FYSA 2004: Aine, aika-avaruus ja maailmankaikkeus

- Suppean suhteellisuusteorian perusteet
- Katsaus: ydinfysiikkaan
  hiukkasfysiikkaan
  kosmologiaan

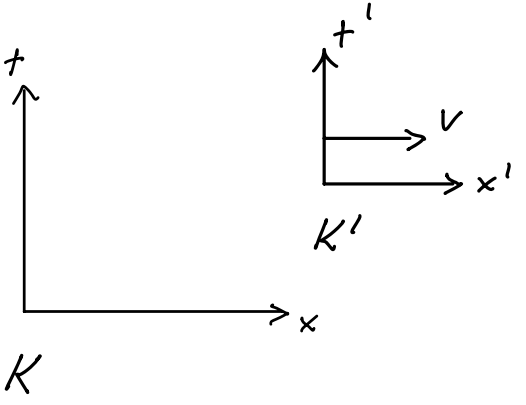
Suhteellisuusteoria: johdantoa

- Newton: aika ja paikka absoluuttisia (Principia 1687) → Einstein 1905 → approksimaatio joka toimii kun $v \ll c$ ($c \simeq 3.00 \cdot 10^8$ m/s valon nopeus tyhjiössä)

- Suhteellisuusteoria = teoria aika-avaruuden (t, x, y, z) rakenteesta

  ajan ja paikan käsitteet eivät ole absoluuttisia

Esim.



Havaitsija K' liikkuu havaitsijan K suhteen nopeudella v

Newton $t' = t$

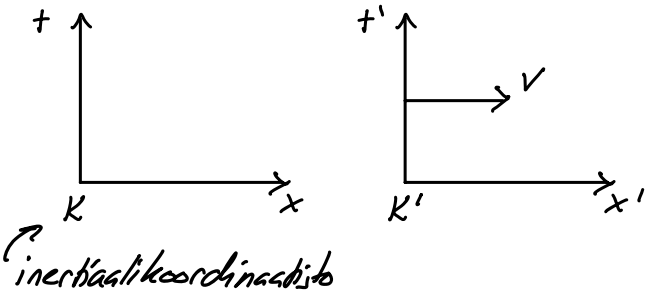
Suhteellisuusteoria $t' \neq t$

- Suppea suhteellisuusteoria (Einstein 1905): ei painovoimaa, aika-avaruus staattinen
- Yleinen suhteellisuusteoria (Einstein 1916): sisältää painovoiman, aika-avaruus dynaaminen

Inertiaalisysteemi eli inertiaalikoordinaatisto

Inertiaalikoordinaatisto ≡ koordinaatisto, jossa levossa tai tasaisessa liikkeessä olevaan kappaleeseen ei kohdistu voimia ($\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$)

- Suppeassa suhteellisuusteoriassa tarkastellaan erityisesti toistensa suhteen liikkuvia inertiaalikoordinaatistoja

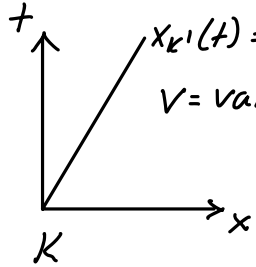


Jos v = vakio, K' on myös inertiaalikoord.
Jos $v \neq$ vakio, K' ei ole inertiaalikoord.

- Suppeassa suhteellisuusteoriaa sinänsä voidaan yhtä hyvin soveltaa myös kiihtyvässä liikkeessä oleville koordinaatistoille mutta inertiaalikoordinaatistot ovat erityisasemassa.

Inertiaalikoordinaatistot Newtonin fysiikassa

- Tarkastellaan toistensa suhteen liikkuvia inertiaalikoordinaatistoja K ja K':
  (ja. koord.ssa $\bar{F} = m\bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{v} = \text{vakio}$)

