon u_j osajono u_{j_k}, jolle

$$u_{j_k} \to u \text{ heikosti } L^p(\Omega)\text{:ssa}$$

ja

$$D^\alpha u_{j_k} \to D^\alpha u \text{ heikosti } L^p(\Omega)\text{:ssa kaikilla } \alpha, \text{ joilla } |\alpha| = 1\,.$$

Lisäksi, jos $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$, niin myös $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

TODISTUS: Koska $\|u_j\|_p$ ja $\|D^\alpha u_j\|_p$ ovat rajoitettuja, on olemassa osajono u_{j_k} ja $u \in L^p(\Omega)$ sekä $v_\alpha \in L^p(A)$ $u_{j_k} \to u$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa, $D^\alpha u_{j_k} \to v_\alpha$ heikosti $L^p(A)$:ssa kaikilla α, $|\alpha| = 1$.

Osoitetaan, että $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $D^\alpha u = v_\alpha$: (riittää osoittaa, että $D^\alpha u = v_\alpha$)

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_\alpha \varphi\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_{j_k} \varphi\, dx = \lim_{k\to\infty} \Big(- \int_\Omega u_{j_k} D^\alpha \varphi\, dx \Big) \\ &= - \int_\Omega D^\alpha \varphi\, dx\,.\end{aligned}$$

Loppu seuraa Mazurin lemmasta: Jos $u_j \to u$ ja $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ $L^p(A)$:ssa, niin on olemassa sellaiset v_j

$$v_j := \sum_{k=1}^{j} \lambda_{k,j} u_k$$

joille

$$v_j \to u\, L^p(\Omega)\text{:ssa} \quad \text{ja} \quad D^\alpha v_j \to D^\alpha u\, L^p(\Omega)\text{:ssa}\,.$$

Siis $v_j \to u$ $W^{1,p}(\Omega)$:ssa, joten $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, koska $v_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

7.11. Huomautus. Kun $p = 1$, ei Lause 7.10 ole totta.
Varo: Jos $u_j \in W_0^{1,1}(\Omega)$ rajoitettu jono, niin Sobolevin epäyhtälön nojalla

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq c\|\nabla u\|_1\,,$$

joten u_j on $L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$:ssa rajoitettu. Siten sillä on osajono u_j s.e. $u_j \to u$ heikosti $L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$:ssa ja siten heikosti $L^1(\Omega)$:ssa, jos $|\Omega| < \infty$. Ongelmaksi muodostuu derivaattojen heikko konvergenssi.

Esimerkki. Olkoon

$$u_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } |x| < 1 \\ 0, & \text{jos } |x| > 1 + \frac{1}{j} \\ \frac{1+\frac{1}{j}}{\frac{1}{j}}, & \text{jos } 1 \le |x| \le 1 + \frac{1}{j}\,, \end{cases}$$

jolloin $u_j \in W^{1,1}(\mathbf{R}^n)$, $\|u\|_1 \le c_n$ ja

$$\|\nabla u_j\|_1 = j\big((1+\frac{1}{j})^n - 1\big)c_n \approx \tilde{c_n} \quad (\tilde{c_1} = 2)$$

Siis u_j on rajoitettu $W^{1,1}(\mathbf{R}^n)$:ssä ja $u_j \to \chi_{B(0,1)}$ $L^1(\mathbf{R}^n)$:ssä. Koska $\chi_{B(0,1)} \notin W^{1,1}(\mathbf{R}^n)$, niin Lause 7.10 ei yleisty tapaukseen $p = 1$.

7.12. Lause. *Olkoon $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ (normin mielessä) rajoitettu jono s.e. $u_j(x) \to u(x)$ m.k. $x \in \Omega$. Tällöin $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $u_j \to u$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa ja $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa kaikilla α, $|\alpha| = 1$.*

Todistus: Lauseen 7.9 nojalla $u \in L^p(\Omega)$ ja $u_j \to u$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa, jolloin Lauseesta 7.10 seuraa, että $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Pitää vielä osoittaa, että $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa. Olkoon $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_\Omega D^\alpha u \cdot \varphi \, dx &= -\int_\Omega u \cdot \underbrace{D^\alpha \varphi}_{\in L^q(\Omega)} \, dx \overset{u_j \to u \text{ heikosti } L^p(\Omega)\text{:ssa}}{=} -\lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j D^\alpha \varphi \, dx \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_j \cdot \varphi \, dx \end{aligned}$$

Koska $\|D^\alpha u_j\|_p \le M$ ja $C_0^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ tiheä, seuraa lauseesta 7.2, että $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa. □

7.1. Erotusosamäärät ja $W^{1,p}$

7.13. Määritelmä. Olkoon $u \in L^p(\Omega)$, $h \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Määritellään

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \qquad i. \text{ erotusosamäärä "kokoa" } h\,,$$

kunhan $x \in \Omega$ ja $|h| < \operatorname{dist}(x, 2\Omega)$.

7.14. Lause. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ ja $G \subset\subset \Omega$. Tällöin*

$$\|\Delta_i^h u\|_{L^p(G)} \le \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

kaikilla $h : |h| < \operatorname{dist}(G, \complement\Omega)$. (Erityisesti siis

$$\|u(x) - u(x+y)\|_{L^p(G)} \le c|y| \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

kaikilla $|y| < \operatorname{dist}(G, \complement\Omega)$.)

Todistus: Olkoon (ensin) $u \in C^\infty(\Omega) \cap W_h^{1,p}(\Omega)$. Jos $x \in G$ ja $|h| < \operatorname{dist}(G, \complement\Omega)$, niin

$$u(x + he_i) - u(x) = \int_0^h \partial_i u(x + te_i) dt = h \int_0^1 \partial_i u(x + she_i) ds$$

Siis

$$\begin{aligned}
\int_G |\Delta_i^h u(x)|^p \, dx &= \int_G \Big| \int_0^1 \partial_i u(x + she_i) ds \Big|^p \, dx \\
&\overset{\text{Jensen}}{\le} \int_G \int_0^1 |\partial_i u(x + she_i)|^p ds \, dx \\
&= \int_0^1 \underbrace{\int_G |\partial_i u(x + she_i)|^p \, dx}_{\le \int_\Omega} ds \\
&\le \int_0^1 \Big(\int_\Omega |\partial_i u(y)|^p \, dy \Big) ds = \int_\Omega |\partial_i u|^p \, dx \, .
\end{aligned}$$

Aapproksimoimalla nähdään, että väite kaikilla $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (HT). □

Jos $1 < p < \infty$, niin lause 7.14 voidaan kääntää:

7.15. Lause. *Olkoon $1 < p < \infty$ ja $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ sekä $G \subset\subset \Omega$. Jos on olemassa vakio c s.e.*

$$\|\Delta_i^h u\|_{L^p(G)} \le c \quad \text{kaikilla } h : |h| < \operatorname{dist}(G, \complement\Omega) \, ,$$

niin u:lla on i. heikko osittaisderivaatta $D_i u$ G:ssä ja $D_i u \in L^p(G)$. Lisäksi

$$\|D_i u\|_{L^p(G)} \le c \, .$$

Todistus: Koska $(\Delta_i^{\frac{1}{j}} u)_j$ on $L^p(G)$:ssä rajoitettu jono (kun $j > \frac{1}{\mathrm{dist}(G,\complement\Omega)}$), niin sillä on osajono, joka suppenee heikosti $L^p(G)$:ssä kohti funktiota $v \in L^p(G)$. Kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(G)$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_G v\varphi\,dx &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_G \Delta_i^{\frac{1}{j_k}} u\varphi\,dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\limits_G \frac{u(x+\frac{1}{j_k}e_i)-u(x)}{\frac{1}{j_k}}\varphi(x)\,dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\limits_G u(x) \underbrace{\left(\frac{\varphi(x-\frac{1}{j_k}e_i)-\varphi(x)}{\frac{1}{j_k}}\right)}_{-\Delta_i^{-\frac{1}{j_k}}\varphi(x)} dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\limits_G u(x) \qquad \underbrace{\Delta_i^{\frac{1}{j_k}}\varphi(x)}_{\overset{\text{tas.}}{\to}\partial_i\varphi(x),\text{ koska }\varphi\in C_0^\infty(G)} \qquad dx \\
&\overset{\text{D.K.}}{=} -\int\limits_G u(x)\partial_i\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

Siis on olemassa $D_i u = v$.

Koska $\Delta_i^{\frac{1}{j_k}} u \to D_i u$ heikosti $L^p(G)$:ssä, niin

$$\|D_i u\|_{L^p(G)} \le \liminf_{k\to\infty} \underbrace{\|\Delta_i^{\frac{1}{j_k}} u\|_p}_{\le c} \le c\,.$$

□

7.16. Seuraus. *Olkoon $1 < p < \infty$. Tällöin $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ jos ja vain jos $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$ ja on olemassa vakio $c > 0$, jolle*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \left|\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}\right|^p dx \le c \qquad \textit{kaikilla } h \in \mathbf{R}^n\setminus\{0\}\,.$$

7.17. Lause. *$u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ jos ja vain jos on olemassa lokaalisti Lipschitz-funktio[13] v s.e. $v = u$ m.k. Ω:ssa.*

[13] Lokaalisti Lipschitz: kaikilla $\overline{B} \subset \Omega$ on olemassa vakio $L_B \in \mathbf{R}$, jolle

$$|v(x)-v(y)| \le L_B|x-y| \qquad \text{kaikilla } x,y \in B\,.$$

TODISTUS: "$\Leftarrow$": HT.
"$\Rightarrow$": Olkoon $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$, $B \subset\subset \Omega$ pallo, $\varepsilon < \text{dist}(B, \complement\Omega)$ ja $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in L^\infty(\Omega)$ sekä $Du_\varepsilon = \eta_\varepsilon * Du$ B:ssä. Nyt

$$\|Du_\varepsilon\|_{L^\infty(B)} \leq \|Du\|_{L^\infty(B)}\,,$$

joten kaikilla $x, y \in B$

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| &= \Big|\int_0^1 \nabla u_\varepsilon(y + t(x-y)) \cdot (x-y)dt\Big| \\ &\leq \int_0^1 |x-y|\,\underbrace{|\nabla u_\varepsilon(y + t(x-y))|}_{\leq c\|\nabla u\|_{L^\infty(B)}}\,dt \leq M|x-y|\,,\end{aligned}$$

missä M ei riipu ε:sta.

