

Analyysi 1

Harjoitus 1, 28.9.2012

Älä unohda huolellista perustelua!

1. Näytä, että

$$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

2. (jatkuu) Näytä, että kaikilla $x \in [0, 1[$ on suurin $n \in \mathbf{N}$, jolle

$$\frac{n}{n+1} \leq x.$$

3. (jatkuu) Näytä, että ei ole olemassa suurinta lukua $n \in \mathbf{N}$, jolle

$$\frac{n}{n+1} \leq 1.$$

4. (jatkuu) Näytä, että luku $x = 1$ on pienin sellainen luku $x \in \mathbf{R}$, jolle

$$\frac{n}{n+1} \leq x \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

5. Käyttämällä tietoa (jonka voit helposti tarkistaa), että

$$1,414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,7242^2$$

$$= 1,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,972\,569\,691\,515\,620\,333\,709\,423\,665\,64,$$

osoita, että

$$0 < \sqrt{2} - 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,7242 < 10^{-29}.$$

6. Määrittelevätkö kaavat

$$f(x) = e^{\log\left|\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}\right|} \quad \text{ja} \quad g(y) = y^2 + 1$$

eri funktiot? Hahmottele kuvaajia.

7. Luvun $x \in \mathbf{R}$ kokonaislukuosa $[x]$ on sellainen kokonaisluku, jolle pätee

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Määrä lukujen $-\sqrt{5}$ ja

$$\frac{22}{3} + \frac{14}{17}$$

kokonaislukuosat.

8. (jatkuu) Ratkaise epäyhtälö

$$[x] \leq \frac{x}{4}.$$

Piirrä kuva.

9. Olkoon $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$. Näytä, että on olemassa sellainen irrationaaliluku z , jolle

$$0 < z < \frac{1}{n}.$$

¹Joukko $\mathbf{N}$ sisältää tehtävässä 1-4 luvun 0.

⁵Vihje: $(a+b)^2 \geq a^2 + 2ab$.

⁹Vihje: Voit käyttää hyväksi tietoa, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

10. Määritteleekö kaava

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

funktion $f : A \rightarrow B$, kun

$$A = \mathbf{Q} \setminus \{-1\} \quad \text{ja} \quad B = \mathbf{Q}?$$

Entä, kun

$$A = B = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}?$$