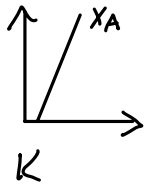
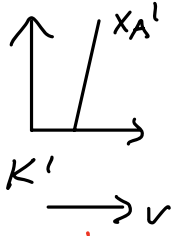
E ja $\bar{p}$ Lorentz-muunnoksissa



$$E_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}\, mc^2$$

$$p_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}\, mv_A$$



$$E_A' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A'^2}{c^2}}}\, mc^2$$

$$p_A' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A'^2}{c^2}}}\, mv_A'$$

$$v_A' = \frac{v_A - v}{1-\frac{vv_A}{c^2}} \quad \overset{(HT)}{\Rightarrow}$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$E_A' = \gamma(E_A - vp_A)$$

$$p_A' = \gamma\left(p_A - \frac{v}{c^2}E_A\right)$$

E ja $\bar{p}$ riippuvat havaitsijan liiketilasta

Sivulla 47 johdettiin tulos: $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \Rightarrow m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$

Massa m ei riipu havaitsijasta $\Rightarrow m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2$

Tarkistetaan: $\frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{\gamma^2}{c^2}(E - vp)^2 - \gamma^2\left(p - \frac{v}{c^2}E\right)^2$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2}\left(E^2 - 2Evp + v^2p^2\right) - \gamma^2\left(p^2 - \frac{2vpE}{c^2} + \frac{v^2}{c^4}E^2\right)$$

$$= \frac{E^2}{c^2}\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - p^2\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad \text{ok}$$

E ja $\bar{p}$ vs. neliliikemäärä

Sivulla 48 esiteltiin lyhyesti ns. 4-liikemäärä. Menemättä yksityiskohtiin, todetaan tässä lyhyesti, että E ja $\bar{p}$ voidaan identifioida 4-ulotteisen vektorin komponenteiksi:

$$p \equiv \frac{E}{c}\hat{e}_t + p_x\hat{e}_x + p_y\hat{e}_y + p_z\hat{e}_z$$

missä $E = \gamma mc^2$, $p_x = \gamma m v_x$ jne

p: neliliikemäärä; t, x, y, z -kantavektoreita

Usein merkitään $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$

Pistetulon määritelmä eroaa "normaalista":

$$p\cdot p = \left(\frac{E}{c}\right)^2 \underbrace{\hat{e}_t\cdot\hat{e}_t}_{=1} + p_x^2\underbrace{\hat{e}_x\cdot\hat{e}_x}_{=-1} + p_y^2\underbrace{\hat{e}_y\cdot\hat{e}_y}_{=-1} + p_z^2\underbrace{\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z}_{=-1} = \frac{E^2}{c^2} - |\bar{p}|^2 = m^2c^2$$

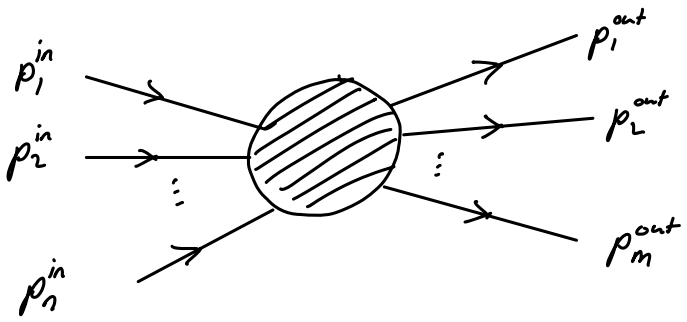
$\Rightarrow p\cdot p = m^2c^2$ Lorentz-invariantti 4-vektorin pituus

---

Crop here

E ja $\bar{p}$ vs. neliliikemäärä

4-liikemäärä $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$



$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_{in}} E_i^{in} &= \sum_{i=1}^{N_{out}} E_i^{out} \\ \sum_{i=1}^{N_{in}} \bar{p}_i^{in} &= \sum_{i=1}^{N_{out}} \bar{p}_i^{out} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N_{in}} p_i^{in} = \sum_{i=1}^{N_{out}} p_i^{out}$$

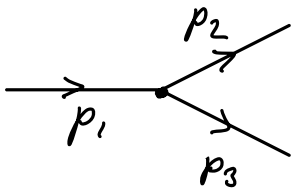
$E, \bar{p}$ säilyy $\Leftrightarrow$ 4-liikemäärä $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$ säilyy

---

Crop here

"Invariantti massa" (ks. labratyö: Cern-datan analysointi)

Tarkastellaan esim. $1 \to 2$ hajoamisreaktiota



Neliötilaemäärille:

$$p_1 = p_2 + p_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_1 = E_2 + E_3 \\ \bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3 \end{cases}$$

$$p_1 \cdot p_1 = \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - |\bar{p}_1|^2 = m_1^2 c^2$$

$$m_1^2 c^2 = p_1 \cdot p_1 = (p_2 + p_3) \cdot (p_2 + p_3) \quad \Leftrightarrow \quad m_1^2 c^2 = \left(\frac{E_2 + E_3}{c}\right)^2 - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2$$

$$\Rightarrow m_1^2 = \frac{1}{c^2}(p_2 + p_3) \cdot (p_2 + p_3) \quad \Leftrightarrow \quad m_1^2 = \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{E_2 + E_3}{c}\right)^2 - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2\right)$$

"invariantti massa" eli hajoavan hiukkasen massa L-inv. muodossa laskettuna tuotehiukkasten avulla

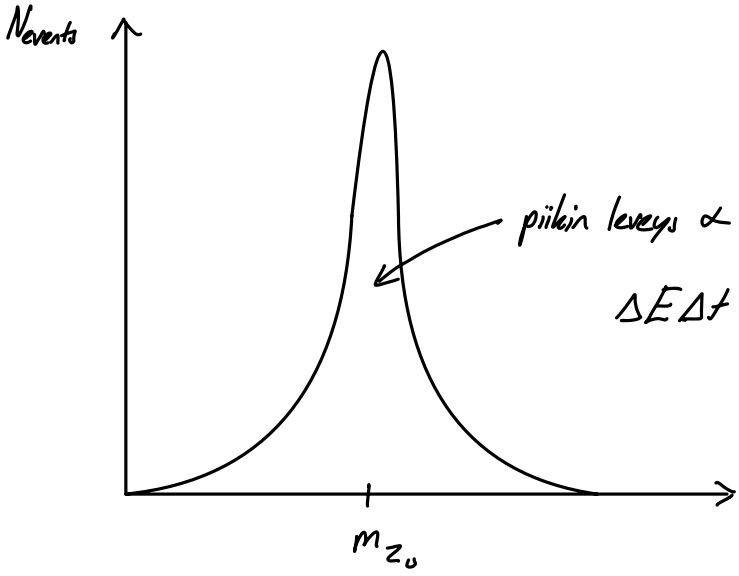
---

Crop here

Labratyössä tarkastellaan hajoamisreaktiota $Z_0 \to \mu^+, \mu^-$

Z-bosoni, anti-myoni, myoni

(näihin palataan hiukfys. -osassa)



piikin leveys $\propto \tau^{-1}$, missä τ hajoavan hiukan elinikä

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \to \Delta E = \Delta M \sim \frac{\hbar}{\tau}$$