Koska $u_\varepsilon \to u(x)$ m.k. $x \in B$ ja $|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq M|x-y|$ kaikilla $x, y \in B$, niin u_ε suppenee tasaisesti B:ssä kohti Lipschitz-funktiota v ja $v = u$ m.k. B:ssä. □

7.18. Huomautus. $\text{Lip}(u) \geq \|Du\|_\infty$.

7.19. Seuraus. *$u \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ jos ja vain jos on olemassa rajoitettu Lipschitz-funktio $v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ s.e. $v = u$ m.k.*

7.20. Huomautus. Jos $\Omega \subsetneqq \mathbf{R}$, niin voi käydä siten, että $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ei ole Lipschitz koko Ω:ssa.

7.21. Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$. *Kokoelma* $\mathcal{F}$ funktioita $f : A \to \mathbf{R}$ on *yhtäjatkuva* (equicontinuous) pisteessä $x_0 \in A$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } f \in \mathcal{F}, \text{ kunhan } |x - x_0| < \delta,\, x \in A\,.$$

Edelleen $\mathcal{F}$ on *yhtäjatkuva* A:ssa, jos $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva jokaisessa $x_0 \in A$.

7.22. Lause. (Ascoli) *Olkoon $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakti ja $\mathcal{F}$ K:ssa yhtäjatkuva kokoelma funktioita $f : K \to \mathbf{R}$. Jos on $M \in \mathbf{R}$, jolle $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in K$ ja kaikilla $f \in \mathcal{F}$, niin on olemassa jono $f_k \in \mathcal{F}$, joka suppenee tasaisesti K:ssa.*

TODISTUS: (Funktioanalyysi/Topologia) □

7.23. Seuraus. *Olkoon $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ avoin. Jos ($\#\mathcal{F} = \infty$) $\mathcal{F}$ on lokaalisti tasaisesti rajoitettu ja yhtäjatkuva, niin on olemassa jono $f_j \in \mathcal{F}$ ja $f \in C(\Omega)$ s.e.*

$$f_j \to f \ \ \textit{tasaisesti } \Omega\textit{:n kompakteilla osilla}.$$

(lok.tas.raj: kaikilla K on olemassa M s.e. $|g(x)| < M$ kaikilla $x \in K$ kaikilla $g \in \mathcal{F}$)

TODISTUS: HT. □

Seuraava lause kertoo, että $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ uppoaa kompaktisti $L^q(\Omega)$:aan rajoitetuilla Ω (ja $q < p^*$).

7.24. Lause. (Rellich-Kondrashov) *Olkoon $1 < p < n$ ja $u_j \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ rajoitettujono (ts. $\sup \|u_j\|_{1,p} = M < \infty$). Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ rajoitettu. Tällöin on olemassa osajono u_{j_k} ja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ s.e.*

$$u_{j_k} \to u \quad L^q(\Omega)\textit{:ssa kaikilla } q \in [1, p^*[,\ p^* = \frac{np}{n-p}.$$

7.25. Huomautus. Rellich-Kondrashov olisi helppo, jos tiedettäisiin, että $u_j(x) \to u(x)$ m.k. x. (vrt. demo 9/5.)

TODISTUS: Valitaan pallo $B \supset\supset \Omega$. Voidaan olettaa, että $u_j = 0$ $\complement B$:ssä. (Tarvittaessa otetaan myös $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(B)$, $0 \leq \tilde{\eta} \leq 1$, $\tilde{\eta} = 1$ Ω:ssa ja korvataan u_j $\tilde{\eta} u_j$:llä.) Olkoon $u_j^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_j$, kun $0 < \varepsilon < 1$ ($\varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{\Omega}, CB)$).
Väite 1:

$$\|u_j^\varepsilon - u_j\|_p \leq M\varepsilon \quad (\text{missä } M = \sup_j \|u_j\|_{1,p})$$

TODISTUS 1:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |u_j^\varepsilon(x) - u_j(x)|^p \, dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \Big| \int\limits_{\mathbf{R}^n} \underbrace{\eta_\varepsilon(y)}_{\eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}} \cdot \eta_\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}} \, (u_j(x-y) - u_j(x)) \, dy \Big|^p \, dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \Big| \underbrace{\Big(\int \eta_\varepsilon \, dy \Big)}_{=1}^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int\limits_{\mathbf{R}}^{n} \eta_\varepsilon |u_j(x-y) - u_j(x)|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}} \Big|^p \, dx$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(y) |u_j(x-y) - u_j(x)|^p \, dy \, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) \underbrace{\Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |u_j(x-y) - u_j(x)|^p \, dx \Big)}_{\leq |y|^p \|\nabla u_j\|_p^p \leq \varepsilon^p M^p} dy$$

$$\leq \varepsilon^p M^p \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) \, dy = \varepsilon^p M^p \, .$$

$\not\emptyset$

Väite 2: Kiinteällä $\varepsilon > 0$ jono $(u_j^\varepsilon)_j$ on tasaisesti rajoitettu ja yhtäjatkuva ($\varepsilon < \mathrm{dist}(CB, \Omega)$).

TODISTUS 2:

$$|u_j^\varepsilon(x)| = |\int\limits_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) u_j(y) \, dy| = |\varepsilon^{-n} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} \underbrace{\eta\big(\frac{x-y}{\varepsilon}\big)}_{\leq K} u_j(y) \, dy|$$

$$\overset{\text{Jensen}}{=} K c_n \Big(\fint_{B(x,\varepsilon)} |u_j(y)|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \tilde{c}_{n,p} K$$

siis $(u_j^\varepsilon)_j$ on tasaisesti rajoitettu.

Edelleen

$$|Du_j^\varepsilon(x)| \leq \int\limits_{B(x,\varepsilon)} \underbrace{|D\eta_\varepsilon(x-y)|}_{= \varepsilon^{-1-n} |D\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)| \leq \varepsilon^{-1-n} \widetilde{K}} |u_j(y)| \, dy \leq \varepsilon^{-1-n} \widetilde{K} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} |u_j(y)| \, dy$$

$$\leq c_{n,p} \varepsilon^{-1-\frac{n}{p}} \widetilde{K} M = \widetilde{M} < \infty \, .$$

Siis $|u_j^\varepsilon(x) - u_j^\varepsilon(y)| \leq c_n \widetilde{M} |x-y|$. (Vakio ei riipu j:stä.) Joten $(u_j^\varepsilon)_j$ on yhtäjatkuva.

$\not\emptyset$

Väite 3: Kaikilla $\delta > 0$ on olemassa osajono $(u_{j_k}) \subset (u_j)$ s.e.

$$\limsup_{k,l\to\infty} \|u_{j_l} - u_{j_k}\|_p < \delta\,.$$

Todistus 3: Valitaan $\varepsilon > 0$ niin pieni, että

$$\|u_j^\varepsilon - u_j\|_p \leq \frac{\delta}{3} \quad \text{kaikilla } j \text{ (mahdollista, Väite 1)}\,.$$

Väitteestä 2 seuraa, että $(u_j^\varepsilon)_j$ on tasaisesti rajoitettu ja yhtäjatkuva, joten Ascolin lauseen nojalla sillä on osajono $u_{j_k}^\varepsilon$, joka suppenee tasaisesti $\mathbf{R}^n$:ssä (huomaa, että $u_j^\varepsilon = 0$ $\complement B$:ssä). Tällöin

$$\begin{aligned}\|u_{j_k} - u_{j_l}\|_p &\leq \underbrace{\|u_{j_k} - u_{j_k}^\varepsilon\|_p}_{\leq\frac{\delta}{3}} + \underbrace{\|u_{j_k}^\varepsilon - u_{j_l}^\varepsilon\|_p}_{\to 0} + \underbrace{\|u_{j_l}^\varepsilon - u_{j_l}\|_p}_{\leq\frac{\delta}{3}} \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta\,, \text{ kun } k \text{ ja } l \text{ ovat isoja}\,.\end{aligned}$$

$\not\square$

Sovelletaan väitettä 3, kun $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ja löydetään jono sisäkkäisiä u_j:n osajonoja, joille pätee $\|\widetilde{u}_{j_k} - \widetilde{u}_{j_l}\|_p \leq 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

$$\begin{aligned}&u_{1,1}; u_{1,2}; u_{1,3}, \ldots \\ &u_{\frac{1}{2},1}; u_{\frac{1}{2},2}; u_{\frac{1}{2},3}, \ldots \\ &\vdots \\ &u_{\frac{1}{100},1}; u_{\frac{1}{100},2}; u_{\frac{1}{100},3}, \ldots u_{\frac{1}{100},k}\end{aligned}$$

Tästä diagonaalijono on Cauchy-jono L^p:ssä joka siten suppenee L^p:ssä kohti funktiota u.
Koska $p > 1$, Lause 7.12 kertoo, että $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Loppu on lähellä: Olkoon $q \in [1, p^*[$.

$$\|u_{j_k} - u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\alpha_q} \|u_{j_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0\,,$$

jos $q \in [1, p]$. Jos $q \in]p, p^*[$, niin valitaan $\lambda \in [0, 1]$ s.e. $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{p^*}$, jolloin

$$\|u_{j_k} - u\|_q \overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\|u_{j_k} - u\|_p^\lambda}_{\to 0} \quad \underbrace{\|u_{j_k} - u\|_{p^*}^{1-\lambda}}_{\text{rajoitettu Sobolevin ey:n nojalla.}} \quad \to 0\,.$$

$\square$

7.26. Huomautus. Rellich-Kondrashovin väite ei päde enää, jos $q = p^*$. Samoin oletus Ω:n rajoittuneisuudesta on oleellinen. Kun $p = 1$, sama todistus antaa: on olemassa osajono u_{j_k} ja $u \in L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$ s.e.

$$u_{j_k} \to u \quad L^q(\Omega)\text{:ssa} \quad \text{kaikilla } q \in [1, \frac{n}{n-1}[\,.$$

7.27. Seuraus. (Rellich-Kondrashov) *Olkoon Ω rajoitettu ja $1 < p < \infty$. Olkoon $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$ rajoitettu jono $W^{1,p}(\Omega)$:ssa. Tällöin on olemassa $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja osajono u_{j_k}, jolle*

$$u_{j_k} \to u \quad L^q(\Omega)\text{:ssa kaikilla } q \in \begin{cases} [1, p^*[, & \text{jos } 1 < p < n \\ [1, \infty[, & \text{jos } p \geq n. \end{cases}$$

Todistus: A. $1 < p < n$. Rellich-Kondrashov.

