

Analyysi 1
Harjoitus 7, 9.11.2012

1. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{jos } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{jos } x > 1. \end{cases}$$

Näytä määritelmän avulla, että f on jatkuva pisteessä $x_0 = 1$.

2. Näytä määritelmän avulla, että

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

on jatkuva kun $x < 0$.

3. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + a}.$$

Missä joukossa f on jatkuva? (Tarkka perustelu.)

4. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ siten, että

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbf{R}.$$

Jos f on jatkuva pisteessä $x_0 = 0$, niin f on jatkuva koko $\mathbf{R}$:ssä.

5. Olkoot f ja g pisteessä $x = 0$ jatkuvia funktioita, joista tiedetään, että

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

Mitä voit sanoa arvoista $f(0)$ ja $g(0)$?

6. Näytä, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x} + 6\right) + x \cos \frac{2}{x^2}, & \text{kun } x > 0 \\ x^5 & \text{kun } x \leq 0 \end{cases}$$

on jatkuva.

7. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x = \frac{1}{n} \text{ jollakin } n \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Missä joukossa f on jatkuva?

8. Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 ja g epäjatkuva pisteessä x_0 . Näytä esimerkeillä, että tulofunktio fg voi olla joko jatkuva tai epäjatkuva pisteessä x_0 . Mitä voit sanoa arvosta $f(x_0)$, jos fg on jatkuva pisteessä x_0 ?

⁴Vihje: Osoita ensin, että $f(0) = 0$.