

Analyysi 1
Harjoitus 3, 12.10.2012

1. Osoita: kaikilla $x \neq 0$

$$\left|x + \frac{2}{x}\right| \geq 2\sqrt{2}.$$

2. Olkoot $a_1 < a_2 < a_3$. Näytä, että kaikilla x pätee:

$$a_3 - a_1 \leq |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3|.$$

Millä luvun x arvolla yhtäsuuruus on voimassa?

3. Osoita: jos $0 \leq y \leq x$, niin

$$4y^3|x - y| \leq |x^4 - y^4| \leq 4x^3|x - y|.$$

4. Olkoon $M > 0$. Jos $0 < x, y < \frac{1}{M^2}$, niin osoita, että

$$\frac{M}{2}|x - y| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}|x - y|.$$

5. Olkoon $x_0 \in]a, b[$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, jolle

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]a, b[.$$

Kuinka suuri δ voi olla?

6. Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Mitä voit sanoa luvusta b , jos tiedetään, että $1 < a < 2$ ja⁶

$$|b - a| \leq \varepsilon \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0?$$

7. Jos

$$-\varepsilon \leq a \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$, niin mitä voit sanoa luvusta a (ja miksi)?

8. Tutki, milloin kolmioepäyhtälöissä

$$\left||x| - |y|\right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

on voimassa yhtäsuuruus.

9. Käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä näytä, että niistä suorakulmioista, joilla on sama pinta-ala, neliöllä on lyhyin piiri.

¹Vihje: tutki tapaus $x > 0$ ensin; täydennä neliöksi.

⁶Kirjain ε luetaan: "epsilon".