B. $p \geq n > 1$. Tällöin u_j on rajoitettu $W_0^{1,p_0}(\Omega)$:ssa kaikilla $p_0 \in]1, n[$. Siis on olemassa $u \in W_0^{1,p_0}(\Omega)$ ja osajono $u_{j_k} \to u$ $L^q(\Omega)$:ssa kaikilla $q \in [1, p_0^*[$. Lauseen 7.12 nojalla $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Jos $q \geq p_0^*$, niin interpoloimalla (lause 2.13) $(\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p_0} + \frac{1-\lambda}{q+1})$

$$\|u_{j_k} - u\|_q \leq \underbrace{\|u_{j_k} - u\|_{p_0}^{\lambda}}_{\to 0} \qquad \underbrace{\|u_{j_k} - u\|_{q+1}^{1-\lambda}}_{\text{rajoitettu, koska } u_j \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ rajoitettu+Sobolev ey}}$$

□

7.28. Seuraus. (Rellich-Kondrashov) *Olkoon $1 < p \leq \infty$ ja Ω (rajoitettu) Lipschitz-alue (tai $(1,p)$-laajennusalue). Jos u_j on $W^{1,p}(\Omega)$:ssa rajoitettu jono, niin on $u \in W^{1,p}(\Omega)$ osajono u_{j_k} s.e. $u_{j_k} \to u$ $L^q(\Omega)$:ssa kaikilla*

$$q \in \begin{cases} [1, p^*[, & \text{kun } 1 < p < n \\ [1, \infty[, & \text{kun } p \geq n\,. \end{cases}$$

8. Kapasiteetti ja Sobolev-funktiot

Tässä luvussa oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $1 < p < n$.

8.1. Määritelmä.

$$\mathcal{K}^p := \{u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) : u \geq 0, \nabla u \in L^p(\mathbf{R}^n) \text{ ja } u \in L^{p^*}(\mathbf{R}^n)\}$$

8.2. Huomautus.

a) $W^{1,p}_+(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{K}^p$ (Sobolev epäyhtälö).

b) On olemassa $u \in \mathcal{K}^p \backslash W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, HT.

8.1. Lemma. *Jos $u \in \mathcal{K}^p$, niin on olemassa jono $u_j \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ (tai $u_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$) s.e. $u_j \to u$ $L^{p^*}(\mathbf{R}^n)$:ssä ja $\nabla u_j \to \nabla u$ $L^p(\mathbf{R}^n)$:ssä.*

Todistus: Olkoon $\eta_j \in C_0^\infty(B(0,2j))$, $0 \leq \eta_j \leq 1$, $\eta_j = 1$ $B(0,j)$:ssä ja $|\nabla \eta_j| \leq \frac{2}{j}$. Tällöin $u_j := u\eta_j \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ ja

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |u_j - u|^{p^*}\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\underbrace{(\eta_j - 1)}_{\in[-1,1]} u|^{p^*}\,dx \leq \int\limits_{\complement B(0,j)} |u|^{p^*}\,dx \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

koska $u \in L^{p^*}(\mathbf{R}^n)$ ja

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla u_j - \nabla u|^p\,dx &= \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla\eta_j u + (\eta_j - 1)\nabla u|^p\,dx \\ &\leq \underbrace{2^p \int\limits_{\mathbf{R}^n\backslash B(0,j)} |\nabla\eta_j|^p |u|^p\,dx}_{\substack{\leq \frac{1}{j^p}\int_{B(0,2)\backslash B(0,j)} |u|^p\,dx \\ \overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{j^p}|B(0,2j)|^{1-\frac{p}{p^*}} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbf{R}^n\backslash B(0.j))}}} + \underbrace{2^p \int\limits_{\mathbf{R}^n\backslash B(0,j)} \underbrace{|\eta_j - 1|^p}_{\in[0,1]} |\nabla u|^p\,dx}_{\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0\text{, koska } \nabla u \in L^p} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

$\square$

8.3. Seuraus. *On olemassa vakio $c = c(n,p) > 0$, jolle*

$$\|u\|_{p^*} \le c\|\nabla u\|_p \quad \textit{kaikilla } u \in \mathcal{K}^p\,.$$

8.4. Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mielivaltainen ja

$$\mathrm{Cap}_p(A) := \inf\{\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^p\,dx : u \in \mathcal{K}^p \text{ ja } u \ge 1 \text{ m.k. jossain } A\text{:n avoimessa ympäristössä}\}\,.$$

Tämä on joukon A *p-kapasiteetti*. Sovitaan $\inf \emptyset = \infty$, ts. $\mathrm{Cap}_p(A) = \infty$, jos ei ole olemassa $u \in K^p$ s.e. $u \ge 1$ A:n ympäristössä.

$$\mathrm{Cap}_p(A) \sim B_{1,p}(A) \sim R_{1,p}(A) \sim \text{ Sobolev-}p\text{-kapasiteetti}\,.$$

8.5. Huomautus.

(i) Jos K on kompakti,

$$\mathrm{Cap}_p(K) = \inf\Big\{\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla\varphi|^p\,dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \varphi \geqq 1\, K\text{:ssa}\Big\}$$

(ii)

$$A \subset B \subset \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathrm{Cap}_p(A) \le \mathrm{Cap}_p(B)$$

($\mathrm{Cap}_p(\emptyset) = 0$). Joukko funktio $A \mapsto \mathrm{Cap}_p(A)$ on ulkomitta: (ii) + Lause 8.6.

8.6. Lause.

$$Cap_p\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) \le \textstyle\sum_{j=1}^\infty Cap_p(A_j)\,.$$

Todistusta varten tarvitaan seuraava lemma.

8.2. Lemma. *Jos $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, niin*

$$\lim_{j\to\infty} Cap_p(A_j) = Cap_p\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)\,.$$

Todistus: Raja-arvo on olemassa ja "$\leq$" pätee monotonisuuden nojalla. Osoitetaan siis, "$\geq$". Sitä varten voidaan olettaa, että on olemassa $M < \infty$ s.e. $\mathrm{Cap}_p(A_j) \leq M$ kaikilla j. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $u_j \in \mathcal{K}^p$, $A_j \subset \mathrm{int}\{u_j \geq 1\}$ s.e.

$$\mathrm{Cap}_p(A) \geq \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u_j|^p\, dx - \frac{\varepsilon}{2^j}\,.$$

Olkoon $v_k = \max(u_1, u_2, \ldots, u_k) \in K^p$ ja $v_k(x) \nearrow v(x)$. Osoitetaan, että $v \in \mathcal{K}^p$ ja $(\bigcup A_j) \subset \mathrm{int}\{v \geq 1\}$. Havaitaan ensin, että $\mathrm{int}\{v_k \geq 1\} \supset A_k$, joten

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v_k|^p\, dx - \mathrm{Cap}_p(A_{k-1}) &\leq \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla \underbrace{v_k}_{=\max\{v_{k-1},u_k\}}|^p\, dx + \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla \min(v_{k-1}, u_k)|^p\, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u_k|^p\, dx + \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v_{k-1}|^p\, dx \\
&\leq \mathrm{Cap}_p(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} + \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v_{k-1}|^p\, dx\,.
\end{aligned}$$

Siis

$$\int |\nabla v_k|^p\, dx - \int |\nabla v_{k-1}|^p\, dx \leq \mathrm{Cap}_p(A_k) - \mathrm{Cap}_p(A_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

Summaamalla:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v_k|^p\, dx &\leq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Cap}_p(A_j) - \mathrm{Cap}_p(A_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{2^j} \\
&= \mathrm{Cap}_p(A_k) + \varepsilon \underbrace{\sum_{j=1}^{k} 2^j}_{<\varepsilon}\,.
\end{aligned}$$

Joten

$$\|v_k\|_{p^*} \leq c\|\nabla v_k\|_p \leq cM^{\frac{1}{p}} + \varepsilon \quad \text{kaikilla } k\,.$$

Siis $v_k \to v$ $L^{p^*}(\mathbf{R}^n)$:ssa, joten $v \in L^{p^*}(\mathbf{R}^n)$. Edelleen $\nabla v_k \to v$ heikosti $L^p(\mathbf{R}^n)$:ssä. Siten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cap}_p\big(\bigcup_j A_j\big) &\leq \int |\nabla v|^p\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int |\nabla v_k|^p\, dx \\
&\leq \lim_{k\to\infty}(\inf)\mathrm{Cap}_p(A_k) + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Lauseen 8.6 todistus: Voidaan olettaa, että $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_p(A_k) < \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $u_k \in \mathcal{K}^p$, $A_k \subset \mathrm{int}\{u_k \geq 1\}$ ja

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla u_k|^p \, dx \leq \mathrm{Cap}_p(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \,.$$

Olkoon $B_j = \bigcup\limits_{k=1}^{j} A_k$, jolloin $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ ja $\bigcup B_j = \bigcup A_k$. Nyt jos $v_k = \max(u_1, u_2, \dots, u_k)$, niin

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cap}_p(B_k) \leq \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla v_k|^p \, dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla \max(u_1, u_2, \dots, u_k)|^p \, dx \\
&= \int\limits_{\{u_1 \geq \max\{u_2, \dots, u_k\}\}} |\nabla u_1|^p \, dx + \int\limits_{\{u_2 > \max\{u_1, u_3, \dots, u_k\}\}} |\nabla u_2|^p \, dx + \dots + \int\limits_{\{\}} |\nabla u_k|^p \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla u_j|^p \, dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} \big(\mathrm{Cap}_p(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cap}(A_j) + \varepsilon \,.
\end{aligned}$$

□

8.7. Huomautus. Jos $0 < \mathrm{Cap}_p(A) < \infty$, niin A ei ole Cap_p-mitallinen.

8.8. Huomautus. Jos $\mathrm{Cap}_p(A) = 0$, niin Hausdorff-dimensio $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n - p$. Jos $\mathcal{H}^{n-p}(A) < \infty$, niin $\mathrm{Cap}_p(A) = 0$.

8.9. Lause. *Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}^n$*

(i) $Cap_p(A) = \inf\{Cap_p(G) : G \text{ avoin}, G \supset A\}$

(ii) $Cap_p\big(\{\lambda x : x \in A\}\big) = \lambda^{n-p} Cap_p(A)$, $\lambda > 0$

(iii) $Cap_p(A) = Cap_p(LA)$, *kun* $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *on isometria.*

(iv) $Cap_p(B(x_0, r)) = r^{n-p} Cap_p(B(0,1)) = c_{n,p} r^{n-p}$ *kaikilla* $r > 0$ *kaikilla* $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

(v) $|A| \leq c Cap_p(A)^{\frac{n}{n-p}}$, *missä* $c = c(n,p)$.

(vi) $Cap_p(A \cup B) + Cap_p(A \cap B) \le Cap_p(A) + Cap_p(B)$.

(vii) *Olkoot* $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ *kompakteja. Tällöin*

$$\lim_{j\to\infty} Cap_p(K_j) = Cap_p\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j\big)\,.$$

TODISTUS: (i) selvä, (ii)-(iv) muuttujanvaihto (HT).

