

Analyyysi 1

Harjoitus 5, 26.10.2012

1. Jaa polynomi

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$$

tekijöihinsä. Määrää nollakohdan $x = 1$ kertaluku.

2. Olkoon polynomilla p ,

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

nollakohdat $x_1, x_2, \dots, x_n$. Näytä, että joku em. nollakohdista on välillä $]26, 28[$, jos $p(27) = \frac{1}{4}$.

3. Olkoot P ja Q korkeintaan n . asteen polynomeja. Jos on olemassa $n + 1$ eri pistettä $x_0, x_1, \dots, x_n$, ($x_j \neq x_k$, kun $k \neq j$), joille

$$P(x_j) = Q(x_j) \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

niin näytä, että $P(x) = Q(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

4. Näytä esimerkillä, että edellisessä tehtävässä ei yleensä riitä n eri pistettä.

5. Olkoon p ei-vakio polynomi. Osoita, että on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|p(x)| \geq 11001 \quad \text{kaikilla } x \geq M.$$

6. Olkoon p 2. asteen polynomi, jolla on nollakohdat $x_0 \neq x_1$. Näytä, että on sellaiset vakiot A_1 ja A_2 (ja määrää ne), että kaikilla $x \neq x_0, x_1$

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{x - x_1}.$$

7. Määrää ne $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, joille

$${}^x\log y = {}^y\log x.$$

8. Näytä, että on olemassa sellainen $M > 0$, jolle

$$2^x \geq 10^7 x \quad \text{kaikilla } x \geq M.$$

9. Osoita, että funktio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$, saa mielivaltaisen pienillä x arvot 1 ja -1 , ts. osoita, että kaikilla $\delta > 0$ on olemassa $0 < x, y < \delta$, joille

$$\sin \frac{1}{x} = 1 \quad \text{ja} \quad \sin \frac{1}{y} = -1.$$

²Vihje: epäsuora todistus, jaa $p(x)$ tekijöihin ja arvioi.

³Vihje: tutki polynomia $H = P - Q$.

⁵Vihje: ota x^n polynomissa yhteiseksi tekijäksi, muista kolmioepäyhtälö.

⁸Vihje: Riittää löytää yksi M .