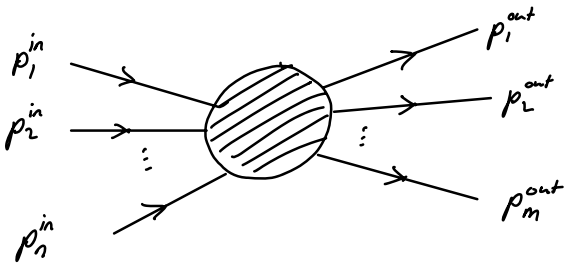
$$M_{\mu^+\mu^-} = \frac{\sqrt{(p_{\mu^+} + p_{\mu^-})^2}}{c}$$ inv. massa

---

Crop here

Yhteenveto: energia ja liikemäärä suhteellisuusteoriassa

- Energia: $E = \gamma mc^2 = \underbrace{mc^2}_{=E_0} + \underbrace{(\gamma - 1)mc^2}_{=E_{kin}}$ $\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- Liikemäärä: $\bar{p} = \gamma m \bar{v}$
- $E = \sqrt{m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2}$, $m = 0 \Rightarrow E = |\bar{p}|c$
- E ja $\bar{p}$ säilyvät

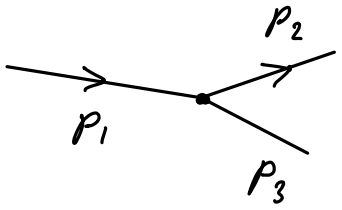


$E_{in} = E_{out}$

$\bar{p}_{in} = \bar{p}_{out}$

Crop here

Esim.



$m_2 = m_3 = m$ hiukkasilla 2 ja 3 sama massa

$$E_1 = E_2 + E_3$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3$$

$$m_1^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - |\bar{p}_1|^2 = \frac{(E_2 + E_3)^2}{c^2} - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2$$

Lorentz-invariantteja ehtoja, voimassa missä tahansa in. koordinaatistossa

Tarkastellaan hiukkasia massakeskipistekoordinaatistossa ($\sum_i \bar{p}_i = 0$)
(Center of Mass (CM) frame)

$$E_1 = m_1 c, \quad \bar{p}_1 = \bar{0} \qquad \bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}_2 = -\bar{p}_3 \equiv \bar{p}$$

$$E_2 = \gamma_2 m c^2$$

$$E_3 = \gamma_3 m c^2 = \gamma_2 m c^2 = E_2 \qquad E_1 = E_2 + E_3 = 2E_2 \equiv 2E$$

$\uparrow$ $|\bar{p}_2| = |\bar{p}_3|$

Crop here

$$m_1^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - |\bar{p}_1|^2 = \frac{(E_2+E_3)^2}{c^2} - |\bar{p}_2+\bar{p}_3|^2$$

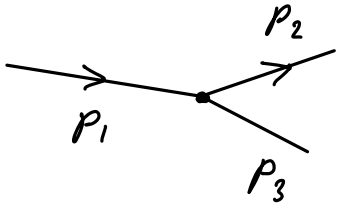
$$= \frac{4E^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow E^2 = m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2 = \frac{1}{4}m_1^2c^4$$

$$|\bar{p}| = \frac{c}{2}\sqrt{m_1^2 - 4m^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 \geq 2m}$$

massaton hitu ei voi hajota 2:ksi massalliseksi



Pätee yleisemminkin:

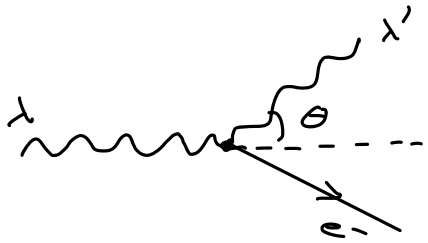
$$m_1 \geq m_2 + m_3$$

Crop here

Compton-sironta

Fotonien sironta elektroneista:

(γ säteiden vv. aineen kanssa
$\Rightarrow$ materiaalifys., lääketiet. fys., ...)



Compton 1923: $\underbrace{\lambda' - \lambda}_{\equiv \Delta\lambda} = \underbrace{\frac{h}{m_e c}}_{\equiv \lambda_e \simeq 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}} (1 - \cos\theta)$ Aaltokuvassa $\lambda' = \lambda \Rightarrow$ **fotonit hiukkasia**

elektronin Compton aallonpituus

Johdetaan Comptonin tulos:

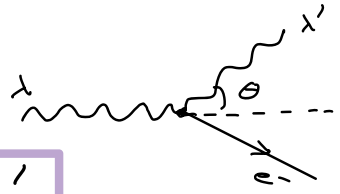
LAB-koordinaatisto

$E_e = m_e c^2$, $\bar{p}_e = \bar{0}$	kohde e^-	E_e', $\bar{p}_e'$	sironnut e^-
$E_\gamma = \lvert\bar{p}_\gamma\rvert c$, $\bar{p}_\gamma = \bar{p}_\gamma$	saapuva fotoni	$E_\gamma' = \lvert\bar{p}_\gamma'\rvert c$, $\bar{p}_\gamma'$	sironnut γ

$(E_\gamma = \hbar\lvert\bar{k}\rvert c = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} c = \frac{hc}{\lambda})$

Crop here

Compton-sironta



$E_e = m_e c^2$, $\bar{p}_e = \bar{0}$ lohkle e^-

$E_\gamma = |\bar{p}_\gamma| c$, $\bar{p}_\gamma = \bar{p}_\gamma$ saapuva fotoni

E_e', $\bar{p}_e'$ sironnut e^-

$E_\gamma' = |\bar{p}_\gamma'| c$, $\bar{p}_\gamma'$ sironnut γ

$$E_e + E_\gamma = E_e' + E_\gamma'$$
$$\bar{p}_e + \bar{p}_\gamma = \bar{p}_e' + \bar{p}_\gamma'$$

