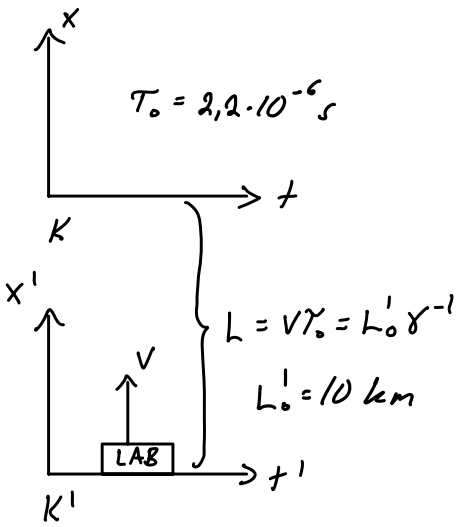
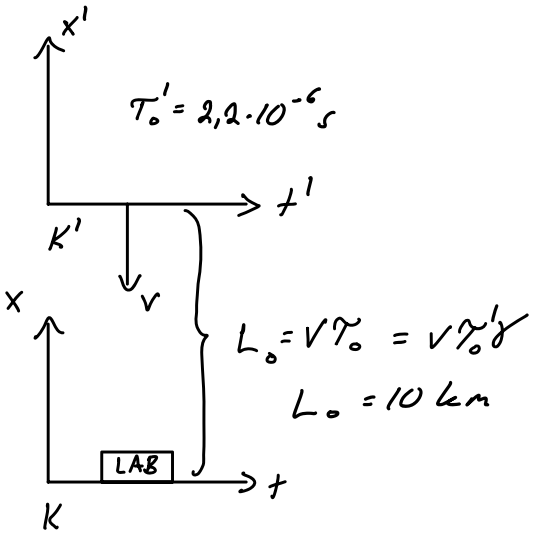
Myoniesimerkin yhteenveto:

Myonin lepokoordinaatistossa



LAB lepokoordinaatistossa



Suhteellinen nopeus samassa inertiaalikehyksessä:

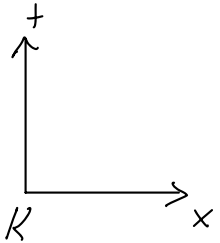
$$v = \frac{L}{\tau_0} = \frac{L_0' \gamma^{-1}}{\tau_0} = \frac{10\,km}{\gamma\, 2.2 \cdot 10^{-6}\,s}$$

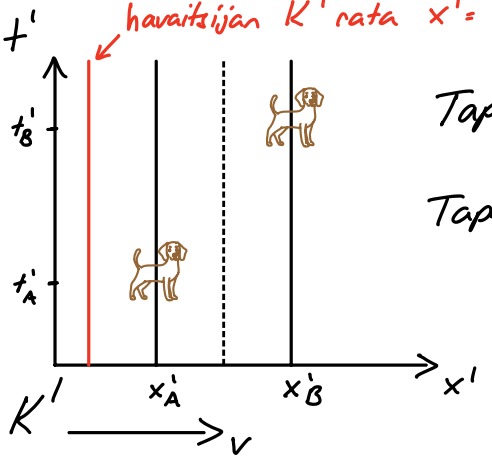
$$v = \frac{L_0}{\tau_0} = \frac{L_0}{\gamma \tau_0'} = \frac{10\,km}{\gamma \cdot 2.2 \cdot 10^{-6}\,s}$$

ajan ja paikan käsitteet riippuvat havaitsijasta

Varoittava esimerkki aikadilaation kaavan soveltamisesta:

Koira ylittää tien K':n lepokoordinaatistossa





Tapahtuma A: (t'_A, x'_A) "koira aloittaa tien ylityksen"

Tapahtuma B: (t'_B, x'_B) "koira ylittänyt tien"

Ylitysaika K:n mittaamana:

Aikadilaatio $\Rightarrow \Delta t = \gamma(t'_B - t'_A)$? **EI**

ylitysaika = tapahtumien A ja B aikaero K:ssa, $x'_A \neq x'_B$ joten aikadilaation kaavaa ei voi soveltaa

Lorentz-muunnos:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad x' = \gamma(x - vt) \Rightarrow t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \quad x = \gamma(x' + vt')$$

$$\Rightarrow t_B - t_A = \gamma\left(t'_B - t'_A + \frac{v}{c^2}\underbrace{(x'_B - x'_A)}_{\neq 0}\right)$$

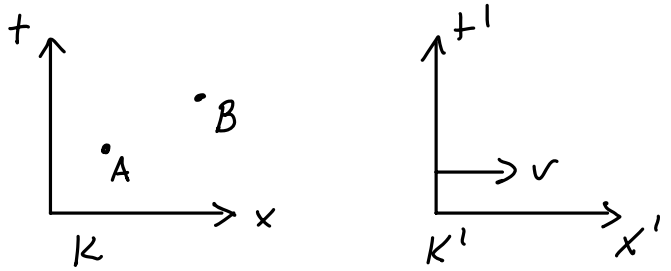
Aika-avaruuden pituuselementti:

Edellä nähtiin, että tapahtumien aika- ja paikkaerot Δt ja Δx eivät ole absoluuttisia, vaan riippuvat havaitsijasta.

Lorentz-muunnoksista kuitenkin seuraa (HT):

$$\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$$

määsitellee 4-ulotteisen aika-avaruuden (t, x, y, z) pituuselementin, kaikki inertiaalihavaitsijat mittaavat saman Δs^2:n



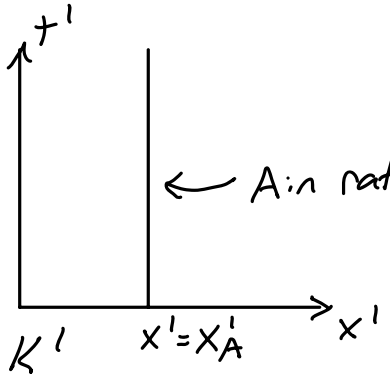
$$\Delta s_{AB}^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2$$
$$= c^2(t_B' - t_A')^2 - (x_B' - x_A')^2$$

jotain absoluuttista ✓

Itseisaika (proper time)

Δs^2:n absoluuttisuutta voidaan hyödyntää kun halutaan laskea annettua rataa kulkevan havaitsijan kellossa kuluva aika.