(v) Olkoon $u \in \mathcal{K}^p$ s.e. $u \ge 1$ A:n avoimessa ympäristössä G. Sobolevin epäyhtälö antaa

$$|A| \le \|u\|_{p^*}^{p^*} \le c \cdot \|\nabla u\|_p^{p^*}\,,$$

mistä väite seuraa ottamalla infimum yli kaikkien tällaisten funktioiden u. $\not\square$

(vi) Olkoon $u, v \in \mathcal{K}^p$ s.e. $u \ge 1$ A:n ympäristössä ja $v \ge 1$ B:n ympäristössä- Tällöin

$$\max(u,v)\,,\ \min(u,v) \in \mathcal{K}_p \text{ ja}$$

$$\max(u,v) \ge 1\ A \cup B\text{:n ympäristössä, } \min(u,v) \ge 1\ A \cap B\text{:n ympäristössä}\,.$$

Niinpä

$$\mathrm{Cap}_p(A \cup B) + \mathrm{Cap}_p(A \cap B) \le \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla \max(u,v)|^p\,dx + \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla \min(u,v)|^p\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^p\,dx + \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla v|^p\,dx$$

Ottamalla infimum yli u:n ja v:n saadaan väite. $\not\square$

(vii) Toinen epäyhtälö on selvä, koska

$$\mathrm{Cap}_p(\bigcap_k A_k) \le \lim \mathrm{Cap}_p(A_k)\,, \text{ koska } A_k \supset \bigcap_j A_j\,.$$

"$\ge$" Olkoon U avoin ja $U \supset \bigcap_k K_k$. Koska U on avoin ja K_k kompakteja, niin on olemassa[14] m, jolle

$$K_k \subset U \quad \text{kaikilla } k \ge m.$$

[14]Muista: jos $\forall k\ \exists x_k \in K_k \setminus U$, $x_k \in K_j$ kaikilla $k \ge j$, joten on olemassa x_0 s.e. $x_n \to x_0$ (osajono), jolloin koska $\complement U$ on suljettu, $x_0 \notin U$, mutta $x_0 \in K_j\ \forall j$; ristiriita.

Siispä

$$\lim \ \mathrm{Cap}_p(K_k) \leq \ \mathrm{Cap}_p(U)$$

Kohdasta (i) saadaan ottamalla infimum yli avointen ympäristöjen U

$$\lim_{k\to\infty} \ \mathrm{Cap}_p(K_k) \leq \inf_{\substack{\bigcap_k \subset U K_k \\ U \text{ avoin}}} \ \mathrm{Cap}_p(U) = \ \mathrm{Cap}_p(\bigcap_k K_k)\,.$$

$\square$

8.10. Huomautus. (vii) ei välttämättä tosi, jos K_k:t eivät ole kompakteja:
Esimerkki: Jos $n = 2$, $A_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} \{\frac{1}{k}\} \times [0,1]$, jolloin $\cap A_j = \emptyset$, mutta

$$\mathrm{Cap}_p(A_j) > c_{n,p} > 0\,.$$

8.11. Määritelmä. Ominaisuus $P(x)$ on tosi (tms) *p-kvasi-melkein kaikkialla* (p-kvasi m.k., p-q.e.) jos

$$\mathrm{Cap}_p\{x : P(x) \text{ ei tosi}\} = 0\,.$$

8.12. Huomautus. Koska $\mathrm{Cap}_p(A) = 0 \Rightarrow |A| = 0$, niin q-kvasi m.k. pätevä ominaisuus pätee m.k.

8.13. Lause. *Jos $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, niin raja-arvo*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy \quad \textit{on olemassa}$$

p-kvasi m.k. $x \in \mathbf{R}^n$.

8.14. Huomautus. Lebesguen differentioituvuuslause: Jos $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$,

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy = u(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbf{R}^n\,.$$

Lauseen 8.13 varten tarvitaan heikon tyypin kapasiteettiepäyhtälö.

8.3. Lemma. *Jos* $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ *s.e.* $u = 0$ $\complement B(0,R)$*:ssa jollain* $R > 0$*, niin*

$$Cap_p\big(\{x : Mu(x) > t\}\big) \leq \frac{c}{t^p} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^p \, dx$$

kaikilla $t > 0$*, missä* $c = c(n, p, R)$ *ja*

$$Mu(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy \quad \textit{(Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio)}$$

Lemman 8.3 todistamista varten tarvitsemme peitelauseen.

8.15. Lause. (Besicovitchin peitelause) *On olemassa vakio* $N = N(n) \in \mathbf{N}$ *s.e. jos* $\mathcal{F}$ *on mielivaltainen kokoelma* $\mathbf{R}^n$*:n suljettuja palloja s.e.*

$$\sup\{\operatorname{diam} B : B \in \mathcal{F}\} < \infty$$

ja $A = \mathcal{F}$*:n pallojen keskipisteiden joukko, niin on olemassa* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_N \subset \mathcal{F}$ *s.e. jokainen* $\mathcal{G}_i$ *on (keski)numeroituva joukko pareittain pistevieraita* $\mathcal{F}$*:n palloja ja*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B\,.$$

TODISTUS: Esim [Ziemer, p. 9] tai reaalianalyysi. □

8.16. Määritelmä. Olkoon f mitallinen ⇒

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f|\, dy$$

on f:n *(Hardy-Littlewood) maksimaalifunktio.*

LEMMAN 8.3 TODISTUS: (Voidaan olettaa, että $u \geq 0$ (tarvitsemme $|u|$:ta)). Olkoon $r > 0$, $t > 0$.

$$E_t := \{x : Mf(x) > t\} \cap B(x, r) \Rightarrow E_t \text{ avoin (HT.)}$$

Valitaan jokaisella $x \in E_t$, $r_x \leq 2(RV_r)$ s.e.

$$\fint_{B(x,r_x)} u\,dx > t$$

Besicovitch $\Rightarrow$ on olemassa $N = N(n)$ jonoa

$$B_{ij} := B(x_{ij}, r_{x_{ij}})\,, \quad i = 1, \dots, N\,,\ j = 1, 2, \dots$$

näistä palloista s.e.

$$B_{ij} \cap B_{ik} = \emptyset \quad \text{kun } j \neq k \text{ ja}$$

$$E_t \subset \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B}_{ij}\,.$$

Merkitään

$$u_{ij} = \fint_{B_{ij}} u\,dx$$

Laajennuslauseen avulla nähdään (HT), että on olemassa sellaiset$v_{ij} \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, joille $v_{ij} = 0$ $\complement 2B_{ij}$:ssä, $v_{ij} = |u - u_{ij}|$ B_{ij}:ssä ja

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v_{ij}|^p\,dx \leq c \int_{B_{ij}} |\nabla u|^p\,dx\,. \tag{8.4}$$

Kiinnitetään $i \in \{1, \dots, N\}$. Määritellään

$$v_i := \sup_j v_{ij}, \qquad \text{jolloin} \qquad v_i \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)\,,$$

koska

$$\begin{aligned}
\|v_i\|_{1,p}^p &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2B_{ij}} |v_{ij}|^p + |\nabla v_{ij}|^p\,dx \\
&\overset{\substack{\text{Poincaré} \\ (v_{ij} \in W_0^{1,p}(2B_{ij}))}}{\leq} c(R^p + 1) \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2B_{ij}} |\nabla v_{ij}|^p\,dx \\
&\overset{8.4}{\leq} \tilde{c} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_{ij}} |\nabla u|^p\,dx \overset{B_{ij}\text{:t par.pistev.}}{\leq} \tilde{c} \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^p\,dx\,.
\end{aligned}$$

Olkoon

$$v := \sum_{i=1}^{N} v_i\,.$$

Tällöin $v+u>t$ E_t:ssä ja

$$\frac{v+u}{t}\in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)\subset\mathcal{K}^p$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cap}_p(E_t) &\le \int\limits_{\mathbf{R}^n}\Big|\frac{\nabla(v+u)}{t}\Big|^p\,dx\\ &\le \frac{N^p}{t^p}\Big(\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\int\limits_{\mathbf{R}^n}|\nabla v_i|^p\,dx}_{\le c\int|\nabla v|^p}+\int\limits_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^p\,dx\Big)\\ &\le \frac{c}{t^p}\int\limits_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^p\,dx\,.\end{aligned}$$

Antamalla $r\to\infty$, väite seuraa (L. 8.2) □

Lauseen 8.13 todistus:

Kertomalla u C_0^∞-funktiolla voidaan olettaa, että $u=0$ $\complement B(0,R)$ jollain $R>0$, koska p-kapasiteetti on subadditiivinen. Olkoon

$$\Phi(u,x):=\limsup_{r\to\infty}\fint_{B(x,r)}|u|\,dy-\liminf_{r\to0}\fint_{B(x,r)}|u|\,dy\,.$$

Tällöin $\Phi(u,x)\ge0$. Riittää osoittaa, että $\Phi(u,x)=0$ p-kvasi m.k.

Olkoon $\varepsilon>0$. Olkoon $t>0$ ja valitaan $\varphi\in C_0^\infty(B(0,R))$ s.e.

$$\|u-\varphi\|_{1,p}<\frac{t^p}{2^pc}\varepsilon\,,\ \text{missä } c \text{ on Lemman 8.3 vakio}\,.$$

Nyt

$$\Phi(u,x)\overset{\varphi\text{ jva}}{=}\Phi(u-\varphi,x)\le 2M(u-\varphi)(x)\,.$$

Siis

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cap}_p\big(\{x:\Phi(u,x)>t\}\big)\\ &\le \mathrm{Cap}_p\big(\{x:M(u-\varphi)(x)>t\}\big)\le\frac{2^pc}{t^p}\underbrace{\int\limits_{\mathbf{R}^n}|\nabla u-\nabla\varphi|^p\,dx}_{\le\frac{t^p}{2^pc}\varepsilon}<\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Koska t,ε mielivaltaisia,

$$\mathrm{Cap}_p\big(\{x:\Phi(u,x)>0\}\big)=0\,.$$

Siis $\Phi(u,x)=0$ p-kvasi m.k. x. □

8.17. Määritelmä. Sanotaan, että funktio $u\Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ on *p-kvasijatkuva* Ω:ssa, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $E_\varepsilon \subset \Omega$ s.e.

$$\mathrm{Cap}_p(E_\varepsilon) < \varepsilon \text{ ja } u|_{\Omega \setminus E_\varepsilon} \text{ on jatkuva ja reaaliarvoinen } \Omega \setminus E_\varepsilon\text{:ssa}\,.$$

Rajoittumafunktiomerkintä $v = u|_{\Omega\setminus E_\varepsilon}$ tarkoittaa, että v on vain $\Omega\setminus E_\varepsilon$:ssa määritelty funktio $v : \Omega\setminus E_\varepsilon \to \mathbf{R}$.