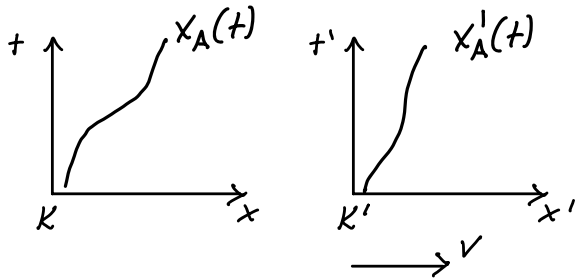


- Newtonin fysiikassa aika absoluuttinen, joten koordinaatistomuunnos $K \to K'$:

$$t' = t$$
$$x' = x - vt \quad (\text{ol. } K = K' \text{ kun } t = 0)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Galilein muunnos

- **Newtonin lait samaa muotoa K:ssa ja K':ssa:**



$$F = \frac{d^2 x_A}{dt^2} = \frac{d^2 x'_A}{dt^2} = F' \qquad (HT)$$

K ja K' mittaavat samat voimat ja kiihtyvyydet

Ongelma 1800-luvun lopussa: Maxwellin yhtälöt muuttuvat Galilein muunnoksissa

(James Clerk Maxwell, 1861–1862)

Maxwellin yhtälöt = klassinen sähkömagnetismi

Tyhjiössä:

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0 \quad \text{(sähkökenttä)}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad \text{(mag. kenttä)}$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (\epsilon_0, \mu_0 \text{ vakioita})$$

Matemaatikkaa (ei tarvitse osata tällä kurssilla)

$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ vektorioperaattori "gradientti", "nabla"

$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ skalaari "divergenssi" (divergence)

$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$ vektori "roottori" (curl)

Erityisesti Maxwellin yhtälöistä seuraa:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \bar{E}(t,\bar{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}(t,\bar{x})}{\partial t^2} = 0$$

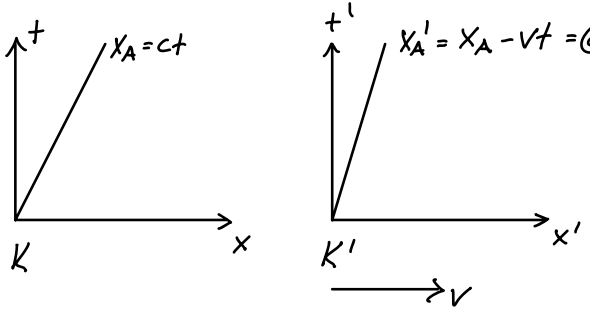
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \bar{B}(t,\bar{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{B}(t,\bar{x})}{\partial t^2} = 0$$

3-d aaltoyhtälö, ratkaisut nopeudella c eteneviä aaltoja

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Valo $(\bar{E}, \bar{B})$-kentän aaltoilua $\Rightarrow$ valon nopeus $= c$ missä koordinaatistossa?

- Sovelletaan Galilein muunnosta (= Newtonin fysiikkaa) valolle



$\Rightarrow \quad c' = c - v$

eli valon nopeus eri K:ssa ja K':ssa

- Eli: Maxwellin yhtälöt $\Rightarrow$ valon nopeus = c

  Newtonin fysiikka $\Rightarrow$ $c \to c'$ kun siirrytään in.koord.sta toiseen $K \to K'$

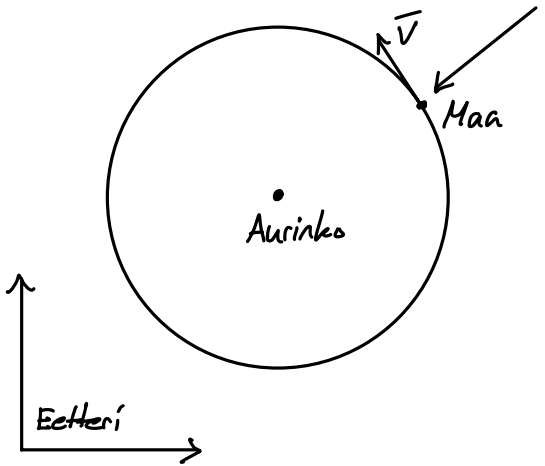
  $\Rightarrow$ missä koordinaatistossa nopeus siis on c ??