Havaitsijan A kellossa kuluva aika = A:n lepokoordinaatiston aika
≡ A:n itseisaika τ



Δs_A^2 A:n rataa pitkin:

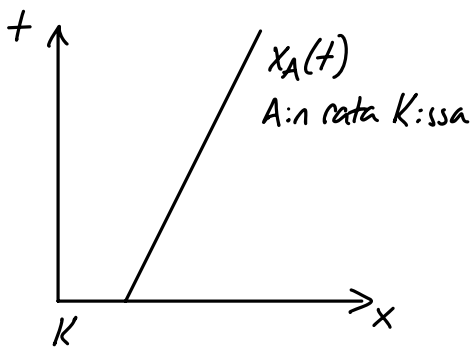
$$\Delta s_A^2 \equiv c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x'_A)^2$$
$$= c^2(\Delta t')^2$$

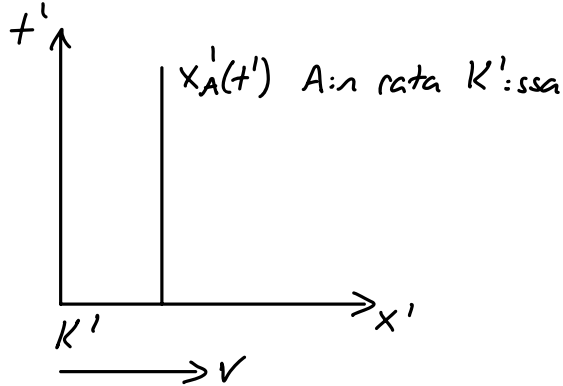
$$\Rightarrow \Delta\tau_A = \Delta t' = \sqrt{\frac{\Delta s_A^2}{c^2}}$$

Tässä kohtaa tämä vain tunnetun suureen kirjoittamista toisella tavalla.

Itseisaika (proper time)

Kirjoitetaan A:n itseisaika $\Delta\tau$ toisessa inertiaalikoordinaatistossa K:





$$(\Delta s_A)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x_A^2$$ ← Lasketaan A:n rataa pitkin

$$(\Delta s'_A)^2 = c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta\tau_A^2$$

Koska $(\Delta s_A)^2 = (\Delta s'_A)^2$, saadaan

$$\Delta\tau_A = \Delta t\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{\Delta x_A^2}{\Delta t^2}} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^{-1}\Delta t$$

aikadilaatio

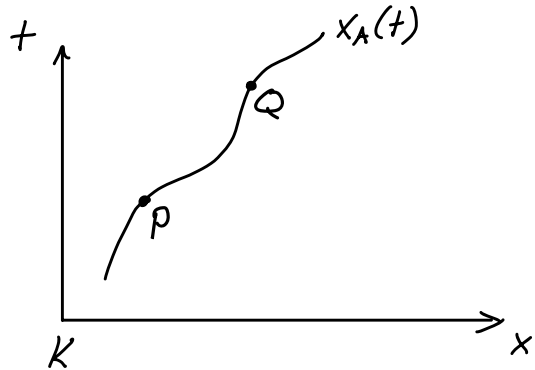
$\Rightarrow$ Käkvä laskukeino: havaitsijan mittaama aika saadaan laskemalla Δs^2 havaitsijan rataa pitkin missä tahansa koordinaatistossa.

Itseisaika (proper time)

Saadaan siis tulos: $\Delta\tau^2 = \frac{\Delta s^2}{c^2}$

Tämä pätee myös differentiaalisena ja myös kiihtyvässä liikkeessä olevalle kappaleelle

Itseisaika $d\tau^2 \equiv \frac{ds^2}{c^2}$



A:n kellossa kuluva aika tapahtumien P ja Q välillä:

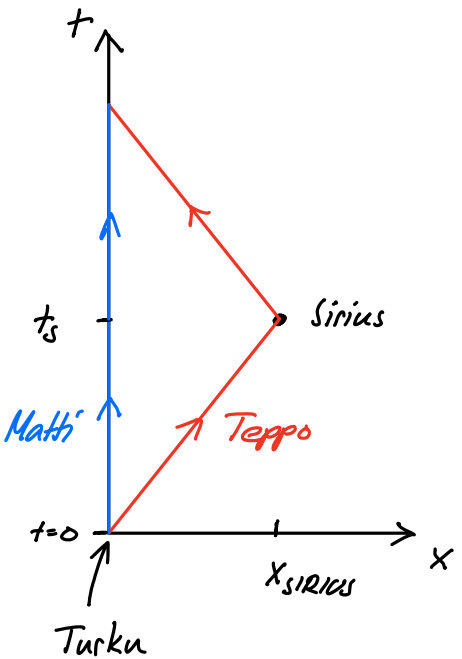
$$\tau_P - \tau_Q = \int_P^Q \frac{ds}{c} = \int_{t_P}^{t_Q} \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx_A^2} = \int_{t_P}^{t_Q} dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2}$$

τ määritelty kun $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 > 0 \Leftrightarrow \left|\frac{dx}{dt}\right| < c$

Kun $\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow d\tau = 0 \Rightarrow$ nopeudella c liikkuvan kappaleen aika pysähtyy

Kaksosparadoksi

Matti jää Turkuun ja Teppo lähtee kohti Siriusta



Tepon raketti kulkee nopeudella $v = 0{,}8c$

Matka Siriukseen $x_S = 8\ ly$ ← valovuosi = lightyear $= 3.00 \cdot 10^8\ m/s \cdot 1\ y \simeq 9{,}5 \cdot 10^{15}\ m$

$$t_S = \frac{8\ ly}{0{,}8c} = 10\ y$$

Matin mielestä Teppo liikkuu → Tepon kello jätättää

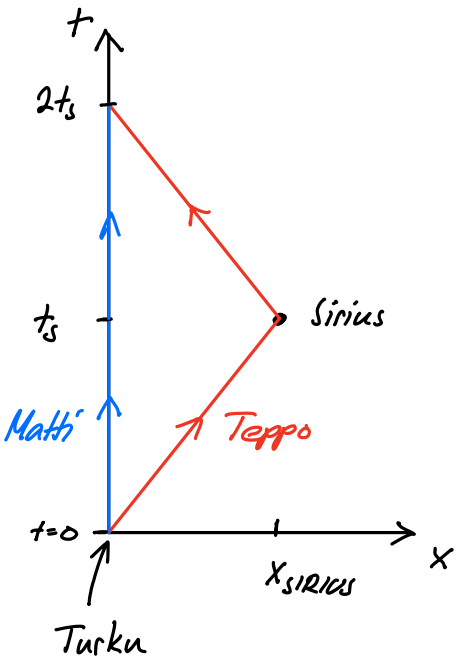
$$\Delta t'_{Teppo} = \Delta t_{Matti} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}6\ \Delta t_{Matti}$$

Tepon mielestä Matti liikkuu → Matin kello jätättää

$$\Delta t'_{Matti} = \Delta t_{Teppo} \sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}} = 0{,}6\ \Delta t_{Teppo}$$

Kumman kello näyttää enemmän kun Teppo palaa?