8.18. Lause. *Jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$, niin on olemassa p-kvasijatkuva $v : \Omega \to \mathbf{R}$ s.e. $v = u$ m.k. Ω:ssa.*

TODISTUS: Tyhjennetään $\Omega = \bigcup \Omega_j$, $\Omega_j \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega$. Kiinnitetään j. Valitaan $\eta_j \in C_0^\infty(\Omega)$ s.e. $\eta_j = 1$ Ω_j:ssä. Tällöin

$$\Psi_{j,k} = \varphi_k \eta_j \in C(\mathbf{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$$

on Cauchy-jono, joten sillä on Lauseen 8.20 nojalla kvasitasaisesti suppeneva osajono Ψ_{j,k_i}. Valitaan osajonot s.e.

$$(\Psi_{j+1,k_i}) \subset (\Psi_{j,k_i})$$

ja olkoon

$$v_j = \Psi_{j,k_j} \quad \text{diagonaalijono.}$$

Olkoon $K \subset \Omega$ kompakti ja $\varepsilon > 0$. Silloin $K \subset \Omega_j$ jollain j ja on olemassa $G \subset \mathbf{R}^n$ s.e. $\mathrm{Cap}_p(G) < \varepsilon$ ja

$$\Psi_{j,k_i} \quad \text{suppenee tasaisesti } \mathbf{R}^n \setminus G\text{:ssä}\,.$$

Koska $v_j \subset (\Psi_{j,k_i})$:n osajono, niin v_j suppenee tasaisesti $\mathbf{R}^n\setminus G$:lla, erityisesti $\varphi_{k_j} = v_j$ K:lla, joten φ_{k_i} suppenee tasaisesti K:lla.

Siis p-kvasi m.k. x on olemassa raja-arvo

$$\lim_{k_i} \varphi_{k_i}(x) = v(x)$$

ja v on kvasijatkuva Ω:ssa. Lisäksi $v = u$ m.k. kvasi $\varphi_{k_i} \to u$ m.k. □

8.19. Lause. *Olkoon u ja v p-kvasijatkuvia Ω:ssa. Jos $u(x) = v(x)$ m.k. $x \in \Omega$, niin $u(x) = v(x)$ p-kvasi m.k. $x \in \Omega$.*

Todistus: Olkoon $N = \{x \in \Omega : u(x) \neq v(x)\}$.
Väite: $\mathrm{Cap}_p(N) = 0$.
Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska u ja v ovat kvasijatkuvia, on avoin joukko $G \subset \Omega$ s.e. $\mathrm{Cap}_p(G) < \varepsilon$ ja sekä $u|_{\Omega\setminus G}$ että $v|_{\Omega\setminus G}$ ovat jatkuvia (ja reaaliarvoisia)[15] Nyt

$$N \cap (\Omega\setminus G)$$

on $\Omega\setminus G$:ssa avoin joukko. Siis on olemassa avoin joukko $U \subset \Omega$ s.e.

$$N \cap (\Omega\setminus G) = U \cap (\Omega\setminus G) = U\setminus G \subset N \Rightarrow |U\setminus G| \leq |N| = 0\,.$$

Nyt $N \subset G \cup U$, joten

$$\mathrm{Cap}_p(N) \leq \mathrm{Cap}_p(G \cup U) = \mathrm{Cap}_p(G) < \varepsilon\,,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että G ja $G \cup U$ ovat avoimia sekä

$$|(G \cup U)\setminus G| = 0\,.$$

□

8.20. Lause. *Olkoon $\varphi \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n) \cap C(\mathbf{R}^n)$ Cauchy-jono. Tällöin sillä on osajono φ_{j_k} s.e. jokaisella $\varepsilon > 0$ on avoin $G \subset \mathbf{R}^n$, jolle $\mathrm{Cap}_p(G) < \varepsilon$ ja φ_{j_k} suppenee tasaisesti $\mathbf{R}^n\setminus G$:ssa.*

Todistus: Koska φ_j on Cauchy, on olemassa osajono, jota merkitään jälleen φ_j:llä, s.e.

$$\|\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_{j+1}\|_p < 2^{-2j}.$$

Silloin sarja

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^n} 2^{jp} |\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_{j+1}|^p \, dx &\leq \sum 2^{jp} \| \underbrace{\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_{j+1}}_{2^{-2jp}} \|_p^p \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-jp} < \infty\,.\end{aligned}$$

[15] $G = \widetilde{E}_{\varepsilon/2} \cup E_{\varepsilon/2}$

Olkoon $\varepsilon > 0$. On olemassa j_ε s.e.

$$\sum_{j=j_\varepsilon}^{\infty} 2^{jp} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_{j+1}|^p \, dx < \varepsilon$$

Olkoon

$$E_j = \{x : |\varphi_j(x) - \varphi_{j+1}(x)| > 2^{-j}\} ,$$

joka on avoin joukko. Nyt funktio

$$\frac{\varphi_j - \varphi_{j+1}}{2^{-j}}$$

on sallittu kapasiteettia laskettaessa, joten

$$\mathrm{Cap}_p(E_j) \le \int\limits_{\mathbf{R}^n} 2^{jp} |\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_{j+1}|^p \, dx$$

Jos

$$E_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j ,$$

niin $E_\varepsilon \subset \mathbf{R}^n$ on avoin ja

$$\mathrm{Cap}_p(E_\varepsilon) \le \sum_{j=j_\varepsilon}^{\infty} 2^{jp} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_{j+1}|^p \, dx < \varepsilon .$$

Edelleen kun $j_\varepsilon \le j < k$, niin

$$|\varphi_j - \varphi_k| \le \sum_{i=j}^{k-1} |\varphi_i - \varphi_{i+1}| \overset{CE_\varepsilon\text{:ssa}}{\le} \sum_{i=j}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-j} \quad \mathbf{R}^n \backslash E_\varepsilon .$$

Siis jono (φ_j) on tasaisesti Cauchy $\mathbf{R}^n \backslash E_\varepsilon$:ssa, missä se suppenee tasaisesti. □

8.21. Lause. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$ p-kvasijatkuva. Tällöin*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} u \, dy = u(x) \quad p\text{-kvasi m.k. } x \in \Omega .$$

TODISTUS: Koska kapasiteetti on subadditiivinen, voidaan olettaa, että $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ ja $u = 0$ $\complement B(0,R)$:ssä.

Olkoon $t > 0$ ja

$$E_t = \{x : \limsup_{r\to 0} | \fint_{B(x,r)} u\, dy - u(x)| > t\}\,,$$

jolloin riittää osoittaa, että $\mathrm{Cap}_p(E_t) = 0$.

Valitaan $\varphi_j \in C_0^\infty(B(0,R))$ s.e. $\varphi_j \to u$ $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$:ssä, $\varphi_j(x) \to u(x)$ m.k. $x \in \Omega$ pisteittäin ja kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa G_ε s.e. $\varphi_j(x) \to u(x)$ tasaisesti $\mathbf{R}^n \setminus G_\varepsilon$:ssa ja $\mathrm{Cap}_p(G_\varepsilon) < \varepsilon$. (Harkitse!) Nyt

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} | \fint_{B(x,r)} u\, dy - u(x)| \\
&\le \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |u(y) - \varphi_j(y)|\, dy + |u(x) - \varphi_j(x)| \\
&\le M|u - \varphi_j|(x) + |u(x) - \varphi_j(x)|\,.
\end{aligned}$$

Siispä

$$E_t \subset \underbrace{\{x : M(u-\varphi_j)(x) > \frac{t}{2}\}}_{=:\mathcal{M}} \cup \underbrace{\{x : |u(x) - \varphi_j(x)| > \frac{t}{2}\}}_{\subset G_\varepsilon,\ \text{kun } j \text{ iso,}}$$

missä

$$\mathrm{Cap}_p(\mathcal{M}) \le \frac{c}{t^p} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla u - \nabla \varphi_j|^p\, dy < \varepsilon,\ \text{kun } j \text{ iso}\,.$$

Näin ollen

$$\mathrm{Cap}_p(E_t) \le \mathrm{Cap}_p(\mathcal{M}) + \mathrm{Cap}_p(G_\varepsilon) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

joten $\mathrm{Cap}_p(E_t) = 0$. $\square$

8.22. Seuraus. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$ p-kvasijatkuva. Tällöin*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy = 0 \tag{8.5}$$

p-kvasi m.k. $x \in \Omega$.

Todistus: Koska Cap_p on subadditiivinen, riittää osoittaa, että 8.5 pätee q.e. pallossa $B \subset\subset \Omega$. Valitaan $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta = 1$ B:ssä, $q \in \mathbf{Q}, W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$. Silloin

$$|\eta(u-q)| \quad \text{kvasijatkuva ja}$$

on olemassa $E_q \subset \mathbf{R}^n$ s.e. $\operatorname{Cap}_p(E_q) = 0$ ja

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} |\eta(u-q)|\, dy = |\eta(u-q)|(x) \quad \text{kaikilla } x \notin E_q.$$

Niinpä

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} |u(y)-q|\, dy = |u(x)-q| \quad \text{kaikilla } x \in B \backslash E_q\,. \tag{8.6}$$

Olkoon

$$E = \bigcup_{q\in\mathbf{Q}} E_q\,,$$

jolloin $\operatorname{Cap}_p(E) = 0$ ja (8.6) on tosi kaikilla $x \in B\backslash E$ ja kaikilla $q \in \mathbf{Q}$. Jatkuvuuden nojalla (8.6) pätee kaikilla $q \in \mathbf{R}$ kun $x \in B\backslash E$. Erityisesti se pätee kun $q = u(x)$. □

8.23. Huomautus. Seurausta 8.22 voidaan hieman parantaa: pätee

$$⨍_{B(x,r)} |u(y)-u(x)|^{p^*} \to 0 \quad p\text{-kvasi m.k. } x$$

(tätä varten pitää ensin osoittaa, että

$$r^{p-n} \int\limits_{B(x,r)} |\nabla u|^p \to 0 \quad p\text{-kvasi m.k. } x.$$

8.24. Lause. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Tällöin $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos on olemassa sellainen p-kvasijatkuva funktio $v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, jolle $v(x) = u(x)$ m.k. $x \in \Omega$ ja $v(x) = 0$ p-kvasi m.k. $x \in \complement\Omega$.*

TODISTUS: "$\Rightarrow$": Olkoon $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, jolloin on olemassa $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ s.e. $\varphi_j \to u$ $W^{1,p}(\Omega)$:ssa ja m.k. $x \in \Omega$ pisteittäin.

