

**Analyysi 1**  
**Harjoitus 6, 2.11.2012**

Kirjoita puhtaaksi vastaukset kahteen tehtävään (niin kuin tenttivas-  
tausta kirjoittaisit). Jätä tarkistettavaksi harjoitusryhmäsi pitäjälle. Saat  
palautteen vastauksistasi seuraavana harjoituskertana 9.11.

1. Näytä, että

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

2. Osoita:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

3. Osoita:

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

4. Olkoon  $f(x) = x^n$ . Etsi sellainen luku  $\delta > 0$ , jolle

$$|f(x) - 1| < \frac{1}{1000} \quad \text{kaikilla } x \in ]1 - \delta, 1 + \delta[.$$

5. Osoita määritelmän avulla, että funktio  $f(x) = 6x$  on jatkuva.

6. Näytä määritelmän avulla, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ei ole jatkuva pisteessä  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

7. Käytä tehtävän 3 arviota ja osoita määritelmän avulla, että sinifunktio,  $x \mapsto \sin x$ , on jatkuva.

8. Olkoon  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  jatkuva. Jos  $f(x) \leq x^2$  kun  $x > 0$ , niin osoita, että  $f(0) \leq 0$ .

---

<sup>3</sup>Vihje: sovelta tehtävää 2.