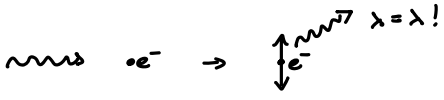
$$m_e^2 c^2 = \frac{E_e'^2}{c^2} - |\bar{p}_e'|^2$$
$$= \frac{(E_e + E_\gamma - E_\gamma')^2}{c^2} - |\underbrace{\bar{p}_e}_{=0} + \bar{p}_\gamma - \bar{p}_\gamma'|^2$$
$$= \frac{(m_e c^2 + |\bar{p}_\gamma| c - |\bar{p}_\gamma'| c)^2}{c^2} - |\bar{p}_\gamma - \bar{p}_\gamma'|^2$$
$$= m_e^2 c^2 + |\bar{p}_\gamma|^2 + |\bar{p}_\gamma'|^2 - 2|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'| + 2 m_e c (|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|) - (|\bar{p}_\gamma|^2 + |\bar{p}_\gamma'|^2 - 2\underbrace{\bar{p}_\gamma \cdot \bar{p}_\gamma'}_{= |\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'|\cos\theta})$$
$$0 = 2|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'|(\cos\theta - 1) + 2 m_e c (|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|)$$

$$1 - \cos\theta = m_e c \frac{(|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|)}{|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'|} \qquad |\bar{p}_\gamma| = \frac{h}{\lambda}$$
$$= m_e c \left(\frac{\lambda'}{h} - \frac{\lambda}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

$\Delta\lambda \sim \lambda_e \sim 10^{-12}\,m$, merkityksetön jos $\lambda \gg 10^{-12}\,m$

Vit aallon sironta elektronista



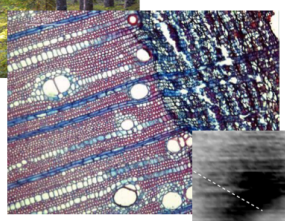
Compton 1923: $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$ fotonit käyttäytyvät kuin hiukkaset, SM kentän kvantteja !

Crop here

Monimutkaisuus koostuu yksinkertaisista osista

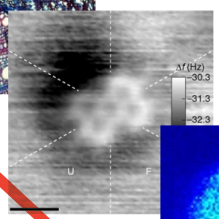


1 m



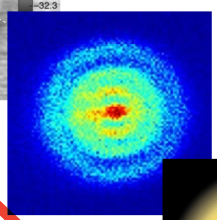
Solu

10^{-4} m



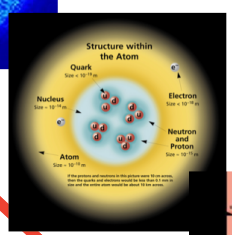
Molekyyli

10^{-9} m



Atomi

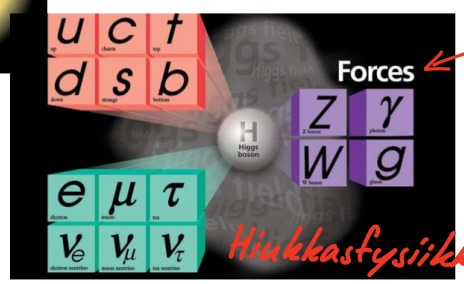
10^{-10} m



Atomiydin

10^{-15} m

Alkeishiukkaset



Monimutkaisuus kasvaa

Energiatiheys kasvaa

Kemia/nanofysiikka

Ydinfysiikka

Hiukkasfysiikka

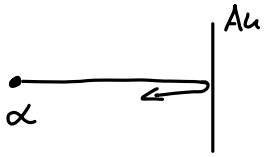
vahva vv.
heikko vv.
sähkömag. vv.
+ gravitaatio

Kaikki luonnonlait palautuvat lopulta alkeishiukkasten ominaisuuksiin!

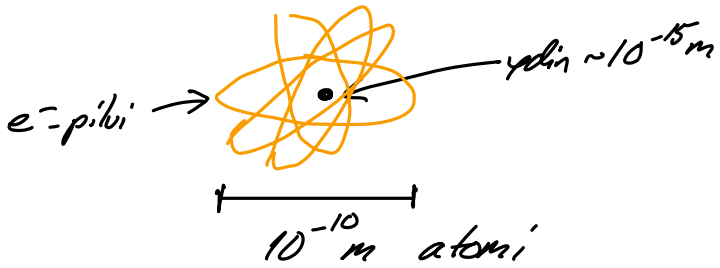
Crop here

Ydinfysiikkaa

- Rutherford 1909



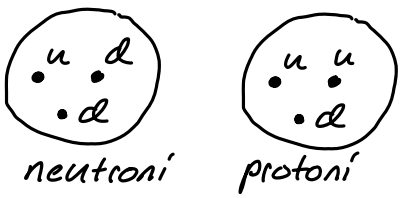
⇒ Atomin massa keskittynyt pos. varattuun ytimeen



- Ydin koostuu nukleoneista: neutroni n, ei sähkövarausta $Q_n = 0$

  protoni p^+, pos. varaus $Q_p = +e$

- Nukleonit koostuvat edelleen kvarkeista = alkeishiukkasia



Kvarkeilla sähkövaraus $Q_u = \frac{2}{3}e$, $Q_d = -\frac{1}{3}e$

ja ns. värivaraus ⇒ vahva vuorovaikutus, pitää nukleonit koossa

---

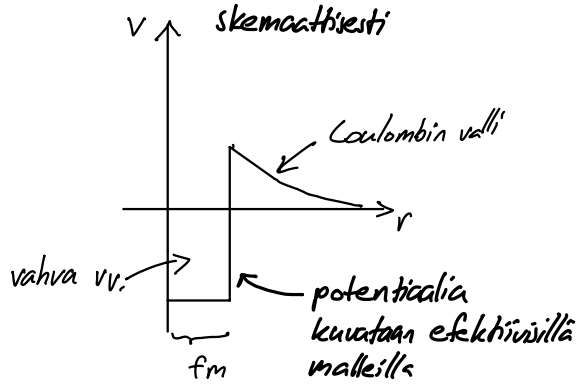
Crop here

- Vahva vuorovaikutus pitää nukleonit koossa eli sitoo kvarkit protoneiksi ja neutroneiksi (Quantum Chromo Dynamics = QCD)
- Vahva vv. $\Rightarrow$ attraktiivinen residuaalivoima n ja p^+ välillä, pitää ytimet koossa

  lyhyt kantama $\lesssim$ fm $= 10^{-15}$ m
- Positiivisesti varattujen p^+ välillä myös repulsiivinen Coulombin voima, pyrkii hajottamaan ytimiä

  $\Rightarrow$ ydin = monimutkainen monen kappaleen sidottu kvanttisysteemi
- Käytännössä ei osata ratkoa eksaktisti, vaikka mikroskoppinen teoria tunnetaan

  $\Rightarrow$ efektiivisiä malleja ytimille



- Ydinfysiikka luonnossa / sovelluksissa:

  radioaktiivisuus, aurinko, nukleosynteesi, ydinvoima, lääketiet. fys., näytteiden iän / koostumuksen määritys...

Crop here

Nimityksiä

Z = atomin järjestysluku eli protonien lkm. ytimessä = elektronien lkm.