Lauseen 8.20 nojalla on olemassa osajono φ_j, joka suppenee p-kvasi m.k. kohti kvasijatkuvaa funktiota v $\mathbf{R}^n$:ssa. Edelleen

$$0 = \lim \varphi_j(x) \underset{p\text{-kvasi m.k.}}{=} v(x) \quad \text{kun } x \notin \Omega\,.$$

$\not\emptyset$

"$\Leftarrow$": Pitää osoittaa, että $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että Ω on rajoitettu (rajoittamatonkin saadaan sitten ykköstä osittamalla $\Omega \cap (B(0, j+1) \setminus \overline{B}(0, j-1)$:ssä, HT.)

Edelleen, koska

$$\max(\min(v, k), -k) \to v \quad W^{1,p}(\Omega)\text{:ssa},$$

voidaan olettaa, että v on rajoitettu. (Miksi?)

Olkoon

$$E = \{x \in \partial\Omega : v(x) \neq 0\},$$

jolloin oletuksen nojalla $\mathrm{Cap}_p(E) = 0$). Koska v on kvasijatkuva, voidaan valita avoimet $G_j \subset \mathbf{R}^n$ s.e. $E \subset G_j$, $v|_{\complement G_j}$ jatkuva ja

$$\mathrm{Cap}_p(G_j) \to 0 \quad (j \to \infty)\,,$$

Silloin on olemassa $\varphi_j \in \mathcal{K}^p$ s.e. $0 \le \varphi_j \le 1$, $\varphi_j = 1$ G_j:ssä ja

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla \varphi_j|^p \, dx \to 0$$

Edelleen

$$\|\varphi_j\|_{p^*} \le C \|\nabla \varphi_j\|_p \to 0\,,$$

joten voidaan olettaa, että $\varphi_j(x) \to 0$ m.k. x.

Lauseesta 3.9 saadaan

$$\omega_j := (1 - \varphi_j) v \in W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Edelleen

$$\lim_{x \to y} \omega_j(x) = 0 \quad \text{kaikilla } y \in \partial\Omega\,,$$

joten $\omega_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lisäksi dominoidun konvergenssin lauseen avulla

$$\int_\Omega |\omega - v|^p \, dx = \int_\Omega \overbrace{|\varphi_j v|^p}^{\leq |v|^p \to 0 \text{ m.k}} \, dx \to 0$$

ja

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \omega_j - \nabla v|^p \, dx &= \int |\nabla(\varphi_j v)|^p \, dx \\ &\leq 2^p \int_\Omega \underbrace{|v|}_{\leq M} |\nabla \varphi_j|^p \, dx + 2^p \int \overbrace{\underbrace{|\varphi_j|}_{\to 0 \text{ m.k.}} |\nabla v|^p}^{\leq |\nabla v|^p} \, dx \to 0.\end{aligned}$$

Siispä $\omega_j \to v$ $W^{1,p}(\Omega)$:ssa ja siten $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

9. Liite: L^p-avaruuden duaalista

Tässä kappaleessa tutkimme L^p-avaruuksien duaalia. (Funktionaalianalyysin luennoilla tämä tehtäneen myös, mutta ehkä eri tavalla.)

9.1. Määritelmä. Normiavaruuden $(X, \|\cdot\|)$ *duaali* X^* koostuu kaikista jatkuvista lineaarikuvauksista

$$l : X \to \mathbf{R}\,.$$

X^*:stä saadaan Banach-avaruus normilla

$$\begin{aligned}\|l\|_* &= \sup_{\|x\|\le 1} |l(x)| \\ &= \inf\{M > 0 : |l(x)| \le M\|x\| \text{ kaikilla } x \in X\}\end{aligned}$$

9.2. Huomautus.

$$l \in X^* \Rightarrow |l(x)| \le \|l\|_* \|x\| \text{ kaikilla } x \in X$$

$$l \in X^* \Leftrightarrow l : X \to \mathbf{R} \text{ on lineaarinen ja on olemassa } M \in \mathbf{R}, \text{ jolle}$$

$$|l(x)| \le M\|x\| \text{ kaikilla } x \in X$$

Aloitetaan lauseella:

9.3. Lause. *Olkoon* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *ja* $g \in L^q(A)$. *Määritellään*

$$\Phi_n(f) := \int_A f g \, dx \quad , f \in L^p(A)\,.$$

Tällöin $\Phi \in (L^p(A))^*$ *ja* $\underbrace{\|\Phi\|}_{\textit{duaalinen}} = \|g\|_q$.

TODISTUS:

$$|\Phi(f)| = \Big|\int_A f g \, dx\Big| \overset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_p \|g\|_q$$

$\Rightarrow\ \Phi : L^p(A) \to \mathbf{R}$ ja rajoitettu lineaarikuvaus ts.

$$\Phi \in (L^p(A))^* \quad \text{ja} \quad \|\Phi\| \le \|g\|_q \,.$$

Osoitetaan, että $\|\Phi\| = \|g\|_q$:

Valitaan

$$f(x) = \begin{cases} |g(x)|^{q-1} \dfrac{\overbrace{g(x)}^{g\text{:n merkki}}}{|g(x)|} & , g(x) \neq 0 \\ 0 & , g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ |f(x)|^p = |g(x)|^{(q-1)p} \overset{p=\frac{q}{q-1}}{=} |g(x)|^q \\ &\Rightarrow\ \|f\|_p = \|g\|_q^{q-1} \quad \text{ja} \quad f \in L^p(A) \\ &\therefore\ \Phi(f) = \int_A |g|^q \, dx = \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

$$\therefore\ \|\Phi\| \ge \|g\|_q$$

$\therefore\ \|\Phi\| = \|g\|_q \,.$ □

Käänteistä puolta varten tarvitaan lemma: Määritellään

$$\operatorname{sign}(g)(x) := \begin{cases} 1, & \text{jos } g(x) > 0 \\ 0, & \text{jos } g(x) = 0 \\ -1, & \text{jos } g(x) < 0 \end{cases}$$

9.1. Lemma. *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja $|A| < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jos g on integroituva A:ssa (mitallinen riittää), ja on olemassa $M < \infty$ s.e.*

$$\Big| \int_A f g \, dx \Big| \le M \|f\|_{L^p(A)}$$

kaikilla rajoitetuilla $f \in L^p(A)$, niin $g \in L^q(A)$ ja $\|g\|_q \le M$.

Todistus: HT □

Tarvitaan vielä Radon-Nikodymin lausetta. Sitä varten: Olkoon $\mathcal{M}$ $\mathbf{R}^n$:n Lebesgue-mitallisten joukkojen σ-algebra. Kuvaus $\nu : \mathcal{M} \to \mathbf{R}^n$ on *merkkimitta* (signed measure, täysadditiivinen joukkofunktio), jos

(i) $\nu(\emptyset) = 0$ ja

(ii) $\nu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{r=1}^{\infty} \nu(A_i)$ aina kun $A_i \in \mathcal{M}$ pareittain pistevieraita.

9.4. Huomautus. Pätee: ν merkkimitta $\Leftrightarrow$ on olemassa ei-negatiiviset mitat ν^+ ja ν^- s.e.

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \,.$$

9.5. Määritelmä. Sanotaan, että merkkimitta ν on *absoluuttisesti jatkuva* mitan μ suhteen (molemmat $\mathcal{M}$:llä), jos

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0, \text{ kun } E \in \mathcal{M},$$

tällöin merkitään $\nu << \mu$.

9.6. Lause. (Radon-Nikodym) *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen. Olkoon ν äärellinen merkkimitta s.e. ν on absoluuttisesti jatkuva Lebesgue-mitan suhteen. Tällöin on $g \in L^1(A)$ s.e.*

$$\nu(E) = \int_E g\,dx \qquad \textit{kaikilla } E \in \mathcal{M}, E \subset A\,.$$

Lisäksi g on m.k. yksikäsitteisesti määritelty, ts. jos $\widetilde{g}$ on toinen tällainen, niin $g = \widetilde{g}$ m.k. A:ssa.

TODISTUS: Rudin: Real and Complex analysis. □

9.7. Lause. (F. Riesz) *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja $\Phi \in (L^p(A))^*$, $1 < p < \infty$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $g \in L^q(A)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ s.e.*

$$\Phi(f) = \int_A fg\,dx$$

ja

$$\|\Phi\| = \|g\|_q\,.$$

9.8. Huomautus. Yhdessä Lauseen 9.3 kanssa tämä sanoo siis, että

$$(L^p(A))^* = L^q(A)\,, \qquad \text{kun } 1 < p < \infty \text{ ja } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

TODISTUS: Yksikäsitteisyys: Olkoon g ja $\widetilde{g}$ tällaisia.

$$\Rightarrow \Psi(f) := \int\limits_A f(g - \widetilde{g})\,dx = 0 \qquad \text{kaikilla } f \in L^p(A)\,,$$

jolloin

$$9.3 \Rightarrow \Psi \in (L^p(A))^* \qquad \text{ja} \qquad 0 = \|\Psi\| = \|g - \widetilde{g}\|_q\,.$$

$\not\subset$

Eksistenssi:

1. $|A| < \infty$. Olkoon $E \in \mathcal{M}$ mitallinen $\Rightarrow \chi_{E\cap A} \in L^p$, $\|\chi_{E\cap A}\| = |E \cap A|^{\frac{1}{p}} \leq |A|^{\frac{1}{p}} < \infty$. Määritellään

$$\nu(E) := \Phi(\chi_{E\cap A}) \in \mathbf{R}\,.$$

Tällöin ν on merkkimitta $\mathcal{M}$:llä (HT). Edelleen, jos $E \in \mathcal{M}$ s.e. $|E| = 0$, niin $\chi_{E\cap A} = 0 \in L^p$

$$\Rightarrow \nu(E) = \Phi(\chi_{E\cap A}) = \Phi(0) \overset{\Phi \text{ ensi.}}{=} 0$$

Radon-Nikodym $\Rightarrow$ on olemassa $g \in L^1(A)$ s.e.

$$\nu(E) = \int\limits_E g\,dx \qquad \text{kaikilla } E \subset A,\ E \in \mathcal{M}\,.$$

Väite: g on etsitty funktio.
TODISTUS:

a) Olkoon $f \in L^p(A)$, yksinkertainen $f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i \cap A}$

$$\Rightarrow \int\limits_A fg\,dx = \sum_{i=1}^k c_i \int\limits_A \chi_{A_i\cap A} g\,dx = \sum_{i=1}^k c_i \int\limits_{A_i\cap A} g\,dx = \sum_{i=1}^k c_i \nu(A_i)$$
$$= \sum c_i \Phi(\chi_{A_i\cap A}) \overset{\Phi\text{-ln}}{=} \Phi(\sum c_i \chi_{A_i\cap A}) = \Phi(f)\,.$$

b) Olkoon $f \geq 0$ rajoitettu ja mitallinen. Valitaan $0 \leq f \nearrow f$ f_i yksinkertainen.

$$\Rightarrow \|f - f_i\|_p^p = \int_A |f_i - f|^p \, dx \overset{\text{dom.konv.}l}{\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}} 0$$

ts. $f_i \to f$ $L^p(A)$:ssa.