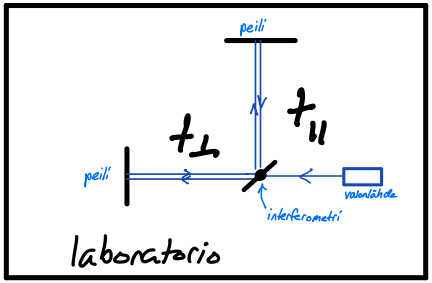
- 1800-luvun lopun hypotees' = eetteriteoria

  Eetteri' = absoluuttinen lepokoordinaatisto, jossa valon nopeus on c

  Testattavissa oleva ennuste

Michelson-Morley koe:
(1887)





Maa liikkuu eetterin suhteen $v_\perp \neq v_{\parallel}$

Galilein muunnoksen mukaan siis $c_\perp \neq c_{\parallel}$

$\Rightarrow t_\perp \neq t_{\parallel}$ $\Rightarrow$ mitattava interferenssi $\perp$ ja $\parallel$ valonsäteiden välillä

Havainto $t_\perp = t_{\parallel} \Rightarrow c_\perp \neq c_{\parallel}$ $\Rightarrow$ eetteriteoria ei toimi!

- Einstein, suppea suhteellisuusteoria 1905:
  valon nopeus = c kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa

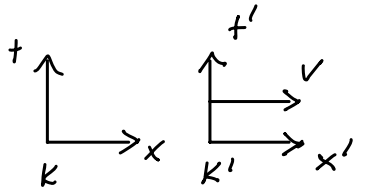
Suppea suhteellisuusteoria (Special Relativity)

Perusposttulaatit:

1) Valon nopeus on c kaikissa inertiaalisysteemeissä *

2) Kaikki inertiaalisysteemit samanarvoisia, vain suhteellinen liike merkitsee

⇒ aika ja paikka eivät ole absoluuttisia, riippuvat havaitsijasta



$K \to K'$ Lorentz-muunnos $\neq$ Galilein muunnos

$\Delta t \neq \Delta t'$, $\Delta x \neq \Delta x'$

Newtonin fysiikka rajalla $v \ll c$, arkielämässä $v \ll c$ ⇒ "intuitio = Newton"

3) Fysiikan lait samat kaikissa inertiaalisysteemeissä

* Entä kiihtyvässä liikkeessä olevat havaitsijat? Yleisemmin mikä tahansa lokaali (idealisoitu) mittaus antaa valon nopeudelle tuloksen c.

Lorentz muunnokset

- Suhteellisuusteorian postulaatit 1) ja 2) määräävät aika- ja paikkakoordinaattien muunnosominaisuudet siirryttäessä inertiaalisysteemistä toiseen.

- Yl. linearisoitu koordinaattimuunnos $K \to K'$ on muotoa*: (ol. liike x-akselin suuntaista, jolloin $y'=y, z'=z$)

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= Ax + Bt + \alpha \\ t' &= Dt + Ex + \beta \end{aligned}} \qquad A, B, D, E, \alpha, \beta \text{ vakioita}$$

0) Ol. $K = K'$ kun $t = 0 \Rightarrow$ $x'(x=0, t=0) = \alpha \overset{\text{aseteltava}}{=} 0$

$t'(t=0, x=0) = \beta = 0$

$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow 6 - 2 = 4$ param. jäljellä

liikkeestä riippumaton triviali ehto.

1) Vaaditaan että c = vakio kaikissa inertiaalisysteemeissä

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'}$$ missä $x(t)$ ja $x'(t')$ valonsäteen koordinaatit K ja K':ssa

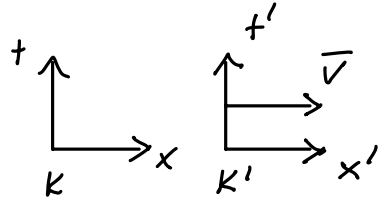
$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{A\,dx + B\,dt}{D\,dt + E\,dx} = \frac{Ac + B}{D + Ec} = \frac{dx}{dt} = c \quad \Rightarrow \underline{Ac + B = Dc + Ec^2}$$

$\frac{dx}{dt} = c$

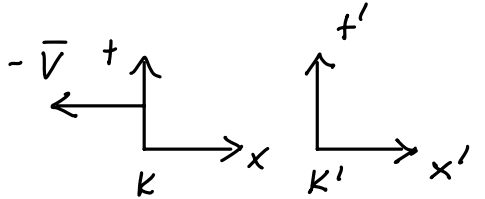
$4 - 1 = 3$ param. jäljellä

* Kinkä tahansa kahden in.koord. välisen muunnoksen on oltava lineaarinen.

