

Analyysi 1
Harjoitus 12, 14.12.2012

1. Määää raja-arvo (jos olemassa)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{||x| - 1|}{x - 1}.$$

2. Jos $|x_n - x_{n+1}| \leq 2^{-n}$ kaikilla n , niin onko (x_n) Cauchy-jono?

3. Näytä, että kasvavalla funktiolla on toispuoleiset raja-arvot joka pisteessä.

4. Olkoon $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, I avoin väli. Osoita, että f on jatkuva pisteessä $x_0 \in I$, jos ja vain, jos f :llä on toispuoleiset raja-arvot pisteessä x_0 ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x).$$

5. Olkoon $a > 0$. Näytä, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^a)^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ ja } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n^a}} = 1.$$

6. Olkoon $a > 0$. Näytä, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^a} = 0.$$

7. Määää funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

8. Tutki raja-arvon

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) \sin \frac{1}{x}$$

olemassaoloa (ja arvoa),

a) kun f on jatkuva 0:ssa ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(-\sin \frac{1}{n}\right) = 0,$$

b) kun $f(\pi) = 3$ ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2\pi.$$

9. Näytä, että logaritimifunktio $\log x$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

10. Näytä, että eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on jatkuva koko $\mathbf{R}$:ssä.

⁵Vihje: riittää (miksi riittää?) osoittaa toinen, sillä $(n^a)^{\frac{1}{n}} = k^{\frac{1}{k^\alpha}}$, kun $k = n^a$ ja $\alpha = \frac{1}{a}$.

Analyysi 1, KERTAUSTEHTÄVIÄ

101. Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

on olemassa.

102. Olkoon $|f(x)| \leq x^2$, kun $0 < |x| < 1$. Mitä voit sanoa raja-arvoista:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} ?$$

103. Funktiolle $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ pätee

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq f(x) \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{3}{(n+1)!}.$$

kaikilla $x \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbf{N}$. Mikä on $f(0)$? Osoita, että f on jatkuva.

104. Määää raja-arvo (mikäli olemassa)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x.$$

105. Onko funktiolla $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{|x| + |x - 3|}{4 + x^2},$$

suurinta tai pienintä arvoa $\mathbf{R}$:ssä?

106. Olkoot

$$A = \{x \in \mathbf{R} : |x| + |x + 2| < 4\}$$

ja

$$f(x) = x^2 - x.$$

Määää $\inf A$ ja $\sup f(A)$.

107. Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

jos ja vain jos jokaisella jonolla (x_n) , jolle $x_n \neq x_0$ ja $x_n \rightarrow x_0$, pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

108. Olkoon $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva funktio. **a)** Osoita, että on olemassa luvut $a, b \in \mathbf{R}$, joille

$$f([0, 1]) = [a, b].$$

b) Jos $0 \leq f(x) \leq 1$ kaikilla $x \in [0, 1]$, niin näytää, että on olemassa sellainen piste $x_0 \in [0, 1]$, jolle $f(x_0) = x_0$.

¹⁰⁴Vihje: kun $0 < x < \frac{1}{2}$, on täsmälleen yksi $n \in \mathbf{N}$, jolle $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$.