Havaitsijan kokema aika = itseisaika $\quad d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} \quad (dy = dz = 0)$ ← Lorentz-inv.



Matti: $\quad x_M(t) = 0$

$$\tau_M = \int_{\tau_{LÄHTÖ}}^{\tau_{PALUU}} d\tau_M = \int_0^{2t_s} dt = 2t_s = 20\,y$$

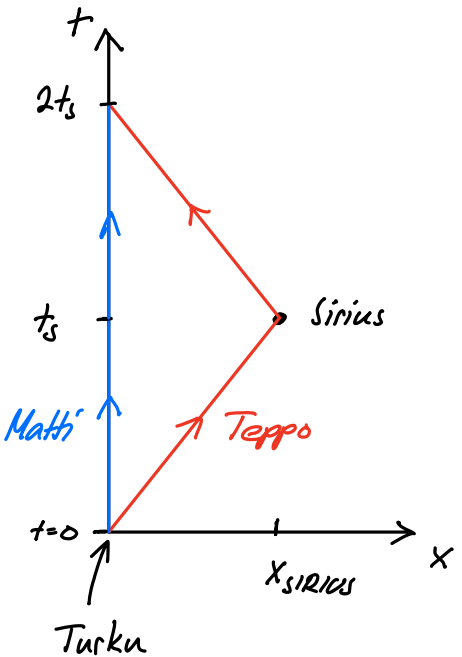
Teppo: $\quad x_T(t) = \begin{cases} vt, & t < t_s \\ vt_s - v(t - t_s), & t > t_s \end{cases}$

$$\tau_T = \int_{\tau_{LÄHTÖ}}^{\tau_{PALUU}} d\tau_T = \int_0^{2t_s} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{dx_T^2}{dt^2}}$$

$$\tau_T = \int_0^{t_s} dt \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{=0,6} + \int_{t_s}^{2t_s} dt \underbrace{\sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}}}_{=0,6} = 12\,y$$

$\Rightarrow$ Teppo ikääntyy vähemmän

Mikä erottaa Teppon Matista?



Matti pysyy koko ajan samassa in. koord.:ssa

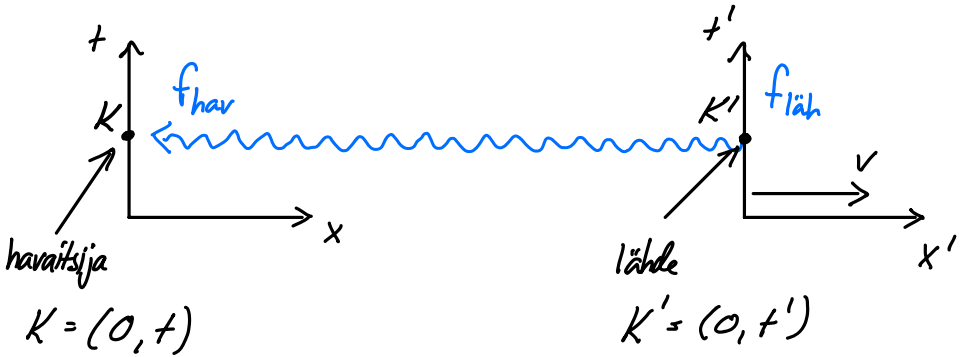
⇒ Matti ei koe kiihtyvyyksiä

Teppo vaihtaa in. koordinaatiston $v \to -v$

⇒ Teppo kokee kiihtyvyyden

Inertiaalihavaitsijan aika kuluu nopeammin !

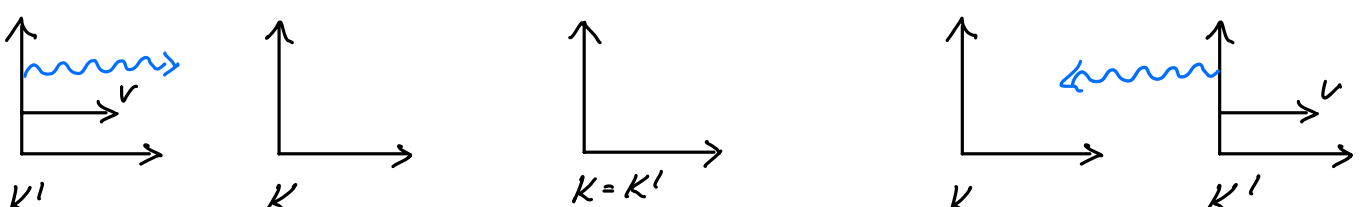
Dopplerin ilmiö K' lähettää valonsäteen taajuudella $f_{läh}$, mikä on f_{hav} K:ssa?



lähteen paikka K:ssa hetkellä t

Valitaan koordinaatit s.e. $x_{K'}(t=0) = 0 \Rightarrow x_{K'}(t) = vt$

$t < 0$ $\quad$ $t = 0$ $\quad$ $t > 0$

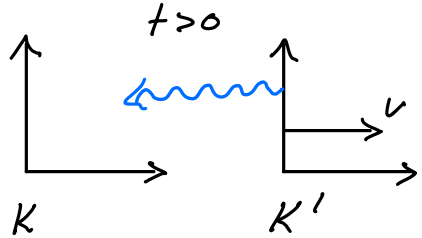


lähestyvä lähde $\quad$ loittoneva lähde

K:ssa:

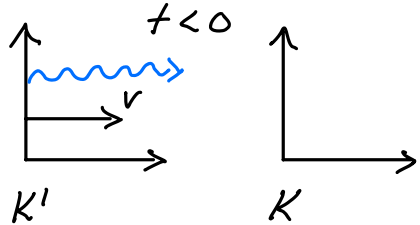
- Etäisyys lähteeseen:

$$x_{KK'}(t) = |\overbrace{x_{K'}(t)}^{=vt} - \overbrace{x_K(t)}^{=0}| = v|t|$$



- K' emittoi fotonin (x,t) pisteessä A:

$$(x_{K'}(t_A), t_A) = (vt_A, t_A)$$



- K vastaanottaa fotonin pisteessä B:

$$(x_K(t_B), t_B) = (0, t_B)$$

- Fotonin kulkema matka $= x_{KK'}(t_A)$:

nopeus c, matkaan kuluu aika $t_B - t_A$

$$x_{KK'}(t_A) = v|t_A| = c(t_B - t_A)$$

$$t_B = t_A + \frac{v}{c}|t_A|, \quad \frac{v}{c} \equiv \beta$$

$$\Rightarrow \quad t_B = t_A(1 \pm \beta)$$

\+ loittoneva lähde
− lähenevä lähde

- K saa signaalin hetkellä $t_B = t_A(1 \pm \beta)$ + loittoneva lähde, − lähenevä lähde

- Lähetyspistettä A: (vt_A, t_A) vastaava ajanhetki K′:ssa:

$$t_A' = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}(vt_A)\right) = \frac{t_A}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta^2) = t_A\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\begin{bmatrix} t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{bmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Näistä saadaan:

$$t_B = t_A(1 \pm \beta) = \frac{t_A'}{\sqrt{1-\beta^2}}(1 \pm \beta) = \frac{t_A'(1 \pm \beta)}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = t_A'\sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}$$

loittoneva: ylemmät merkit
lähenevä: alemmat merkit

- Lähteen koordinaatteissa lähetetyn valon aallonpituus on λ'.



$\lambda' = c\Delta t'$

Yhden jakson emittoimiseen kuluva aika $\Delta t'_{läh} = \frac{\lambda'_{läh}}{c}$

$\Rightarrow$ K havaitsee vastaavasti jakson $\Delta t_{hav} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\,\Delta t'_{läh}$

loittoneva
lähenevä

- Taajuus on määritelmän mukaan $f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{c}{\lambda}$

- Tuloksesta $\Delta t_{hav} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\, \Delta t'_{läh}$ loittoneva / lähenevä saadaan siis

$$\Rightarrow \boxed{f_{hav} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_{läh}}$$

loittonevalle lähteelle $\left(\beta \equiv \frac{v}{c}\right)$

$$\boxed{f_{hav} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f_{läh}}$$

lähestyvälle lähteelle

Suhteellisuusteoreettinen Doppler-ilmiö

Ekspansoidaan pienten nopeuksien rajalla $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$, loittonevalle lähteelle:

$$f_{hav} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_{läh}$$

$$= \left((1-\beta)(1-\beta+\beta^2+\mathcal{O}(\beta^3))\right)^{1/2} f_{läh}$$

$$= \left(1-2\beta+\beta^2+\beta^2+\mathcal{O}(\beta^3)\right)^{1/2} f_{läh}$$

$$= \left(1-\beta+\frac{1}{2}\beta^2+\mathcal{O}(\beta^3)\right) f_{läh}$$

$\uparrow$ Newtonilainen Doppler-ilmiö

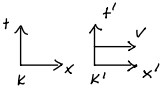
$\uparrow$ johtava suhteellisuusteorian korjaus

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\mathcal{O}(x^3)$$

$$(1-x)^{1/2} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathcal{O}(x^3)$$

Kertaus: Lorentz-muunnosten fysiikkaa

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



- Aikadilaatio:

$$\Delta t' = \gamma^{-1}\Delta t = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t$$

Liikkuva kello jäätää (suhteessa paikallaan olevaan)

- Pituuskontraktio:

$$\ell = \gamma^{-1}\ell_0 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\ell_0$$

Liikkuva sauva lyhenee (suhteessa paikallaan olevaan)

- Kausaalisuus: $\frac{dx}{dt} \leq c$ kaikille fysikaalisille prosesseille

- Nopeuksien yhteenlasku:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}$$

$\leq c$ aina

Kertaus: Lorentz-muunnosten fysiikkaa

- $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$
- Itseisaika:

$$d\tau = \frac{ds}{c} \quad , ds^2 > 0$$

- Doppler-ilmiö:

$$f_{hav} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_{läh}$$

loittonevalle lähteelle $\left(\beta \equiv \frac{v}{c}\right)$

$$f_{hav} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f_{läh}$$

lähestyvälle lähteelle

Mitä tapahtuu Newtonin laeille?

- Lorentz-muunnos: $F = m\frac{d^2x}{dt^2} \not\longrightarrow m\frac{d^2x'}{dt'^2}$

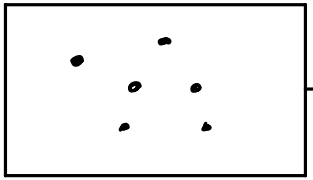
- Fysiikan lakien oltava invariantteja Lorentz-muunnoksissa

$\Rightarrow$ Newtonin lakeja täytyy muokata

$\Rightarrow$ energian ja liikemäärän määritelmät muuttuvat !

Liikemäärä suhteellisuusteoriassa

- Newtonin fysiikassa $\bar{p} = m\bar{v}$, $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$
- Ei ulkoisia voimia $\bar{F}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \bar{p}_i = \text{vakio}$



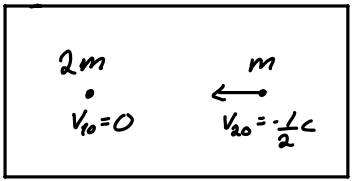
$\rightarrow \bar{F}_{tot} = \bar{0}$

N kpl:n systeemi

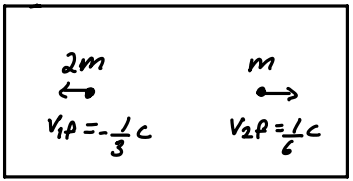
liikemäärä säilyy

- Vaaditaan liikemäärän säilyminen myös suhteellisuusteoriassa

Tarkastellaan elastista törmäystä Newtonin fysiikassa:



t_0



t_f

$E_0 = E_f$: $\frac{1}{2}mv_{20}^2 = \frac{1}{2}2mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2$