2) Kaikki inertiaalikoordinaatistot samanarvoisessa asemassa, vain suhteellinen liike merkitsee



=



Piste $x'=0$ liikkuu nopeudella v

K:n suhteen

$$X(x'=0,t) = vt$$

$$x' = Ax + Bt \Rightarrow 0 = Avt + Bt$$
$$B = -Av \quad \text{1 ehto}$$

Piste $x=0$ liikkuu nopeudella $-v$

K':n suhteen

$$x'(x=0,t') = -vt'$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \Rightarrow -vt' = Bt \\ t' &= Dt + Ex \Rightarrow t' = Dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow -vD = B \quad \text{1 ehto}$$

Saadaan siis:

$$B = -Av \Rightarrow A = D$$
$$B = -Dv$$

sij. tämä kohdan 1) ehtoon $Ac + B = Dc + Ec^2$:

$$Ac + B = Ac + Ec^2$$
$$Ec^2 = B = -Av$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \\ t' &= Dt + Ex \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ t' &= A(t - vx/c^2) \end{aligned}}$$

- Muunnos toiseen suuntaan $K' \to K$ on täsmälleen samaa muotoa, paitsi $v \to -v$:

$K' \to K$

$$x = A(x' + vt')$$
$$t = A(t' + vx'/c^2)$$

$K \to K'$

$$x' = A(x - vt)$$
$$t' = A(t - vx/c^2)$$

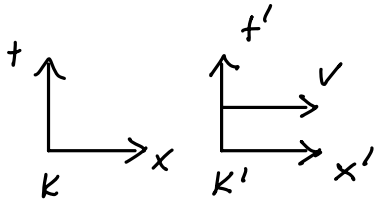
- Muunnoksen $K \to K' \to K$ täytyy olla identiteetti, kiinnittää A:n:

$$\begin{aligned} x &= A(x' + vt') \\ &= A\left(A(x - vt) + vA(t - vx/c^2)\right) \\ &= A^2\left(x - vt + vt - v^2\frac{x}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$x = A^2 x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma$$

Huom. $v \leq c$ jotta $\gamma \in \mathbb{R}$, tähän palataan sivulla 15.

- Vaadittiin: 1) c sama kaikille inertiaalisysteemeille
  2) kaikki inertiaalisysteemit samanarvoisia



$\Rightarrow$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Lorentz muunnos
kun K' liikkuu K:n suhteen nopeudella v x-aks. suuntaan.

- Määrää miten inertiaalikoordinaatistojen K ja K' aika ja paikka suhteessa toisiinsa

Huom. koordinaatistot voidaan aina kiertää siten, että $\vec{v} \parallel \hat{e}_x$ eli liike x-aks. suuntaan. Tulos on siis täysin yleinen.

- SR: kaikki fysiikan lait näyttävät samoilta missä tahansa in. systeemissä

$\Rightarrow$ lait invariantteja Lorentz-muunnoksissa
(eli muoto säilyy kun $K \to K'$)

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$

- Maxwellin yhtälöt ovat invariantteja L-muunnoksessa (tämä oli lähtökohta)

Esim. $\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{E} = \nabla'^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\bar{E}$ (HT)

- Newtonin lait inv. G-muunnoksissa $\neq$ L-muunnos $\Rightarrow$ tarvitaan N. lakien SR yleistys
$\Rightarrow$ energia, liikemäärä muuttuvat

Tähän palataan myöhemmin

- Rajalla $v \ll c$ Lorentz muunnokset palautuvat Galilein muunnoksiksi (HT)

$$t' = t + \mathcal{O}(v/c)$$
$$x' = x - vt + \mathcal{O}(v^2/c^2)$$

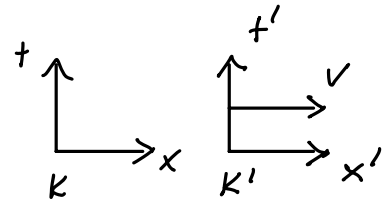
Tällä rajalla SR $\to$ Newton

Kertaus tähän asti:

inertiaalikoordinaatisto = ei kiihtyvyyttä

- Valon nopeus c kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa
- Fysiikan lait samat kaikissa in. systeemeissä
- Muunnos in. koordinaatistosta K nopeudella v liikkuvaan koordinaatistoon K' on Lorentz muunnos:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad , \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