N = neutroniluku eli neutronien lkm. ytimessä

$A = Z + N$ = massaluku eli nukleonien lkm. ytimessä

Z määrää kemialliset ominaisuudet

Merkintä: $\boxed{{}^{A}_{Z}X_{N} \text{ tai } {}^{A}_{Z}X \text{ tai } {}^{A}X}$

X = alkuaineen nimi

esim. ${}^{13}_{6}C_{7}$

Nuklidi = ${}^{A}_{Z}X_{N}$ ydin, jolla tietty Z ja N

Isotoopit = nuklideja, joilla sama Z mutta eri N

esim. ${}^{12}_{6}C_{6}$ ja ${}^{13}_{6}C_{7}$ sama kemia $\Rightarrow$ sama alkuaine, eri ydinfysiikka

---

Crop here

Nukleonien massat

$$M_{atomi} \simeq M_{ydin} + Z m_e \simeq A \cdot u$$

↑ taulukoista

↑ pieni

atomimassayksikkö:

$$u = 931{,}49 \frac{MeV}{c^2} \equiv \frac{1}{12} M_{^{12}C}$$

$1\,eV \simeq 1.60 \cdot 10^{-19}\,J$

$m_p = 938{,}28\ MeV/c^2 = 1{,}00728\ u$

$m_n = 939{,}57\ MeV/c^2 = 1{,}00866\ u$

$m_e = 0{,}511\ MeV/c^2 = 5{,}49 \cdot 10^{-4}\ u \ll m_p, m_n$

$m_p \simeq m_n$, keskeinen ehto elämälle !

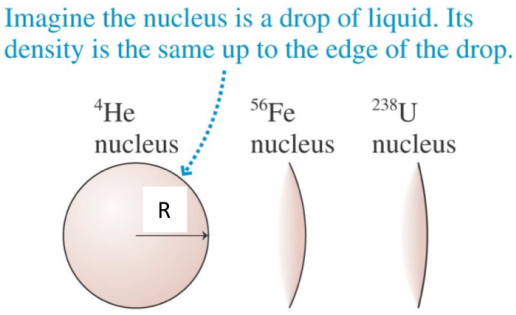
$m_p \to (1 \pm 0{,}01) m_p$ → ei atomeja

→ ei tähtiä

Crop here

Ytimen koko:

Massatiheys ja varaustiheys (lähes) vakioita ytimen sisällä.
Ytimellä ei ole täsmällistä pintaa.



$R = R_0 A^{1/3}$,*missä* $R_0 = 1.2 \times 10^{-15}$ m (kokeellisesti).

Ydinaineen tiheys:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi R_0^{\,3} A$$

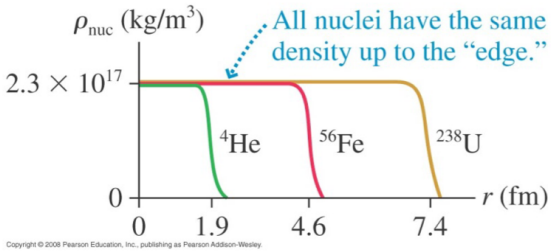
$M \approx A \cdot u$

$\Rightarrow$

$$\rho = \frac{Au}{\tfrac{4}{3}\pi R_0^{\,3} A} = \frac{3u}{4\pi R_0^{\,3}} \quad (= \text{vakio})$$

$\frac{M}{V} \propto \frac{A}{R^3} = \text{vakio}$

$\Rightarrow R \propto A^{1/3}$



$= 2.3 \times 10^{17}$ kg/m^3

Esim. 1 mm^3 ydinainetta vastaa 2.3×10^8 kg!

Siis : Ytimen tilavuus kasvaa suoraan verrannollisena nukleonien määrään !!

(Courtesy: R. Julin)

Crop here

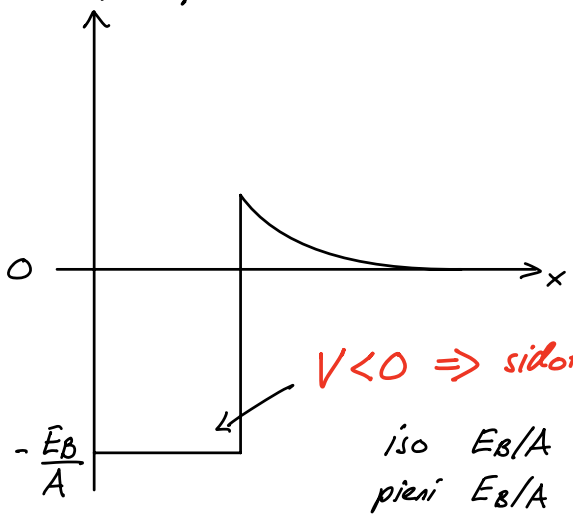
Sidosenergia: Ydin sidottu systeemi $\Leftrightarrow$ $M_{ydin} < Z \cdot m_p + N \cdot m_n$

Sidosenergia $E_B \equiv (Z \cdot m_p + N \cdot m_n - M_{ydin}({}^{A}_{Z}X_N))c^2$

$= (\text{osien massa} - \text{yhdisteen massa})c^2$

Sidosenergia/nukleoni E_B/A mittaa sidoksen voimakkuutta

V_{eff} yksittäisen nukleonin kokema potentiaali (karkeasti)



iso E_B/A vahva sidos

pieni E_B/A heikko sidos

Crop here

Taulukoissa annettuja atomimassoja:

$$M\left({}^{A}_{Z}X_N\right) = M_{ydin}\left({}^{A}_{Z}X_N\right) + Z m_e - \frac{B_x}{c^2}$$ ($\frac{B_x}{c^2} \to 0$) ← atomin sidosenergia eli elektronien sidosenergia

$$\frac{B_x}{c^2} = \mathcal{O}(eV/c^2) \ll m_n, m_p$$

$$E_B = \left(Z \cdot m_p + N \cdot m_n - M_{ydin}\left({}^{A}_{Z}X_N\right)\right)c^2$$

$$= \left(Z \cdot (m_p + m_e) + N \cdot m_n - M_{ydin}\left({}^{A}_{Z}X_N\right) - Z m_e\right)c^2$$

$$= \left(Z \cdot M\left({}^{1}_{1}H\right) + \mathcal{O}(B_H/c^2) + N \cdot m_n - M\left({}^{A}_{Z}X_N\right) - \mathcal{O}(B_x/c^2)\right)c^2$$

($\mathcal{O}(B_H/c^2) \to 0$, $\mathcal{O}(B_x/c^2) \to 0$)

$$\boxed{E_B = \left(Z \cdot M\left({}^{1}_{1}H\right) + N \cdot m_n - M\left({}^{A}_{Z}X_N\right)\right)c^2}$$

$M\left({}^{1}_{1}H\right)$ ja $M\left({}^{A}_{Z}X_N\right)$ atomimassoja

---

Crop here

Esim. Mikä on ^{56}Fe:n sidosenergia?