$v_{20}^2 = 2v_{1f}^2 + v_{2f}^2$

$\bar{p}_0 = \bar{p}_f$: $m\bar{v}_{20} = 2m\bar{v}_{1f} + m\bar{v}_{2f}$

$\bar{v}_{20} = 2\bar{v}_{1f} + \bar{v}_{2f}$

$\Rightarrow v_{20}^2 = 4v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 4\bar{v}_{1f}\cdot\bar{v}_{2f} = 2v_{1f}^2 + v_{2f}^2$

$\Rightarrow \bar{v}_{1f}\cdot\bar{v}_{2f} = v_{1f}v_{2f}\cos\theta = -\frac{1}{2}v_{1f}^2 \Rightarrow \bar{v}_{2f} = -\frac{\bar{v}_{1f}}{2}$ (head-on törmäys)

$\Rightarrow \bar{v}_{1f} = \frac{2}{3}\bar{v}_{20}$, $\bar{v}_{2f} = -\frac{1}{3}\bar{v}_{20}$

Suhteellisuusteoriassa liikemäärä $\bar{p}$ määritellään

$$\bar{p} \equiv \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m \bar{v}$$

$\bar{p} \to m\bar{v}$ kun $v \to 0$

palautuu Newtonin fysiikkaan rajalla $v \ll c$

Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \bar{v}) = 0$$

Tässä $m \neq 0$, palataan $m = 0$ tilanteeseen myöhemmin.

Syventävää taustaa

Newtonin fysiikassa $\bar{p} = m\bar{v} = m\frac{d\bar{x}}{dt} = m\left(\frac{dx}{dt}\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}\hat{e}_y + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z\right)$

Suhteellisuusteoriassa $p \equiv m\frac{dX}{d\tau} = m\left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\bar{x}}{d\tau}\right) = (m\gamma c, m\gamma\bar{v})$ 4-vektori

$\bar{v}$ = vakio

$\bar{p}$ on 4-vektorin p paikkaosa

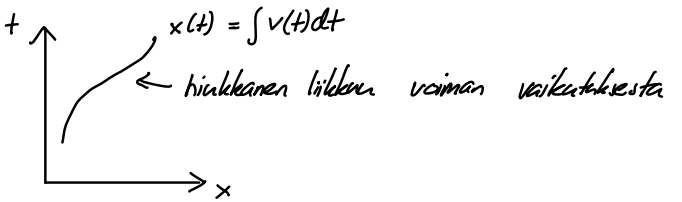
$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right|^2} = dt\gamma^{-1}$

itseisaika

$\frac{d\bar{x}}{dt}$ = vakio

Energia suhteellisuusteoriassa

Newtonin 2. laki yleistyy suhteellisuusteoriaan muodossa $\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$



Energia ≡ voiman tekemä työ

$$\Delta E = \int_0^x F\,dx = \int_0^x \frac{d}{dt}(\gamma m v)\,dx = \int_0^t \frac{d}{dt}(\gamma m v)\,v\,dt \qquad dx = v\,dt$$

$$= \int_0^v dv \left(\frac{d}{dv}(\gamma m v)\right) v$$

$$= \Big|_0^v \gamma m v^2 - \int_0^v dv\, \gamma m v \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \gamma m v^2 + mc^2\gamma^{-1} - mc^2$$

$$= mc^2(\gamma - 1)$$

$$\Rightarrow E - E_0 = mc^2\gamma - mc^2$$

valitaan* $E_0 = mc^2$:

$$\Rightarrow E = \gamma m c^2$$

*Tämä ei ole tässä kohtaa ilmeistä, mutta seuraa esim. s.52 määritelmistä

Energia suhteellisuusteoriassa

Nopeudella v liikkuvan kappaleen kokonaisenergia on siis

$$E = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$E \to \infty$ kun $v \to c$

$\Rightarrow m \neq 0$ kappaletta ei voi kiihdyttää nopeuteen $v = c$ äärellisellä työllä !

Lepoenergia $v = 0$: $E_0 = mc^2$ $\Rightarrow$ massa = energiaa !

Esim. $n \to p^+ + e^- + \nu_e$ massa → kin. energia

Kineettinen energia: $E_{kin} = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$

Rajalla $v \ll c$: $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \ldots$

↑ irrelevantti vakio N:n fysiikassa

Esim. Mikä on $m = 1\,kg$ massaisen kappaleen lepoenergia?

$$E_0 = mc^2 = 1\,kg \cdot (3.00 \cdot 10^8)^2 \frac{m^2}{s^2} = 9 \cdot 10^{16}\,J = 2{,}5 \cdot 10^{13}\,Wh = 25\,TWh$$

$$1\,J = 1\,Ws = \frac{1}{3600}\,Wh$$

vrt. Olkiluoto ~ 15 TWh/vuosi

Massan muodossa olevan energian hyvin suuri!

Energian lausekkeesta $E = mc^2\gamma = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ seuraa:

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^4 + \frac{m^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= m^2c^4 + \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \qquad \bar{p} = \gamma m \bar{v}$$

$$= m^2c^4 + p^2c^2 \qquad p \equiv |\bar{p}|$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$ n.s. dispersiorelaatio

Tämä pätee myös $m = 0$ tilanteessa:

$m = 0$:

$$E = |\bar{p}|c$$

$$\bar{p} = \frac{E}{c}\hat{p}$$ ← yksikkövektori

Kurssin A-osalla:

fotonin energia: $E_\gamma = \hbar|\bar{k}|c = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda}c = \frac{hc}{\lambda}$

fotonin liikemäärä $\bar{p}_\gamma = \hbar\bar{k} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda}\hat{p}_\gamma$

$$= \frac{h}{\lambda}\hat{p}_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}\hat{p}_\gamma$$

Epärelativistinen raja $|\bar{p}| \ll mc$:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2} = mc^2 + \frac{1}{2}\frac{|\bar{p}|^2}{m} + \dots$$

$|\bar{p}| = \gamma m|\bar{v}| \ll mc \Rightarrow |\bar{v}| \ll c$ ja $\gamma = 1 + \dots$ eli $|\bar{p}| = m|\bar{v}| + \dots$