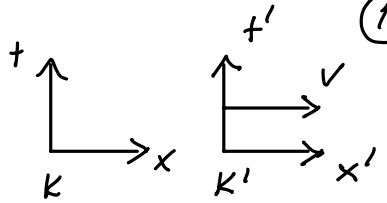


Määritelty kun $v \in [0, c]$ (ks. s. 15)

Fysiikan lait Lorentz-invariantteja $\Leftrightarrow$ eri inertiaalihavaitsijat havaitsevat saman fysiikan

Samanaikaisuus on suhteellista:

Tarkastellaan kahta tapahtumaa A, B in. systeemeissä K ja K'



K: $(t_A, x_A), (t_B, x_B)$

K': $(t_A', x_A'), (t_B', x_B')$

$\Delta t = t_B - t_A \longrightarrow \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$

$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$

$x' = \gamma(x - vt)$

K:ssa samanaikaisuus $\Leftrightarrow \Delta t = 0 \Leftrightarrow \Delta t' = -\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x = 0$ vain jos $\Delta x = 0$

Kausaalisuus absoluuttista

A on B:n syy K:ssa $\Rightarrow t_A \leq t_B$

$\Delta t = t_B - t_A \geq 0$

A on B:n syy myös K':ssa $\Rightarrow t_A' \leq t_B'$

$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{c^2}{v}$

(val. x-aks. s.e. $\Delta x > 0$)

Kausaalisuhteen säilyminen antaa siis ehdon:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{c^2}{v} \qquad \text{täytyy olla voimassa mille tahansa } v \in [0, c]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c \quad \text{välttämätön ehto kausaalisuhteen säilymiselle!}$$

Erityisesti tämä pätee kaikille poluille, joita pitkin vuorovaikutus välittyy A:sta B:hen:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt} \equiv v_{signal} \leq c$$

; v_{signal} = signaalinopeus eli nopeus, jolla informaatio siirtyy A:sta B:hen

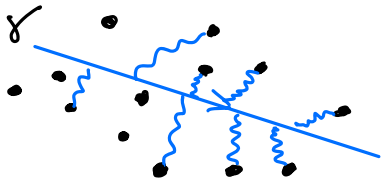
$$\Rightarrow \boxed{v_{signal} \leq c \text{ , mikään informaatio ei kulje nopeammin kuin } c}$$

Ylivalonnopeus = kausaalisuhteen rikkominen

Huom: $v_{signal} \leq c$, missä c = valon nopeus tyhjiössä

yleisemmin: mikä tahansa massaton hitu liikkuu nopeudella c (tämä selviää myöhemmin)

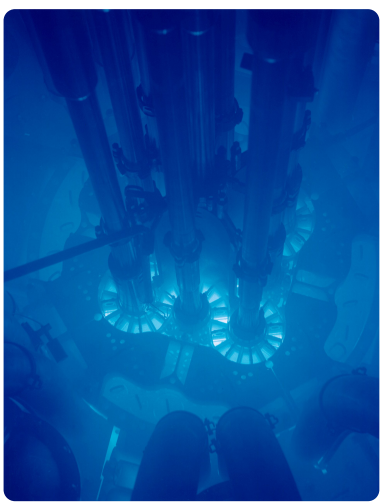
Väliaineessa $c_{medium} < c$



SM aalto vuorovaikuttaa aineen kanssa, etenevä aalto ei vapaita fotoneja

$c_{medium} = \frac{c}{n} < c$, mahdollista esim. $v_{elektroni} > c_{medium}$, mutta $v \leq c$ aina

refraktiivinen indeksi



(Wikipedia)

Cherenkov radiation; säteilyä elektroneista, jotka liikkuvat väliaineessa nopeudella $v > c_{medium}$. Esim. ydinreaktorit.