$\therefore$

$$\Phi(f) \overset{\Phi \text{ jva}}{=} \lim_{i\to\infty} \Phi(f_i) \overset{a)}{=} \lim_{i\to\infty} \int_A f_i g \, dx$$

$$= \int_A f g \, dx \,,$$

koska

$$|f_i g| \leq |f_i||g| \leq |f||g| \leq M|g| \in L^1(A) \quad + \text{ dom.konv.}$$

c) Olkoon f rajoitettu ja mitallinen.

$$\Rightarrow \Phi(f) = \Phi(f^+) - \Phi(f^-) \overset{b)}{=} \int_A (f^+ - f^-) g \, dx = \int_A f g \, dx \,.$$

Nyt

$$\Big| \int_A g f \, dx \Big| = |\Phi(f)| \overset{\Phi \in (L^p(A))^*}{\leq} \|\Phi\| \|f\|_{L^p} \,, \text{ kaikilla raj.mitall.}$$

joten Lemma 9.1 $\Rightarrow$ $g \in L^q(A)$ ja $\|g\|_q \leq \|\Phi\| < \infty$.

d) Grande finale:

$$\text{L.9.3} \Rightarrow \widetilde{\Phi}(f) = \int_A f g \, dx \,, f \in L^p(A)$$

Määritellään rajoitettu lineaarikuvaus : $L^p(A) \to \mathbf{R}$ ja $\|\widetilde{\Phi}\| = \|g\|_q$.

Väite: $\Phi = \widetilde{\Phi}$.

Tiedetään, että $\Phi(f) = \widetilde{\Phi}(f)$ kaikilla rajoitetuilla f. Olkoon siis $f \in L^p(A)$ ja valitaan jono rajoitettuja $f_i \in L^p(A)$ s.e. $f_i \to f$ $L^p(A)$:ssa (esim. $f_i = \min(\max(f_i - i), i)$). Siis

$$\Phi(f) \overset{\text{jva}}{=} \lim \Phi(f_i) \overset{c)}{=} \lim \widetilde{\Phi}(f_i) \overset{\text{jva}}{=} \widetilde{\Phi}(f) \,.$$

$\not\subset$

2. $|A| = \infty$. Olkoon $A_i = A \cap B(0,i) \Rightarrow |A_i| < \infty$. $\Phi_i : L^p(A_i) \to \mathbf{R}$ määritellään seuraavaa: jos $f \in L^p(A_i)$, niin asetetaan

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} f(x) & , x \in A_i \\ 0 & , x \notin A_i \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{f} \in L^p(A)$. asetetaan $\Phi_i(f) = \Phi(\tilde{f})$.

$$\Rightarrow \Phi_i \in (L^p(A_i))^*$$

Kohta 1.$\Rightarrow$ on olemassa yksikäsitteinen $g_i \in L^q(A_i)$ s.e.

$$\Phi_i(f_i) = \int_{A_i} f g_i \, dx \quad \text{kaikilla } f \in L^p(A_i)$$

ja $\|\Phi\| \geq \|\Phi_i\| = \|g_i\|_q$.

Nyt

$$g_i(x) = g_j(x) \quad , \text{kun } x \in A_i \cap A_j$$

(Syy: $i > j$, $A_i \supset A_j = A_i \cap A_j \Rightarrow kf \in L^p(A_j)$:

$$\Rightarrow \Phi_j(f) = \int_{A_j} f g_j \, dx$$

$$\underset{\text{nollaj.}}{\Phi(\tilde{f})} = \Phi_i(\tilde{f}) = \int_{A_i} \tilde{f} g_i \, dx = \int_{A_j} f g_i \, dx$$

$\Rightarrow \Phi_j$:tä es. g_i ja $g_j \overset{\text{1-käs.}}{\Rightarrow} g_i = g_j$ A_j:ssä)

Siis on olemassa $g(x) = \lim_{i\to\infty} g_i(x)$ kaikilla $x \in A$. Edelleen

$$\int_A |g|^q \, dx \underset{\text{muut.konv.}}{=} \lim \int |g_i|^q \, dx = \lim \|\Phi_i\|^q \leq \|\Phi\| < \infty \,,$$

joten $g \in L^q(A)$.

Olkoon $f \in L^p(A)$ mielivaltainen ja $f_j = f \cdot \chi_{A_j} \Rightarrow f_j \to f$ $L^p(A)$:ssa, joten

$$\Phi(f) = \lim \Phi(f_j) = \Phi_j(f_j) = \lim \int_{A_j} f_j g_j \, dx$$

$$= \lim \int_{A_j} f g \, dx \underset{\text{D.K.}}{=} \int_A f g \, dx \,.$$

$\square$

9.9. Huomautus.

i) Sama päättely menee myös muille mitoille kuin Lebesgue tai kompleksiarvoisille funktioille.

ii) Samaan tapaan voidaan todistaa, että $(L^1(A))^* = L^\infty(A)$, ts.

$$\begin{aligned}&\Phi \in (L^1(A))^* \Rightarrow \text{ on olemassa } g \in L^\infty(A) : \\ &\Phi(f) = \int_A f g \, dx \,, \quad f \in L^1(A) \,.\end{aligned}$$

HT (ks. Adams.)

iii) $L^\infty(A)$:n duaalia *ei* saada eo. tavalla. Edelleen, $(L^\infty(A))^* \neq L^1(A)$. (ks. lin.anal.)

iv) Erityisesti $(L^2(A))^* = L^2(A)$. Periaatteessa tämä johtuu siitä, että L^2 on Hilbert.

9.1. Heikko konvergenssi

9.10. Määritelmä. Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $f_k, f \in L^p(A), k = 1, 2, \ldots$ Sanotaan, että f_k *suppenee heikosti* $L^p(A)$:ssa *kohti* f:ää, merkitään

$$f_k \to f \text{ heikosti } L^p(A)\text{:ssa} \quad (\text{tai } \rightharpoonup) \,,$$

jos

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k g \, dx = \int_A f g \, dx \qquad \text{kaikilla } g \in L^q(A),$$

missä $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

9.2. Lemma. *Olkoon* $1 \leq p < \infty$ *ja* $f_k, f \in L^p(A)$.

i) Jos $f_k \to f$ *(vahvasti)* $L^p(A)$*:ssa, niin* $f_k \to f$ *heikosti* $L^p(A)$*:ssa.*

ii) Jos $f_k \to f$ *heikosti* $L^p(A)$*:ssa, niin on* $M < \infty$ *s.e.*

$$\|f_k\|_p \leq M \qquad \text{kaikilla } k \,.$$

Todistus: i) $g \in L^q(A)$

$$\Rightarrow |\int f_k g\,dx - \int fg\,dx| \le \int_A |f_k - f||g|\,dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f_k - f\|_p \|g\|_q \to 0\,.$$

$\not\subset$

ii) Hanhn-Banach/Tasaisen rajoituksen periaate.

$\square$

9.11. Huomautus. i) ei päde kääntäen. Esim. olkoon $1 < p < \infty$, $A = (0,1)$, $f_k = k^{\frac{1}{p}} \chi_{(0,\frac{1}{k})} \Rightarrow \|f_k\|_p = 1$ ja $f_k \to 0$ heikosti $L^p(A)$:ssa. Syy: Olkoon $g \in L^q(A)$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $\varphi \in C_0(A)$: $\|\varphi - g\|_p < \varepsilon \Rightarrow$

$$|\int f_k g\,dx| = |\underbrace{\int f_k \varphi\,dx}_{=0 \text{ isolla } k}| + |\int f_k(\varphi - g)\,dx| \le \underbrace{\|f_k\|_p}_{=1} \|\varphi - g\|_q < \varepsilon \quad \text{isoilla } k\,.$$

Rieman-Lebesguen lemma $\Rightarrow f_k(x) = \cos kx$, $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow f_k \in L^p([0,2\pi])$ ja $f_k \to 0$ heikosti $\|f_k\|_p = c_p > 0$.

9.12. Huomautus. Heikko raja-arvo on yksikäsitteinen: Olkoon $f_k, f, g \in L^p(A)$ s.e. $f_k \to f$ heikosti ja $f_k \to g$ heikosti $L^p(A)$:ssa.

$$\Rightarrow \int_A (f-g)h\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_A (f_k - f_k)h\,dx = 0$$

$$\Rightarrow f - g = 0 \text{ eli } f = h\,.$$

9.3. Lemma. *Olkoon $1 \le p < \infty$ ja $f_j, f \in L^p(A)$. Tällöin $f_j \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa* $\Leftrightarrow$

(i) $M = \sup_j \|f_j\|_p < \infty$.

(ii)

$$\lim \int\limits_A f_j \Psi \, dx = \int\limits_A f \Psi \, dx \text{ kaikilla } \Psi \in D \,,$$

missä $D \subset L^q(A)$ on $\| \cdot \|_q$-tiheä $L^q(A)$:n osajoukko.

TODISTUS: "$\Rightarrow$" Selvä (9.2+ määritelmä)
"$\Leftarrow$" $g \in L^q(A)$. Valitaan $\Psi \in D$ s.e. $\|\Psi - g\|_q \leq \frac{\varepsilon}{3M}$

$$\Big| \int\limits_A f_j g \, dx - \int\limits_A f g \, dx \Big| \leq \Big| \int\limits_A f_j (g - \Psi) \, dx \Big| + \Big| \int\limits_A (f_j - f) \Psi \, dx \Big| + \Big| \int\limits_A f(\Psi - g) \, dx \Big|$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \overbrace{\|f_j\|_p}^{\leq M} \overbrace{\|g - \Psi\|_q}^{< \frac{\varepsilon}{3M}} + \overbrace{\Big| \int\limits_A (f_j - f) \Psi \, dx \Big|}^{< \frac{\varepsilon}{3}, \text{ kun } j \text{ iso}} + \overbrace{\|f\|_p \|\Psi - g\|_q}^{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,.$$

□

9.13. Huomautus. Erityisesti Lemmasta 9.3 ja 9.2:sta seuraa: $f_j \to f$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa, jos ja vain jos $\|f_j\|_p$ on rajoitettu ja

$$\lim \int\limits_\Omega f_j \varphi \, dx = \int\limits_\Omega f \varphi \, dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \,.$$

Normi on alhaalta puolijatkuva heikon konvergenssin suhteen:

9.4. Lemma. *$f_j \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa,* $1 \leq p < \infty$

$$\Rightarrow \|f\|_p \leq \varliminf_{j \to \infty} \|f_j\|_p \,.$$

TODISTUS: Voidaan olettaa, että $\|f\|_p > 0$. Olkoon

$$\operatorname{sign}(f)(x) = \begin{cases} 1 & , f(x) \geq 0 \\ -1 & , f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g = \operatorname{sign}(f) f^{p-1} \in L^q(A) \quad , \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ja

$$\|f\|_p^p = \int\limits_A |f|^p\,dx = \int\limits_A fg\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_A f_k g\,dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \varliminf_{k\to\infty}\|f_k\|_p\|g\|_q = \varliminf_{k\to\infty}\|f_k\|_p\|f\|_p^{p-1}\,.$$

jakamalla. □

9.14. Huomautus. Muista, kun $f_k, f \in L^p(A)$, $1 \leq p < \infty$, jos $f_k \to f$ m.k., niin $f_k \to f$ $L^p(A)$:ssa $\Leftrightarrow$ $\lim\int_A |f_k|^p\,dx = \int_A |f|^p\,dx$. Itse asiassa pätee: $f_j \to f$ heikosti L^p:ssa, $\|f_j\|_p \to \|f\|_p$ $\Leftrightarrow$ $f_j \to f$ vahvasti $L^p(A)$:ssa, kun $1 < p < \infty$. HT.