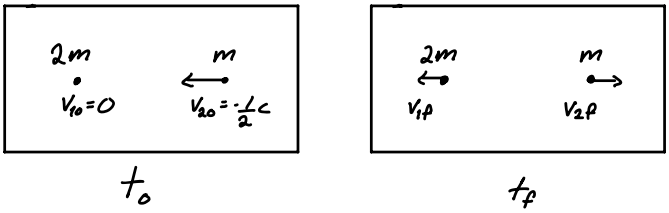
$$\Rightarrow E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}m|\bar{v}|^2 \quad \text{kun } |\bar{p}| \ll mc$$

Relativistinen raja $|\bar{p}| \gg mc$:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2} = |\bar{p}|c + \mathcal{O}\left(\frac{m^2c^2}{|\bar{p}|^2}\right)$$

$$\Rightarrow E \simeq |\bar{p}|c \quad \text{kun } |\bar{p}| \gg mc$$

Palataan s. 41 esimerkkiin:



Energia ja liikemäärä säilyvät:

$E = \gamma mc^2 \quad \bar{p} = \gamma m\bar{v}$

$E_0 = E_f$: $2mc^2 + \gamma_{20}mc^2 = \gamma_{1f}2mc^2 + \gamma_{2f}mc^2$

$\bar{p}_0 = \bar{p}_f$ $\gamma_{20}m\bar{v}_{20} = 2m\gamma_{1f}\bar{v}_{1f} + m\gamma_{2f}\bar{v}_{2f}$ Head-on törmäys $\bar{v}_{1f} \propto \bar{v}_{2f}$

$\Rightarrow v_{1f} \simeq -0.35c,\ v_{2f} \simeq 0,18c$

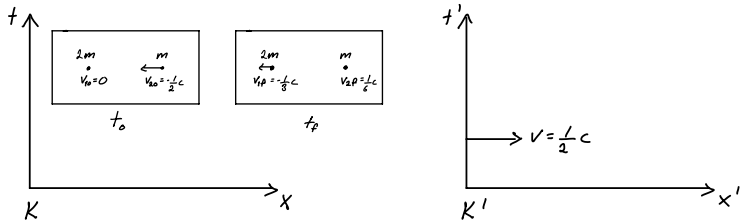
Sama liikkuvan havaitsijan mittaamana:

$$v_{10}' = \frac{v_{10} - v}{1 - \frac{v_{10}v}{c^2}} = -0,5c$$

$$v_{20}' = \frac{v_{20} - v}{1 + \frac{v_{20}v}{c^2}} = -0.8c$$

$v_{1f}' \simeq -0.73c$

$v_{2f}' \simeq -0.35c$



$E_0 = \gamma_{10}2mc^2 + \gamma_{20}mc^2 \simeq 4.0mc^2$

$E_f = \gamma_{1f}2mc^2 + \gamma_{2f}mc^2 \simeq 4.0mc^2$

$p_0 = \gamma_{10}2mv_{10} + \gamma_{20}mv_{20} \simeq -2.5mc$

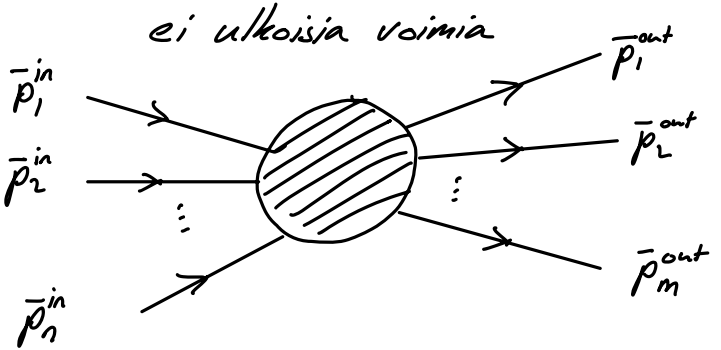
$p_f = \gamma_{1f}2mv_{1f} + \gamma_{2f}mv_{2f} \simeq -2.5mc$ OK

E ja $\bar{p}$ säilyvät K:ssa ja K':ssa

Crop here

Säilymislait suhteellisuusteoriassa

ei ulkoisia voimia



N_{in} hiukkasta N_{out} hiukkasta

ei ulkoisia voimia

Energia säilyy:

$$\sum_{j=1}^{N_{in}} \gamma_j m_j c^2 = \sum_{i=1}^{N_{out}} \gamma_i m_i c^2$$

Liikemäärä säilyy:

$$\sum_{j=1}^{N_{in}} \gamma_j m_j \bar{v}_j = \sum_{i=1}^{N_{out}} \gamma_i m_i \bar{v}_i$$

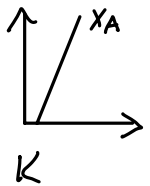
Newtonilaisella rajalla: $E = \gamma m c^2 = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$

↖ säilyy vain elastisissa törmäyksissä

$E = \gamma m c^2$ sis. kaiken energian (paitsi ulk. potentiaalienergian)

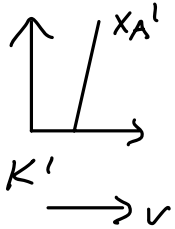
$\Rightarrow$ säilyy aina kun systeemiin ei vaikuta ulk. voimia

E ja $\bar{p}$ Lorentz-muunnoksissa



$$E_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}\,mc^2$$

$$p_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}\,mv_A$$



$$E_A' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A'^2}{c^2}}}\,mc^2$$

$$p_A' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A'^2}{c^2}}}\,mv_A'$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$v_A = \frac{v+v_A'}{1+\frac{vv_A'}{c^2}} \Rightarrow$ $\quad v_A' = \frac{v_A - v}{1-\frac{vv_A}{c^2}}$ $\quad$ (HT) $\Rightarrow$

$$E_A' = \gamma(E_A - vp_A)$$

$$p_A' = \gamma\left(p_A - \frac{v}{c^2}E_A\right)$$

E ja $\bar{p}$ riippuvat havaitsijan liiketilasta

Sivulla 47 johdettiin tulos: $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \Rightarrow m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$

Massa m ei riipu havaitsijasta $\Rightarrow m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2$

Tarkistetaan: $\frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{\gamma^2}{c^2}(E - vp)^2 - \gamma^2\left(p - \frac{v}{c^2}E\right)^2$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2}\left(E^2 - 2Evp + v^2p^2\right) - \gamma^2\left(p^2 - \frac{2vpE}{c^2} + \frac{v^2}{c^4}E^2\right)$$

$$= \frac{E^2}{c^2}\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - p^2\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad \text{ok}$$