Taulukoista: $M(^{56}Fe) = 55,93494\,u$ $\qquad u = 931,49\,MeV/c^2$

$M(^1H) = 1,00782\,u$

$m_n = 1,00866\,u$

Fe:lle $Z = 26$, $A = 56 \Rightarrow N = A - Z = 30$

$$E_B = (26 \cdot M(^1H) + 30 \cdot m_n - M(^{56}Fe))c^2 \simeq 0,528\,u\,c^2 \simeq \underline{492\,MeV}$$

Sidosenergia per nukleoni $\dfrac{E_B}{A} \simeq 8,79\,MeV$

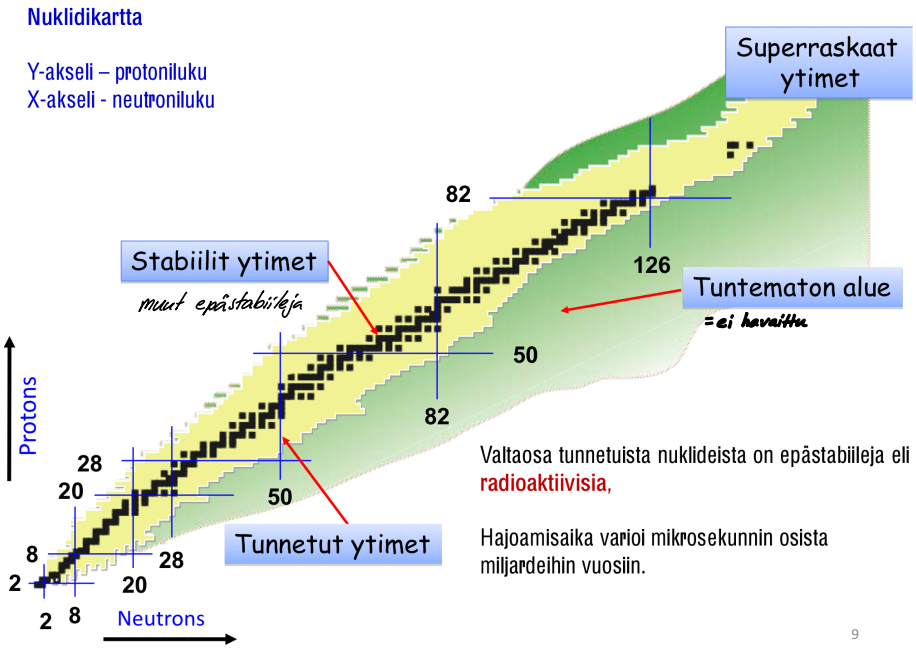
Crop here

Ytimen stabiilius

- Ydin = sidotun tila, voi olla stabiili tai epästabiili (havaittu n. 3000, mallit → n. 7000)

  Kaikki kombinaatiot $Z \cdot p^+ + N \cdot n$ eivät muodosta ytimiä

- Stabiili ydin: ei hajoa spontaanisti, E_B/A lokaali maksimi (n. 280 kpl)
- Epästabiili ydin: hajoaa spontaanisti toisiksi ytimiksi ⇒ radioaktiivisuus



Vapaana:

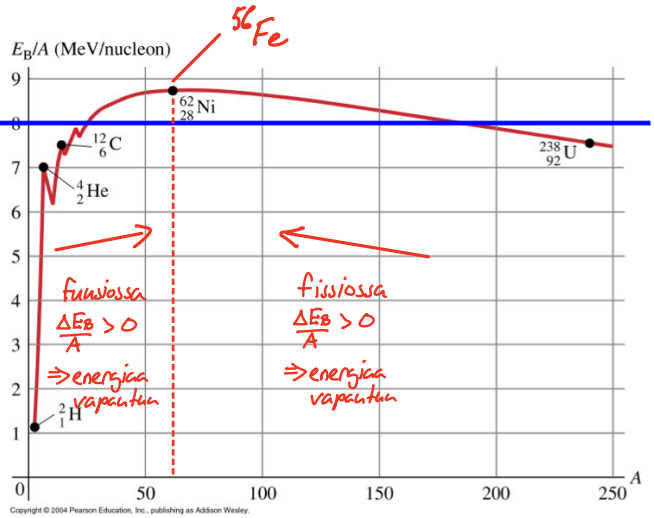
p stabiili ($T_p > 10^{34}$ vuotta)

n hajoaa ($T_n \sim 15$ min)

Crop here

E_B/A = sidosenergia nukleonia kohti

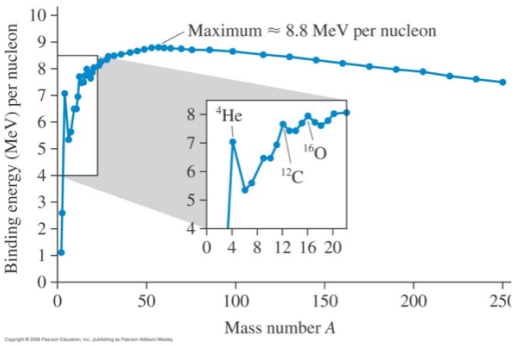
(stabiilien ytimien laaksoa pitkin) (eli kun $Z \sim N$)



8 MeV / nukleoni

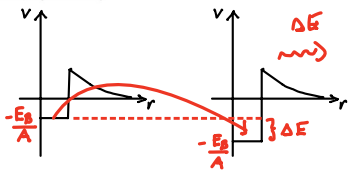
Tyypillinen skaala

Kirjan kuva:



Raskaiden ytimien E_B/A pienempi kuin keskiraskaiden ytimien
→ Raskaiden ytimien halkeamisessa eli fissiossa vapautuu energiaa

Keveiden ytimien E_B/A paljon pienempi kuin keskiraskaiden ytimien
→ Keveiden ytimien fuusiossa vapautuu energiaa

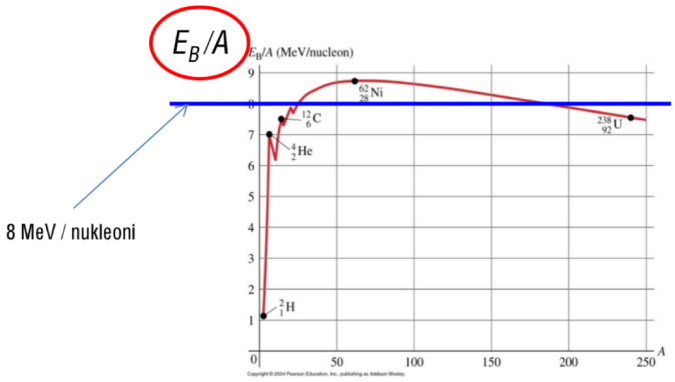


↑ fuusio = ytimien yhdistyminen

(Courtesy: R. Julin)