Kun $1 < p < \infty$ voidaan Lemma 9.2 kääntää:

9.15. Lause. *Olkoon $1 < p < \infty$ ja $B \subset L^p(A)$ rajoitettu (ts. on olemassa $M < \infty$: $\|f\|_p \leq M$ kaikilla $f \subset B$). Tällöin on olemassa jono $f_k \in B$ ja $f \in L^p(A)$ s.e.*

$$f_k \to f \qquad \textit{heikosti } L^p(A):ssa\,.$$

(Erityisesti $L^p(A)$:n rajoitetulla jonolla on heikosti suppeneva osajono.)

Todistus: Olkoon $1 < q < \infty$. $q = \frac{p}{p-1}$. Olkoon $\{\Psi_k\}_{k=1} \subset L^q(A)$ numeroituva tiheä osajoukko (ks. L. ??). Voidaan olettaa, että B on ääretön ja valita $\{f_k\} \subset B$ mielivaltainen jono. Olkoon

$$a_k^{(1)} := \int\limits_A \Psi_1 f_k\,dx$$

$$\Rightarrow |a_k^{(1)}| \leq \|\Psi_1\|_q\|f_k\|_p \leq M\|\Psi_1\|_q \overset{\text{ei riipu } k\text{:sta}}{<} \infty \text{ kaikilla } k\,.$$

Siis $a_k^{(1)}$:lla on suppeneva osajono. Valitaan $a_{k_j}^{(1)} \to a^{(1)} \in \mathbf{R}$. vastaavat funktiot $(f_k^{(1)})$, siis osajono (f_k):sta. $\therefore$

$$\int\limits_A \Psi_1 f_k^{(1)}\,dx \to a_1^{(1)} \quad , \text{kun } k \to \infty\,.$$

Samoin jono $\left(\int_A \Psi_2 f_k^{(1)}\,dx\right)_k$ on rajoitettu ja kuten yllä löydetään $f_k^{(1)}$:n osajono $f_k^{(2)}$ s.e.

$$\int\limits_A \Psi_2 f_k^{(2)}\,dx \to a^{(2)} \in \mathbf{R}\,.$$

Jatketaan; saadaan osajonoista $(f_k^{(j)}) \subset (f_k^{(j-1)}) \subset (f_k)$ s.e.

$$\int\limits_A \Psi_j f_k^{(j)}\,dx \to a^{(j)} \in \mathbf{R}\,.$$

Valitaan diagonaalijono $(f_k^{(k)})$. Tällöin jono

$$\left(\int\limits_A \Psi_j f_k^{(k)}\,dx\right)_k$$

suppenee kaikilla j, kohti lukua $a^{(j)} \in \mathbf{R}$ $(k \to \infty)$.

9.16. Määritelmä.

$$L\Psi_j := \lim_{k\to\infty} \int \Psi_j f_k^{(k)}\,dx$$

ja

$$L(\lambda\Psi_j + \mu\Psi_l) := \lambda L\Psi_j + \mu L\Psi_l\,.$$

Näin saadaan määriteltyä lineaarikuvaus

$$L : X \to \mathbf{R}\,,$$

missä $X = \mathrm{span}\{\Psi_j\} = \Psi_j$:den virittämä lineaariavaruus.

Edelleen

$$|Lg| \le \|g\|_q M \qquad \text{kaikilla } g \in X\,,$$

koska tämä pätee Ψ_j:lle.

Nyt jos $g \in L^q(A)$ on mielivaltainen valitaan jono $g_j \in X$ s.e. $g_j \to g$ $L^q(A)$:ssa (mahd.) ja asetetaan

$$Lg = \lim g_j\,.$$

Tällöin

$$L : L^q(A) \to \mathbf{R} \text{ on jatkuva lineaarifunktionaali funktio}$$

a) L on hyvin määritelty:

$$h_j, g_j \to g \Rightarrow |Lh_j - Lg_j| = |L(h_j - g_j)| \le M\|h_j - g_j\| \to 0\,.$$

b) L on lineaarinen.

$$|Lg| = \lim |Lg_j| \leq \lim M\|g_j\|_q = M\|g\| .$$

$\therefore L \in (L^q(A))^*$.

9.7 (Riesz) $\Rightarrow$ on olemassa $f \in L^p(A)$ s.e. $\|f\|_p \leq M$ ja

$$Lg = \int_A gf\,dx \quad \text{kaikilla } g \in L^q(A) .$$

Tällöin $f_k^{(k)} \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa Lemman 9.3 nojalla (koska tiheä osajono). $\square$

9.17. Huomautus. Lause 9.15 on "väärin", kun $p = 1$.

Esimerkki. Olkoon f_j paloittain lineaarinen s.e.

$$f_j(x) = \begin{cases} 2^{j-2} & , |x| \leq 2^{-j} \\ \text{lineaarinen} & , 2^{-j} < |x| \leq 3 \cdot 2^{-j} \\ 0 & , |x| > 3 \cdot 2^{-j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{[-1,1]} |f_j|\,dx = 2 \cdot 2^{-j} \cdot 2^{j-2} + 2 \cdot 2^{j-2} \cdot 2 \cdot 2^{-j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Mutta f_j:llä ei heikosti suppenevaa osajonoa:
Antiteesi: Olkoon f_j:llä osajono s.e. $f_j \to f \in L^1(-1,1)$ Lebesgue. Valitaan $g \equiv \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$

$$\int_{(-\varepsilon,\varepsilon)} f\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{(-1,1)} f_j g\,dx = \lim \int_A f_j\,dx = 1 ,$$

mikä on ristiriita m.k. absoluuttisen jatkuvuuden kanssa.

9.18. Lause. *Olkoon $1 < p < \infty$. Olkoon $f_j, f \in L^p(A)$ s.e. $\sup_j \|f_j\|_p < \infty$ ja $f_j \to f$ m.k. A:ssa. Tällöin $f_j \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa.*

Todistusta varten tarvitaan *Egorovin lause.*

9.19. Lause. Egorovin lause: *Olkoon* $|A| < \infty$, $f, f_j : A \to \mathbf{R}$ *mitallisia s.e.* $f_j \to f$ *m.k. A:ssa. Tällöin kaikilla* $\varepsilon > 0$ *on suljettu* $F \subset A$ *s.e.* $|A \backslash F| < \varepsilon$ *ja* $f_j \to f$ *tasaisesti* F*:ssä.*

TODISTUS: Demo. $\square$

LAUSEEN 9.18 TODISTUS: Olkoon $M = \sup_j \|f_j\|_p$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $g \in L^q(A)$. Valitaan $\delta > 0$ s.e. $|E| < \delta$, $E \subset A \Rightarrow$

$$\Big(\int_E |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad \text{(int. abs. jatkuvuus)}$$

Edelleen valitaan $\widetilde{A} \subset A$ s.e. $|\widetilde{A}| < \infty$ ja

$$\Big(\int_{A\backslash\widetilde{A}} |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{(esim. Fatoun lause)}$$

Egorov $\Rightarrow$ on $B \subset \widetilde{A}$ s.e. $|\widetilde{A}\backslash B| < \delta$ ja $f_j \to f$ tasaisesti B:llä

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_A fg\,dx - \int_A f_j g\,dx\Big| \le \int_A |f_j - f| g\,dx \\
&= \int_{A\backslash\widetilde{A}} + \int_{\widetilde{A}\backslash B} + \int_B \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f_j - f\|_p \Big[\underbrace{\Big(\int_{A\backslash\widetilde{A}} |g|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\Big(\int_{\widetilde{A}\backslash B} |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}}}_{<\frac{\varepsilon}{3}} dx\Big] + \underbrace{\int_B |f_j - f| g\,dx}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{3} \\ \text{kun } j \text{ iso} \\ \text{tas.konv.(D.K.)}}} \\
&\le M\varepsilon \quad \text{kun } j \text{ iso}.
\end{aligned}
$$

9.20. Huomautus. Kun $1 < p < \infty$ pätee *Radon-Rieszin* lause:
Olkoon $f, f_k \in L^p(A), 1 < p < \infty$. Tällöin

$$f_k \to f \quad \text{vahvasti } L^p(A) : \text{ssa}$$

jos ja vain jos

$$f_k \to f \qquad \text{heikosti } L^p(A) : \text{ssa}$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_p = \|f\|_p \,.$$

Tämän todistus (sivuutetaan) perustuu L^p-avaruuksien tasaiseen konveksiuteen, kun $p \in (1,\infty)$ (clarksonin epäyhtälöt). Ei totta, kun $p = 1$.

Todistus on triviaali, kun $p = 2$. (HT)

Eräs tärkeä heikkoon konvergenssiin liitettävä lause on *Mazurin lemma*, jonka mukaan suljettu konveksi joukko on heikostisuljettu:

9.5. Lemma. Mazurin lemma: *Jos $f_j \to f$ heikosti $L^p(A)$:ssa, $1 \le p < \infty$, niin on olemassa jono $g_j \in L^p(A)$:ssa s.e. g_j koostuu f_j:den konvekseista kombinaatioista,*

$$g_j = \sum_{k=1}^{j} \lambda_{j,k} f_k \,, \quad \lambda_{j,k} \ge 0 \,, \quad \sum_{k=1}^{j} \lambda_{j,k} = 1 \,,$$

s.e. $g_j \to f$ vahvasti $L^p(A)$:ssa.

Todistus: $\sim$ Hahn-Banach, sivuutetaan (ks. Yosida p. 120) □

Esimerkki. Miniminormin olemassaolo.