E ja $\bar{p}$ vs. neliliikemäärä

Sivulla 48 esiteltiin lyhyesti ns. 4-liikemäärä. Menemättä yksityiskohtiin, todetaan tässä lyhyesti, että E ja $\bar{p}$ voidaan identifioida 4-ulotteisen vektorin komponenteiksi:

$$p \equiv m\frac{dx}{d\tau} = \frac{E}{c}\hat{e}_t + p_x\hat{e}_x + p_y\hat{e}_y + p_z\hat{e}_z$$

missä $E = \gamma mc^2$, $p_x = \gamma m v_x$ jne

p: neliliikemäärä

t, x, y, z -kantavektoreita

Usein merkitään $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$

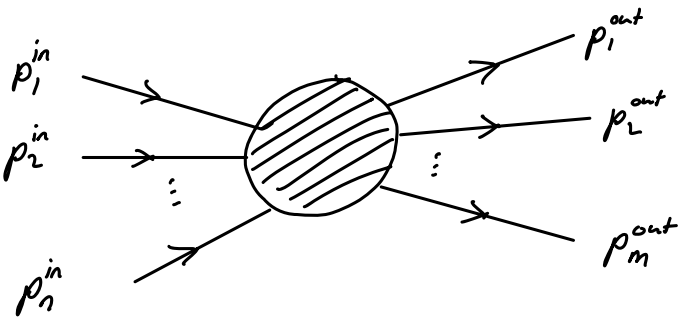
Pistetulon määritelmä eroaa "normaalista":

$$p\cdot p = \left(\frac{E}{c}\right)^2 \underbrace{\hat{e}_t\cdot\hat{e}_t}_{=1} + p_x^2\underbrace{\hat{e}_x\cdot\hat{e}_x}_{=-1} + p_y^2\underbrace{\hat{e}_y\cdot\hat{e}_y}_{=-1} + p_z^2\underbrace{\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z}_{=-1} = \frac{E^2}{c^2} - |\bar{p}|^2 = m^2c^2$$

$$\Rightarrow p\cdot p = m^2c^2$$ Lorentz-invariantti 4-vektorin pituus

E ja $\bar{p}$ vs. neliliikemäärä

4-liikemäärä $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$



$$\sum_{i=1}^{N_{in}} E_i^{in} = \sum_{i=1}^{N_{out}} E_i^{out}$$

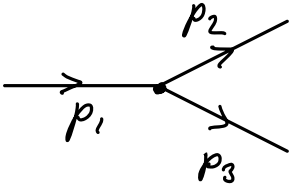
$$\sum_{i=1}^{N_{in}} \bar{p}_i^{in} = \sum_{i=1}^{N_{out}} \bar{p}_i^{out}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N_{in}} p_i^{in} = \sum_{i=1}^{N_{out}} p_i^{out}$$

$E, \bar{p}$ säilyy $\Leftrightarrow$ 4-liikemäärä $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$ säilyy

"Invariantti massa" (ks. labratyö: Cern-datan analysointi)

Tarkastellaan esim. $1 \to 2$ hajoamisreaktiota



4-liikemäärille:

$$p_1 = p_2 + p_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_1 = E_2 + E_3 \\ \bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3 \end{cases}$$

$p_1 \cdot p_1 = \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - |\bar{p}_1|^2 = m_1^2 c^2$

$$m_1^2 c^2 = p_1 \cdot p_1 = (p_2 + p_3)\cdot(p_2 + p_3) \quad \Leftrightarrow \quad m_1^2 c^2 = \left(\frac{E_2 + E_3}{c}\right)^2 - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2$$

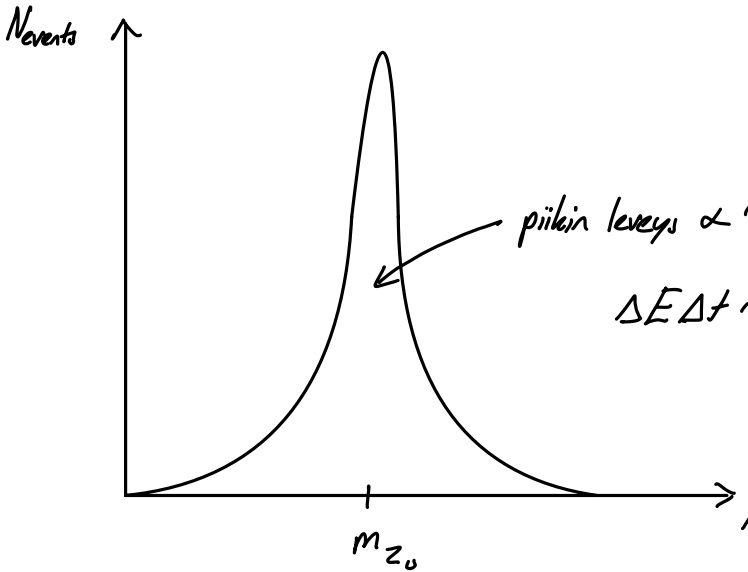
$$\Rightarrow m_1^2 = \frac{1}{c^2}(p_2 + p_3)\cdot(p_2 + p_3) \quad \Leftrightarrow \quad m_1^2 = \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{E_2 + E_3}{c}\right)^2 - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2\right)$$

"invariantti massa" eli hajoavan hiukan massa L-inv. muodossa lopputilan suureiden avulla

Labratyössä tarkastellaan hajoamisreaktiota $Z_0 \to \mu^+, \mu^-$

Z-bosoni — anti-myoni — myoni

(näihin palataan hitutfys. -osassa)



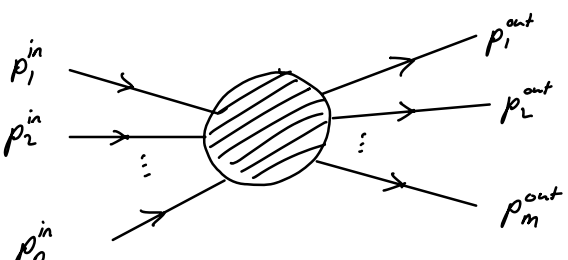
piikin leveys $\propto \tau^{-1}$, missä τ hajoavan hiukan elinikä

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \to \Delta E = \Delta M \sim \frac{\hbar}{\tau}$$

$$M_{\mu^+\mu^-} = \frac{\sqrt{(p_{\mu^+} + p_{\mu^-})^2}}{c}$$ inv. massa

Yhteenveto: energia ja liikemäärä suhteellisuusteoriassa

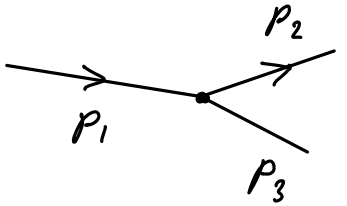
- Energia: $E = \gamma mc^2 = \underbrace{mc^2}_{=E_0} + \underbrace{(\gamma - 1)mc^2}_{=E_{kin}}$ $\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- Liikemäärä: $\bar{p} = \gamma m \bar{v}$
- $E = \sqrt{m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2}$, $m = 0 \Rightarrow E = |\bar{p}|c$
- E ja $\bar{p}$ säilyvät



$E_{in} = E_{out}$

$\bar{p}_{in} = \bar{p}_{out}$

Esim.



