

Analyysi 1 - tarinaosasto

Tero Kilpeläinen

Syksy 2012



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Seuraavassa esimerkkejä lauseista ja ilmiöistä, joita tällä kurssilla pyrimme ymmärtämään läpikotaisin.

Jatkuva funktio

Funktio f on jatkuva pisteessä x_0 , jos ja vain, jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

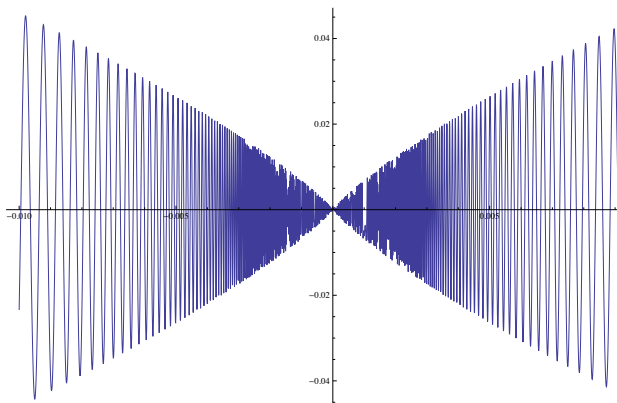
Tämä on periaatteessa tuttua, mutta tällä kurssilla selvitämme, mitä edellä olevat käsitteet **jatkuvuus** ja **raja-arvo** täsmällisesti tarkoittavat ja mitä ominaisuuksia niistä voidaan johtaa.

Esimerkiksi: kuinka määrää raja-arvon

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| \log |x| \sin \frac{1}{x} ?$$

Myöhemmin opimme tietämään nyt näemme kuvasta, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| \log |x| \sin \frac{1}{x} = 0.$$



Jatkuvuuslause

Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja jos $f(x_0) > 0$, niin $f(x) > 0$ kunhan x on lähellä pistettä x_0 .

Jatkuvuuslause tarkemmin

Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja jos $f(x_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, jolle $f(x) > 0$ kunhan x on välillä $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Esimerkiksi, funktio f ,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

on jatkuva jos $x \neq 0$. (Piirrä kuva 0:n lähellä.) Jatkuvuuslauseen mukaan $f(x) > 0$, kun x on riittävän lähellä pistettä

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad \text{koska } f(x_n) = 1.$$

Jatkuvuuslause tarkemmin

Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja jos $f(x_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, jolle $f(x) > 0$ kunhan x on välillä $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Esimerkiksi, funktio f ,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

on jatkuva jos $x \neq 0$. (Piirrä kuva 0:n lähellä.) Jatkuvuuslauseen mukaan $f(x) > 0$, kun x on riittävän lähellä pistettä

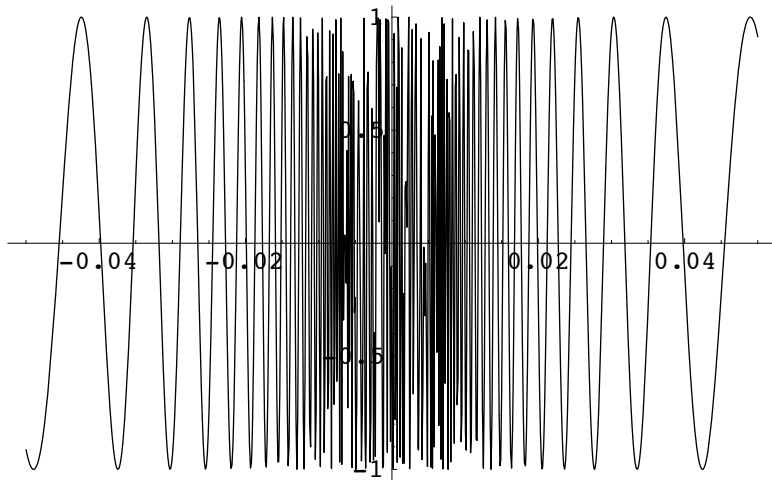
$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad \text{koska } f(x_n) = 1.$$

Kuitenkin

$$|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{n^2} \rightarrow 0,$$

ja f saa negatiivisia arvoja x_n :n ja x_{n+1} :n välissä.

heilahtelua á la $\sin \frac{1}{x}$



Bolzano - ei reikiä

Jos f on sellainen jatkuva funktio välillä $[a, b]$ että

$$f(a) < 0 < f(b),$$

niin on olemassa $x \in [a, b]$, jolle $f(x) = 0$.

Esimerkki rationaalimaailmasta

Jos $f(x) = x^2 - 2$, niin f on jatkuva funktio välillä $[0, 2]$,
 $f(0) = -2 < 0$ ja $f(2) = 2 > 0$, joten Bolzanon lauseen nojalla
jollakin reaaliluvulla $x_0 \in [0, 2]$ pätee $f(x_0) = 0$.

Tiedämme, ettei rationaalilukujen joukossa tällaista lukua x_0 ole.
Siksi Bolzanon lauseen todistaminen vaatii reaaliluvuista jotain
sellaista tietoa, jota emme ole vielä käsitelleet.

Bolzano - ei reikiä

Jos f on sellainen jatkuva funktio välillä $[a, b]$ että

$$f(a) < 0 < f(b),$$

niin on olemassa $x \in [a, b]$, jolle $f(x) = 0$.

Ylhäältä rajoitettu

Jos f on jatkuva funktio välillä $[a, b]$, niin on olemassa sellainen luku $M \in \mathbf{R}$, jolle $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Ylhäältä rajoitettu

Jos f on jatkuva funktio välillä $[a, b]$, niin on olemassa sellainen luku $M \in \mathbf{R}$, jolle $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Esimerkki rationaalimaailmasta

Jos $f(x) = 1/(x^2 - 2)$, niin f on jatkuva funktio joukossa $[0, 2] \cap \mathbf{Q}$.

(Huomaa, että nimittäjä on rationaalipisteissä $\neq 0$.)

Kuitenkin f saa mielivaltaisen suuria arvoja.

Siten myös tämän lauseen todistaminen vaatii reaaliluvuista jotain sellaista tietoa, jota emme ole vielä käsitelleet.

Kolme kovaa lausetta

Bolzano - ei reikiä

Jos f on sellainen jatkuva funktio välillä $[a, b]$ että

$$f(a) < 0 < f(b),$$

niin on olemassa $x \in [a, b]$, jolle $f(x) = 0$.

Ylhäältä rajoitettu

Jos f on jatkuva funktio välillä $[a, b]$, niin on olemassa sellainen luku $M \in \mathbf{R}$, jolle $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Maksimi-arvo saavutetaan

Jos f on jatkuva funktio välillä $[a, b]$, niin on olemassa sellainen piste $x_0 \in [a, b]$, jolle

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{kaikilla } x \in [a, b].$$

Maksimiarvo saavutetaan

Jos f on jatkuva funktio välillä $[a, b]$, niin on olemassa sellainen piste $x_0 \in [a, b]$, jolle

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{kaikilla } x \in [a, b].$$

Esimerkki rationaalimaailmasta

Jos $f(x) = -|x^2 - 2|$, niin f on jatkuva funktio välillä $[0, 2]$.

Kaikilla rationaaliluvuilla $f(x) < 0$, mutta kuitenkin f saa rationaalipisteissä mielivaltaisen lähellä 0:aa olevia arvoja.

Siten myös tämän lauseen todistaminen vaatii reaaliluvuista jotain sellaista tietoa, jota emme ole vielä käsitelleet.