

1. Olkoon $n, m \in \mathbb{Z}$ siten, että $n > m$, $\text{syt}(n, m) = 1$, $n - m$ on pariton. Osoita, että tällöin $(2nm, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$ on primitiivinen Pythagoraan lukukolmikko.
2. Osoita, että lukua $8n + 7$, missä $n \in \mathbb{N}$, ei voida esittää kolmen kokonaislukuneliön summana.

Fibonacciin lukujono saadaan asettamalla $f_1 = f_2 = 1$, ja määrittelemällä rekursiivisesti loput $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, kun $n \geq 3$. Seuraavat kolme tehtävää käsittelevät Fibonacciin lukujonoa.

3. Osoita, että kaava

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

missä

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ja} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

on totta kaikille kokonaisluvuille $n \geq 1$.

4. Todista yhtälö

$$f_n f_{n+1} = f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2$$

kaikille kokonaisluvuilla $n \geq 1$.

5. Todista, että

$$\text{syt}(f_n, f_m) = f_{\text{syt}(n, m)}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n, m \geq 1$.

Otetaan viimeiseksi tehtäväksi vielä hieman potenssiinkorottelua kahden tehtävän edestä.

- 6-7. Selvitä julkisella avaimella (605, 1073) RSA-salattu viesti

574 022 416 754 284 682 191 201 650 629 567 504 794