$m_2 = m_3 = m$ hiukkailla 2 ja 3 sama massa

$$E_1 = E_2 + E_3$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3$$

$$m_1^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - |\bar{p}_1|^2 = \frac{(E_2 + E_3)^2}{c^2} - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2$$

Lorentz-invariantteja ehtoja, voimassa missä tahansa in. koordinaatistossa

Tarkastellaan hiukkasta massakeskipistekoordinaatistossa ($\sum_i \bar{p}_i = 0$)
(Center of Mass (CM) frame)

$$E_1 = m_1 c, \quad \bar{p}_1 = \bar{0} \qquad \bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}_2 = -\bar{p}_3 \equiv \bar{p}$$

$$E_2 = \gamma_2 m c^2$$

$$E_3 = \gamma_3 m c^2 = \gamma_2 m c^2 = E_2 \qquad E_1 = E_2 + E_3 = 2E_2 \equiv E$$

$\uparrow$ $|\bar{p}_2| = |\bar{p}_3|$

$$m_1^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - |\bar{p}_1|^2 = \frac{(E_2+E_3)^2}{c^2} - |\bar{p}_2+\bar{p}_3|^2$$

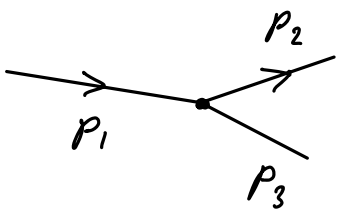
$$= \frac{4E^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2 = \frac{1}{4} m_1^2 c^4$$

$$|\bar{p}| = \frac{c}{2}\sqrt{m_1^2 - 4m^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_1 \geq 2m}$$

massaton hitu ei voi hajota 2:ksi massattomaksi



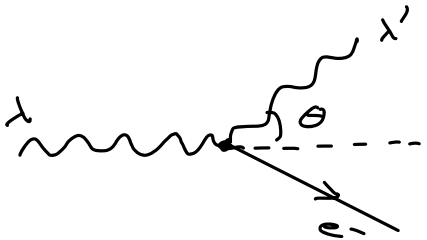
Pätee yleisemminkin:

$$m_1 \geq m_2 + m_3$$

Compton-sironta

Fotonien sironta elektroneista:

(γ säteilyn vv. aineen kanssa
⇒ materiaalifys., lääketiet. fys., ...)



Compton 1923: $\underbrace{\lambda' - \lambda}_{\equiv \Delta\lambda} = \underbrace{\frac{h}{m_e c}}_{\equiv \lambda_e \simeq 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,m} (1 - \cos\theta)$ Aaltokuvassa $\lambda' = \lambda \Rightarrow$ fotonit hiukkasia

elektronin Compton aallonpituus

Johdetaan Comptonin tulos:

LAB-koordinaatisto

$E_e = m_e c^2$, $\bar{p}_e = \bar{0}$ kohde e^-

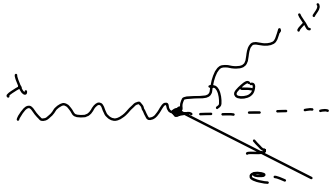
E_e', $\bar{p}_e'$ sironnut e^-

$E_\gamma = |\bar{p}_\gamma| c$, $\bar{p}_\gamma = \bar{p}_\gamma$ saapuva fotoni

$E_\gamma' = |\bar{p}_\gamma'| c$, $\bar{p}_\gamma'$ sironnut γ

$\left(E_\gamma = \hbar |\bar{k}| c = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} c = \frac{hc}{\lambda}\right)$

Compton-sironta



$E_e = m_e c^2$, $\bar{p}_e = \bar{0}$ kohde e^- $\quad$ E_e', $\bar{p}_e'$ sironnut e^-

$E_\gamma = |\bar{p}_\gamma| c$, $\bar{p}_\gamma = \bar{p}_\gamma$ saapuva fotoni $\quad$ $E_\gamma' = |\bar{p}_\gamma'| c$, $\bar{p}_\gamma'$ sironnut γ

$$m_e^2 c^2 = \frac{E_e'^2}{c^2} - |\bar{p}_e'|^2$$

$$= \frac{(E_e + E_\gamma - E_\gamma')^2}{c^2} - |\underbrace{\bar{p}_e}_{=0} + \bar{p}_\gamma - \bar{p}_\gamma'|^2$$

$$= \frac{(m_e c^2 + |\bar{p}_\gamma| c - |\bar{p}_\gamma'| c)^2}{c^2} - |\bar{p}_\gamma - \bar{p}_\gamma'|^2$$

$$= m_e^2 c^2 + |\bar{p}_\gamma|^2 + |\bar{p}_\gamma'|^2 - 2|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'| + 2 m_e c (|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|) - (|\bar{p}_\gamma|^2 + |\bar{p}_\gamma'|^2 - \underbrace{2\bar{p}_\gamma \cdot \bar{p}_\gamma'}_{= |\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'| \cos\theta})$$

$$0 = 2|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'|(\cos\theta - 1) + 2 m_e c (|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|)$$

$$1 - \cos\theta = m_e c \frac{(|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|)}{|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'|} \qquad |\bar{p}_\gamma| = \frac{h}{\lambda}$$

$$= m_e c \left(\frac{\lambda'}{h} - \frac{\lambda}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

$\Delta\lambda \sim \lambda_e \sim 10^{-12}\,m$, merkityksetön jos $\lambda \gg 10^{-12}\,m$