Nopeuksien yhteenlasku

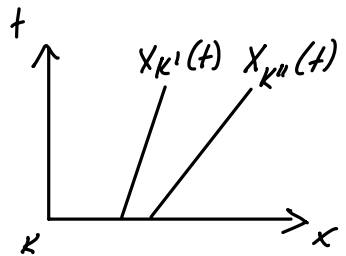
K' liikkuu nopeudella v_1 = vakio K:n suhteen

K'' liikkuu nopeudella v_2 = vakio K':n suhteen

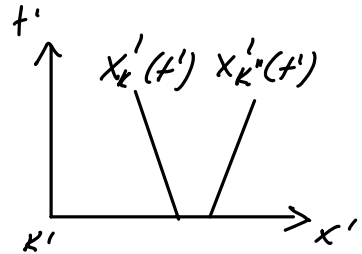
Mikä on K'':n nopeus v K:ssa ?

Oletetaan että kaikki liike tapahtuu K:n x-akselin suuntaan:

K':n ja K'':n radat K:ssa



K:n ja K'':n radat K':ssa



$$v_2 = \frac{dx'_{K''}}{dt'}$$

$$v_1 = \frac{dx_{K'}}{dt}$$

$$v = \frac{dx_{K''}}{dt}$$

Lorentz-muunnos $(t,x) \to (t',x')$:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right) \quad \Rightarrow \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v_1}{c^2}dx\right)$$

$$x' = \gamma(x - v_1 t) \qquad\qquad dx' = \gamma(dx - v_1\,dt)$$

Tämän avulla:

$$v_2 = \frac{dx'_{K''}}{dt'} = \frac{\gamma(dx_{K''} - v_1\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v_1}{c^2}dx_{K''}\right)} = \frac{\frac{dx_{K''}}{dt} - v_1}{1 - \frac{v_1}{c^2}\frac{dx_{K''}}{dt}} = \frac{v - v_1}{1 - \frac{v_1 v}{c^2}}$$

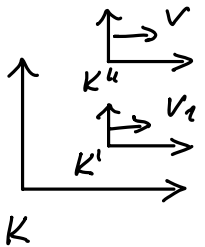
Nopeuksien yhteenlasku

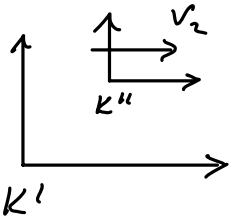
K' liikkuu nopeudella v_1 = vakio K:n suhteen

K'' liikkuu nopeudella v_2 = vakio K':n suhteen

Mikä on K'':n nopeus v K:ssa ?

Saadaan siis tulos $v_2 = \dfrac{v - v_1}{1 - \dfrac{vv_1}{c^2}} \Rightarrow v_2 + v_1 = v\left(1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}\right)$



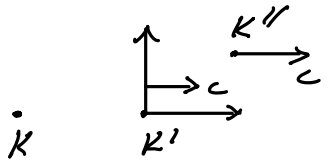


Nopeuksien yhteenlaskukaava

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Vrt. Newton $v = v_1 + v_2$

Esim.



Millä nopeudella K'' liikkuu K:n suhteen?

$2c$? Ei !

Sovelletaan yhteenlaskusääntöä:

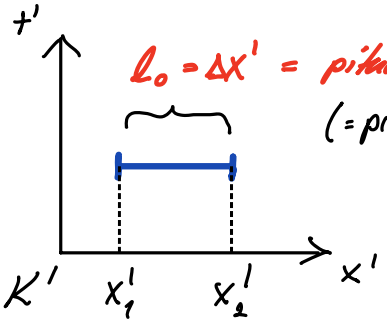
$v_1 = c, \quad v_2 = c$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$

