

Analyysi 1

Harjoitus 9, 23.11.2012

1. Anna esimerkki ei-jatkuvasta funktiosta $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, joka saavuttaa maksiminsa ja miniminsä jokaisella suljetulla osavälillä $[a, b] \subset [0, 1]$.

2. Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ kasvava. Osoita, että f on jatkuva, jos ja vain, jos kuvajoukko $f([a, b])$ on väli.

3. Todista seuraus 5.35. huolella: *Olkoon $q \in \mathbf{Q}$. Tällöin funktio $x \mapsto x^q$ on jatkuva, kun $x > 0$.*

4. Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva ja $f(x) > 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Näytä, että

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} > 0.$$

5. Näytä esimerkillä, että oletus f :n jatkuvuudesta on välttämätön tehtävässä 4.

6. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva pisteessä $x = 0$. Jos

$$|f(x)| \leq \left|\frac{1}{x}\right| \quad \text{kaikilla } x \neq 0,$$

niin osoita, että f on rajoitettu.

7. Olkoon $\tilde{f} : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ rajoitettu. Osoita, että määrittelemällä

$$f(x) = \sup\{\tilde{f}(q) : q \in \mathbf{Q} \text{ ja } q \leq x\}$$

saadaan kasvava funktio $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Osoita edelleen, että $f(q) = \tilde{f}(q)$ kaikilla $q \in \mathbf{Q}$, mikäli $\tilde{f}$ on kasvava.

8. Olkoot A ja B epätyhjiä reaalilukujoukkoja ja määritellään

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ ja } b \in B\}.$$

Osoita, että

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

9. Olkoot $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ja $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ (rajoitettuja) funktioita. Näytä, että

$$\sup\{(f + g)(x) : x \in I\} \leq \sup\{f(x) : x \in I\} + \sup\{g(x) : x \in I\}.$$

Päteekö yhtäsuuruus?

⁴Vihje: tutki funktiota $g(x) = 1/f(x)$.

⁸Vihje: Epäyhtälö " $\leq$ " on helppo (miksi?). Toisen epäyhtälön todistamisessa auttaa L. 5.33.