Crop here

Ytimen nestepisaramalli



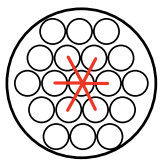
Puolikokeellinen malli sidosenergialle:

$$E_B = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 Z(Z-1) A^{-1/3} - C_4 (N-Z)^2 A^{-1} + C_5 \delta(N,Z) A^{-4/3}$$

C_i = vakioita

$C_1 A$: Tilavuustermi, johtava termi, $C_1 A > 0$

Vahva vv. lyhyen kantaman voima, ytimet sidoksissa lähinaapureihinsa $E_B \propto V$



Mallinnetaan ydintä kokoonpuristumattomana nesteenä

tiheys ρ = vakio, $\rho = \frac{M}{V} \propto \frac{Au}{R^3}$ = vakio $\Rightarrow$ $R \propto A^{1/3}$

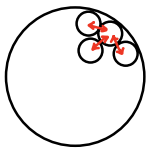
$\Rightarrow$ $E_B \propto V \propto R^3 \propto A$

Crop here

$$E_B = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 Z(Z-1) A^{-1/3} - C_4 (N-Z)^2 A^{-1} + C_5 \delta(N,Z) A^{-4/3}$$

$-C_2 A^{2/3}$: Pintatermi $\quad -C_2 A^{2/3} < 0$ ("pintajännitys")

Reunalla vuorovaikutuksia vain sisempien parien kanssa $\Rightarrow E_B$ pienenee



Pinta-ala $R^2 \propto A^{2/3}$

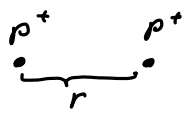
$\Rightarrow E_B \propto -A^{2/3}$

Pintatermillä suurin vaikutus kevyille ytimille (↑ pieni A), joille $\frac{R^2}{R^3} \propto A^{-1/3}$ suurin.

$-C_3 Z(Z-1) A^{-1/3}$: Coulombin repulsiotermi

pitkän kantaman vv.

Protonien välillä repulsiivinen Coulombin potentiaali $V \propto \frac{e^2}{r}$



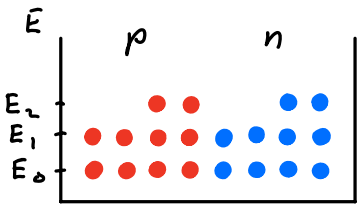
Ytimessä $Z(Z-1)$ protoniparia, etäisyys $R \propto A^{1/3}$

$\Rightarrow E_B \propto -Z(Z-1) A^{-1/3}$

Crop here

$$E_B = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 Z(Z-1) A^{-1/3} - C_4 (N-Z)^2 A^{-1} + C_5 \delta(N,Z) A^{-4/3}$$

$-C_4 (N-Z)^2 A^{-1}$: Epäsymmetriatermi



n, p fermioneja, identtiset fermionit, esim. 2n tai 2p, eivät voi olla samassa tilassa

$\Rightarrow N = Z$ energeettisesti edullisinta

$+C_5 \delta(N,Z) A^{-4/3}$: Parillisuuskorjaus, seuraa myös fermionistatistiikasta

$$\delta(N,Z) = \begin{cases} 1 & \text{kun } N \text{ ja } Z \text{ molemmat parillisia} \\ -1 & \text{kun } N \text{ ja } Z \text{ molemmat parittomia} \\ 0 & \text{muissa tapauksissa} \end{cases}$$

Näiden termien N, Z, A riippuvuuksien perustelu sivuutetaan

Crop here

$$E_B = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 Z(Z-1) A^{-1/3} - C_4 (N-Z)^2 A^{-1} + \delta C_5 A^{-4/3}$$

Kertoimet (määritetty kokeellisesta datasta (↔ *puolikokeellinen* kaava)):

C_1 = 15.75 MeV
C_2 = 17.80 MeV
C_3 = 0.7100 MeV
C_4 = 23.69 MeV
C_5 = 39 MeV

Massakaava toimii yleensä hyvin ("keskimääräinen käyttäytyminen").

Isobaarileikkaus on paraabeli → stabiilien ytimien laakso

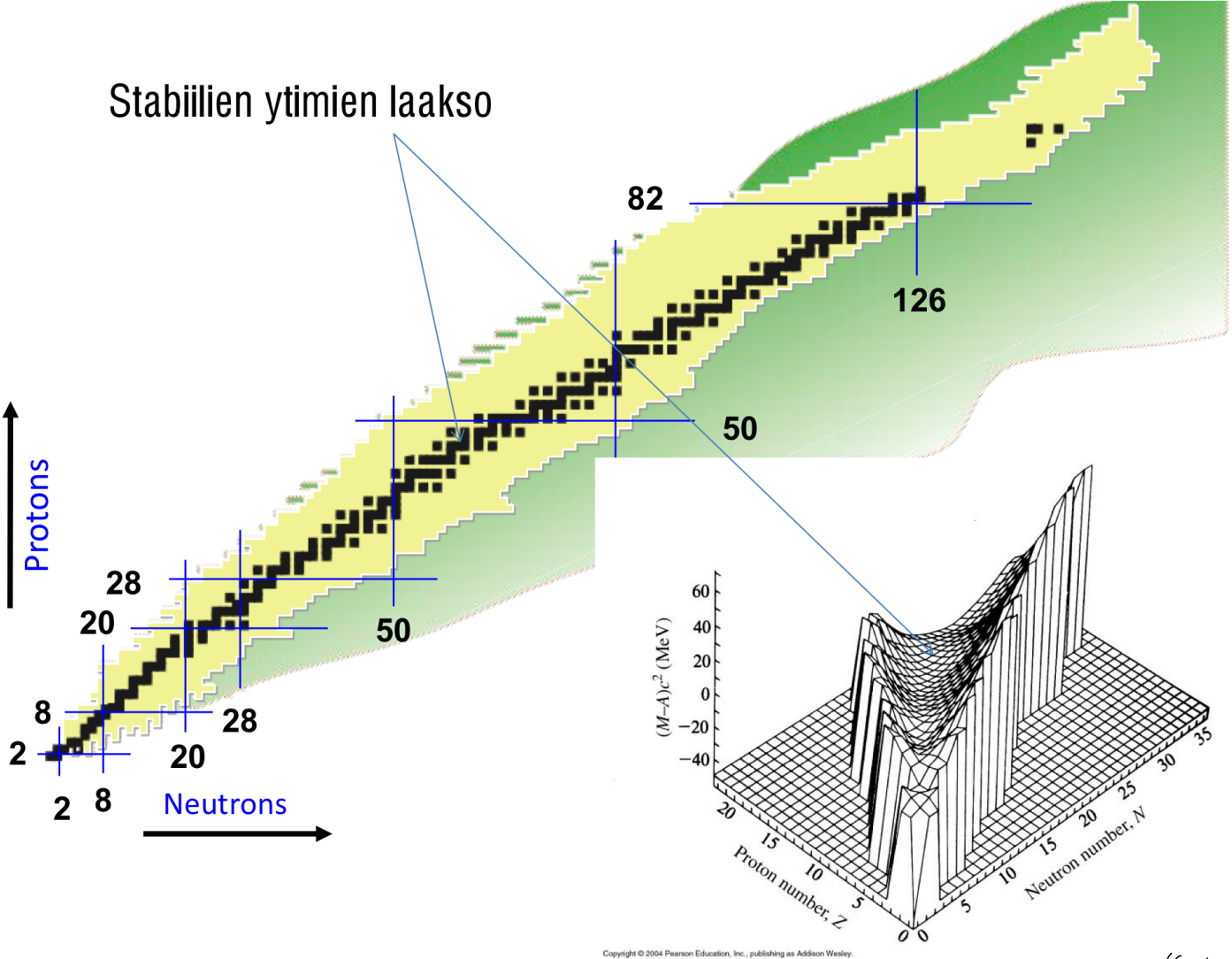
Isobaari = nukleonit, joilla sama $A = Z + N \Rightarrow Z = A - N$

