

Analyysi 1
Harjoitus 8, 16.11.2012

1. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva. Määritellään

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \sin \frac{1}{x^2} & \text{kun } x > 0 \\ f(x) & \text{kun } x \leq 0. \end{cases}$$

Osoita, että g on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}$, jos ja vain jos $f(0) = 0$.

2. Osoita, että yhtälöllä $\cos x = x$ on ratkaisu.

3. Näytä, että polynomilla, jonka aste on pariton, on ainakin yksi reaalinen nollakohta.

4. Etsi (perustellen) $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Onko A :ssa suurinta tai pienintä alkioita?

5. Etsi (perustellen) $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \left\{ 2 - \frac{3n-2}{-5-n} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Onko A :ssa suurinta tai pienintä alkioita?

6. Etsi (perustellen) $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \{x + y^2 : x \in [0, 1], \quad y \in [-1, 1]\}.$$

Onko A :ssa suurinta tai pienintä alkioita?

7. Etsi (perustellen) $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \{x \in [-1, 2[: 1 < f(x) < 4\}, \quad \text{missä } f(x) = x^2.$$

8. Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$. Näytä, että $\sup A = \inf A$, jos ja vain jos A :ssa on täsmälleen yksi alkio.

²Vihje: tutki funktiota $\cos x - x$ välillä $[0, 1]$.