

Analyysi 1

Harjoitus 2, 5.10.2012

1. Jos $a + b \leq 2$, niin näytä, että $a \leq 1$ tai $b \leq 1$. Onko välttämättä sekä $a \leq 2$ että $b \leq 2$?

2. Osoita, että kaikilla $a, b \geq 0$

$$a^2 + b^2 \leq (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

Päteekö sama kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$?

3. Näytä, kuinka jokainen luku $x \in [0, 1]$ voidaan esittää summana

$$x = a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + a_3 2^{-3} + \cdots + a_k 2^{-k} + \cdots,$$

missä $a_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, 3, \dots$

4. Näytä, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$\bigcap_{k=1}^n]0, \frac{1}{k}] =]0, \frac{1}{n}]$$

5. Näytä, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}]0, \frac{1}{k}] = \emptyset.$$

6. Jos

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-3)(x+2)}{x-1}} \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 7} \sqrt{x^2 - 9},$$

niin missä joukossa funktiot f , $-g$, fg ja f/g ovat määritellyt?

7. Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$. Osoita, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}] = \{x_0\}.$$

8. Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$. Osoita, että on olemassa sellaiset luvut $a_k, b_k \in \mathbf{Q}$, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[= \{x_0\}.$$

9. Arvioi lukua $\sqrt{5}$ rationaaliluvulla q siten, että $q < \sqrt{5}$ ja

$$\sqrt{5} - q < 10^{-5}.$$

Huomaa, että ainoa käytössä oleva tieto luvusta $\sqrt{5}$ on sen määritelmä: $(\sqrt{5})^2 = 5$ ja $\sqrt{5} > 0$.

³Vihje: Modifioi desimaalikehitelmän konstruktioita. (Selitä samalla, mitä summaus mahtaisi tarkoittaa...)

⁵Vihje: Epäsuora todistus; Arkhimedes.