$$^{A}_{Z}Mc^2 = (Z \times M_H + N \times m_n) c^2 - E_B$$

(Courtesy: R. Julin)

Crop here

Stabiilien ytimien laakso



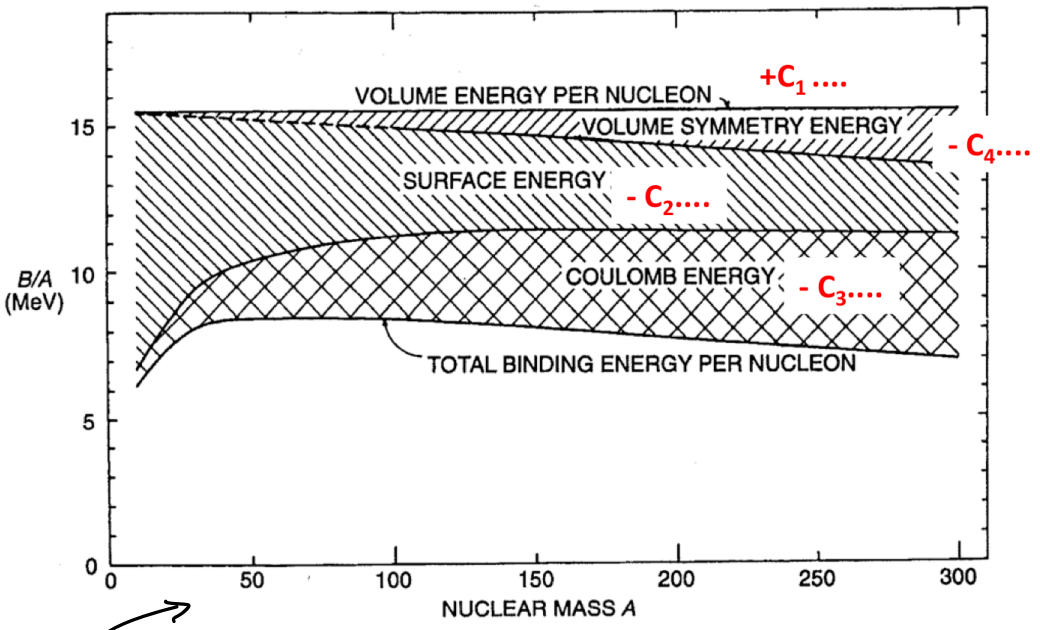
Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.

(Courtesy: R. Julin)

Crop here

$$E_B = +C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 Z(Z-1) A^{-1/3} - C_4 (N-Z)^2 A^{-1} + \delta C_5 A^{-4/3}$$

B = E_b

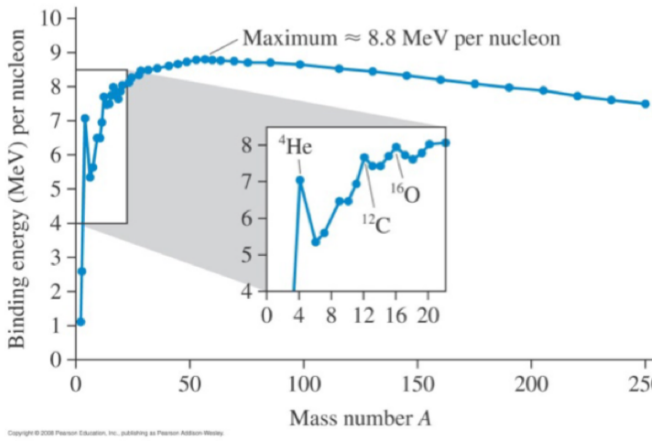


Stabiilien ytimien laakson pitkin $Z \sim N \sim \frac{A}{2}$

(Courtesy R. Julin)

Crop here

Ytimen kuorimalli



Nestepisaralli toimii keskimäärin hyvin, mutta tietyille ytimille E_B mallin ennusteita suurempi

$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$
$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$
"magic numbers"

Vrt atomin ionisaatioenergian maksimit jalokaasuille, joilla täydet elektronikuoret

Ydin monimutkainen kvanttimekaaninen systeemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

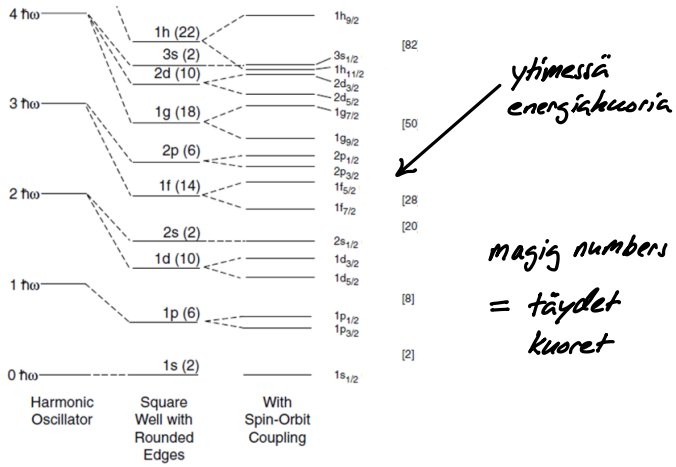
↖ ei osata laskea

Efektiivisiä malleja V:lle

$\Rightarrow \psi = \psi_{emn}$ kvantittuneet energiatilat

(vrt vetyatomi)

Loveland, Morrissey, & Seaborg, Modern Nuclear Chemistry (2006)



ytimessä energiakuoria

magic numbers = täydet kuoret

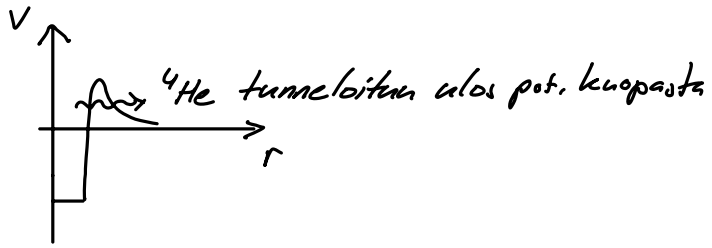
Crop here

Radioaktiivisuus

Epästabiilit ytimet hajoavat spontaanisti ytimen rakenteesta riippuvassa aikaskaalassa.

