

Analyyysi 1

Harjoitus 10, 30.11.2012

1. Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että joukko

$$A = \left\{ n \frac{x^n}{n!} : n \in \mathbf{N} \right\}$$

on rajoitettu.

2. Päätele tehtävän 1 avulla, mikä on raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!},$$

kun $x \in \mathbf{R}$.

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ rajoitettu. Osoita, että

$$\inf \left\{ \frac{f(x)}{x^2} : x \neq 0 \right\} \leq 0.$$

4. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ rajoitettu ja jatkuva. Osoita, että funktio $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$$

saavuttaa $\mathbf{R}$:ssä pienimmän arvonsa, mikäli $f(0) < 0$.

5. Olkoon f välillä I jatkuva funktio. Osoita, että kuvajoukko $f(I)$ on väli, ellei f ole vakiofunktio.

6. Olkoon $q \in \mathbf{R}$. Määritellään jono (a_n) rekursiivisesti:

$$a_{n+1} = qa_n, \quad a_1 \neq 0.$$

Osoita, että $a_n \rightarrow 0$, jos ja vain, jos $|q| < 1$.

7. Olkoon $x_1 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ ja $|q| < 1$. Määritellään jono (x_n) rekursiivisesti:

$$x_{n+1} = qx_n + a.$$

Osoita, että

$$x_n \rightarrow \frac{a}{1-q}, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

8. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

missä

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

⁵Vihje: matki Seurauksen 5.42 todistusta; korvaa max ja min sup:lla ja inf:llä

⁷Vihje: Palauta tehtävään 6 tutkimalla jonoa

$$a_n = x_n - \frac{a}{1-q}.$$

⁸Vihje: Huomaa, että $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, joten $S_n = \dots$