

Analyysi 1

Harjoitus 11 , 7.12..2012

1. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} - \frac{n^2}{2n + 1} \right).$$

2. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - x_n}{n^2}$$

(mikäli se on olemassa), kun jono (x_n) suppenee kohti lukua a .

3. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n},$$

mikäli se on olemassa.

4. (yo/2001) Lukujonon termit ovat $x_1 = 1, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}, x_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$. Mikä on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

vai onko sellaista?

5. (yo/2001) Määrää (huolellisesti perustellen) raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(1 + e^n) - n).$$

6. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja $N \in \mathbf{N}$ sellainen, että $x > 1 - N$. Näytä, että jono

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \geq N,$$

on kasvava.

7. Olkoon (x_n) suppeneva jono ja $k \in \mathbf{N}$. Näytä, että määrittelemällä

$$a_n := x_{kn}$$

saadaan suppeneva jono (a_n) ja että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

8. Näytä, että kaikilla $k \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

³Vihje: Muista lemma 4.25.

⁶Vihje: muista esimerkki 6.15:n jälkeen.

⁸Vihje: Huomaa, että

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right)^k$$

ja käytä tehtävää 7.