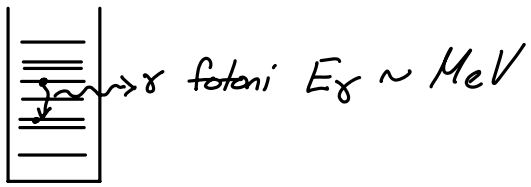
Hajoamismekanismeja on erilaisia: (näihin palataan tarkemmin)

- α-hajoaminen: $2n + 2p \rightarrow {}^4He$ energiaa vapautuu



- β-hajoaminen: $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ ← poistuvat ytimestä

- γ-hajoaminen: Ytimen sisäinen viritystila purkaantuu



Crop here

Hajoamislaki

$N(t)$ = aktiivisten ydinten lkm. hetkellä t

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \lambda = \text{hajoamisvakio} \qquad [\lambda] = \frac{1}{s} \equiv Bq$$

↑ yhden ytimen tod. näk. hajota

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$$

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda(t - t_0) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

↑ $N_0 = N(t_0)$

Valitaan $t_0 = 0$ $\Rightarrow$ $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

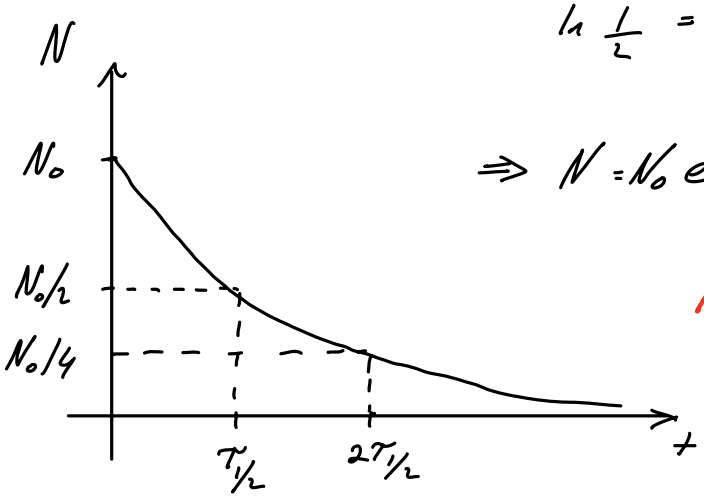
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N$$

Crop here

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ $\quad \frac{1}{\lambda} \equiv \tau$ = keskim. (yhtäm.) elinaika

Puoliintumisaika $\tau_{1/2}$: aika, jonka kuluessa puolet näytteen aktiivisista ytimistä hajonnut

$$N(\tau_{1/2}) \equiv \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda \tau_{1/2}} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \tau_{1/2}}$$



$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda \tau_{1/2} \qquad \tau_{1/2} = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \tau \ln 2$$

$$\Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_{1/2}} \ln 2} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau_{1/2}}}$$

Aktiivisuus : $A(t) \equiv \left| \frac{dN}{dt} \right|$

Hajoamista/aikayks.

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

Crop here

α - hajoaminen

$$ {}^{A}_{Z}X_{N} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X'_{N-2} + {}^{4}_{2}He_{2} $$

emoydin tytäräydin α-hiukkanen

Energia säilyy: $M_X c^2 = M_{X'} c^2 + M_\alpha c^2 + E_{kin}(X') + E_{kin}(\alpha)$ (hajoavan ytimen lepokoordinaatisto)

$E = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2$
$= mc^2 + E_{kin}$

$$ \Rightarrow \quad Q \equiv (M_X - M_{X'} - M_\alpha)c^2 = E_{kin}(X') + E_{kin}(\alpha) $$

Q: Vapautuva energia

Tässä $Q \ll M_\alpha c^2 \Rightarrow$ epärel. raja $E_{kin} \simeq \frac{|\bar{p}|^2}{2M} \simeq \frac{1}{2} M |\bar{v}|^2$

Myös liikemäärä säilyy $\bar{p}_X = \bar{0} = \bar{p}_{X'} + \bar{p}_\alpha \Rightarrow |\bar{p}_{X'}| = |\bar{p}_\alpha|$

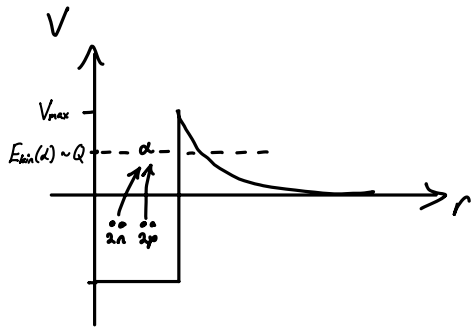
$$ Q = \frac{|\bar{p}_{X'}|^2}{2M_{X'}} + \frac{|\bar{p}_\alpha|^2}{2M_\alpha} = \underbrace{\frac{M_\alpha}{M_{X'}} \frac{|\bar{p}_\alpha|^2}{2M_\alpha} + \frac{|\bar{p}_\alpha|^2}{2M_\alpha}}_{= E_{kin}(\alpha)\,\frac{M_\alpha + M_{X'}}{M_{X'}}} \Rightarrow \boxed{E_{kin}(\alpha) = \frac{M_{X'}}{M_{X'} + M_\alpha} Q \simeq \frac{A-4}{A} Q} $$

appr. $M \simeq Au$

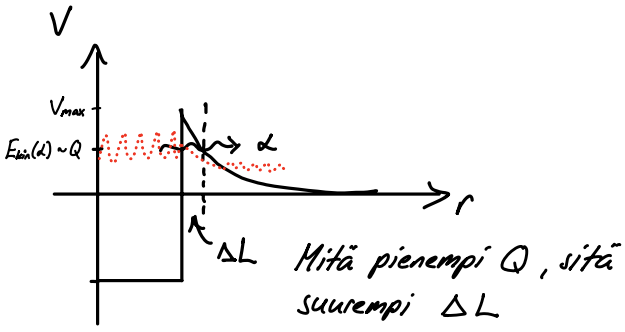
Crop here

α - hajoaminen on kaksivaiheinen prosessi

1. Ytimessä $2n + 2p \rightarrow {}^4He$, energiaa vapautuu



2. ${}^4He$ tunneloituu ulos ytimestä



Mitä pienempi Q, sitä suurempi ΔL

Tunneloitumisprosessin todennäköisyys: $P \propto \left| e^{-\Delta L \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{max} - Q)}} \right|^2$

Eksponentiaalinen ΔL-riippuvuus

Crop here