

Analyysi 1

Harjoitus 4, 19.10.2012

1. Mikä on funktion $y = f(x)$ laajin mahdollinen määrittelyjoukko $A \subset \mathbf{R}$ ja mikä on tällöin kuvajoukko, kun

$$\text{a) } y = \frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{ja} \quad \text{b) } y = (\sqrt{x-1})^2.$$

2. Olkoot $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ ja $h(x) = |x|$. Mitkä ovat määrittely- ja kuvajoukot? Muodosta yhdistetyt funktiot $f \circ g \circ h$ ja $g \circ f$. Missä joukossa nämä ovat määritellyt?

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-1)^2$ määrää yhdistetyt funktiot

$$f \circ f \quad \text{ja} \quad f \circ f \circ f$$

ja laske arvot

$$f^n(1) := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ kpl}}(1), \quad n \in \mathbf{N}.$$

4. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{kun } -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2, & \text{kun } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Mikä on f :n määrittelyjoukko A ? Entä kuvajoukko $B = f(A)$? Onko $f : A \rightarrow B$ injektio?

5. Tutki funktiota

$$f(x) = \frac{1-x}{x+1}, \quad x \neq -1.$$

Määrää f :n kuvajoukko $B = f(A)$ ja osoita, että $f : A \rightarrow B$ on bijektio, kun $A = \{x \in \mathbf{R} : x \neq -1\}$. Mikä on f^{-1} ?

6. Anna esimerkki aidosti monotonisesta funktiosta $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, jonka kuvajoukko $f([-1, 1])$ ei ole väli.

7. Olkoon $f : A \rightarrow E$, $f(x) = x^2 + 1$. Mikä on sellainen f :n määrittelyjoukko A , että f on bijektio (vai onko sellaista), kun

a) $E = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 3 \text{ tai } x = 2\}$,

b) $E = [3, 6[$,

c) $E = [0, 1]$?

8. Mitä voidaan sanoa yhdistetyn funktion $g \circ f$ kasvavuudesta/vähenevyydestä, jos

a) f ja g ovat kasvavia,

b) f ja g ovat väheneviä,

c) f on kasvava ja g on vähenevä,

d) f on vähenevä ja g on kasvava?