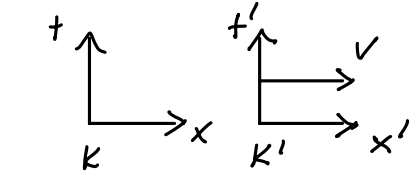
kuten pitääkin

Lorentz -kontraktio

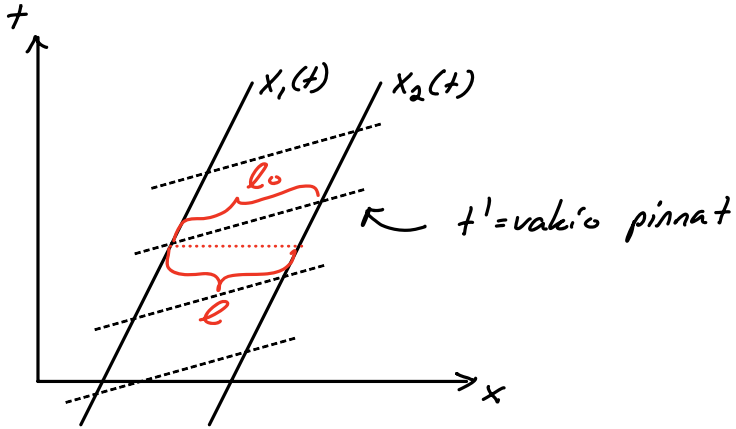
Tangon lepokoordinaatisto K'



K' liikkuu K:n suhteen



Tangon rata K:ssa



Lorentz -muunnos:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \Leftrightarrow \quad x = \gamma(x' + vt')$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$\Rightarrow$

Pituus K:ssa $l \equiv x_2 - x_1$ mitattuna samanaikaisesti K:ssa, $\Delta t = 0$

Lorentz: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$

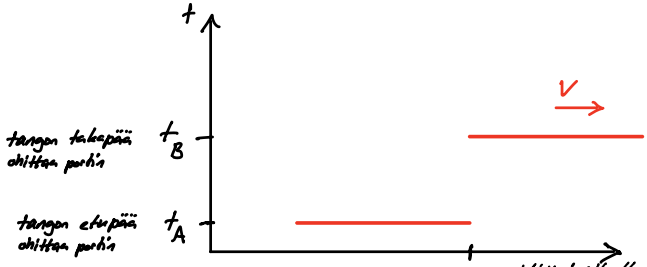
$$l = \Delta x \Big|_{\Delta t = 0} = \gamma^{-1}\Delta x'$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{l = \gamma^{-1} l_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, l_0}$$

Liikkuva kappale näyttää lyhenevän!

Onko $\ell = \gamma^{-1} \ell_0$ todella tangon pituus K:ssa?



Hiltalaitteella varustettu portti rekisteröi ajanhetket, jolloin tangon alku- ja loppupäät ohittavat portin.

Tangon pituus K:ssa:

$$\ell = v(t_B - t_A)$$

Tangon lepokoordinaatistossa K':

$$t' = \gamma(t - \tfrac{v}{c^2}x)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$

Tapahtuma A: etupää ohittaa portin K:n pisteessä $(t_A, x_A) = (t_A, x_P)$

K':ssa $(t'_A, x'_A) = \left(\gamma(t_A - \tfrac{v}{c^2}x_P), \gamma(x_P - vt'_A)\right)$

Tapahtuma B: takapää ohittaa portin K:n pisteessä $(t_B, x_B) = (t_B, x_P)$

K':ssa $(t'_B, x'_B) = \left(\gamma(t_B - \tfrac{v}{c^2}x_P), \gamma(x_P - vt'_B)\right)$

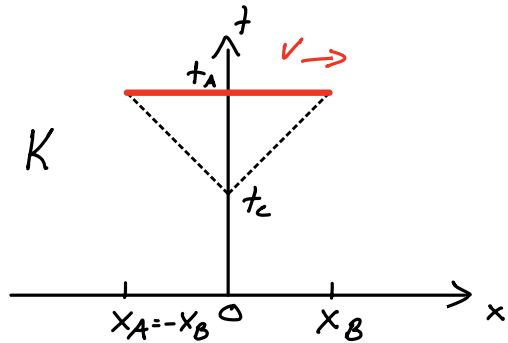
K':ssa portti kulkee nopeudella $-v$ ja liikkuu matkan ℓ_0 ajassa $t'_B - t'_A$:

$$|x'_B - x'_A| = v(t'_B - t'_A) = \ell_0 \quad ; \quad x'_A, x'_B \text{ lausekkeista}: \; x'_B - x'_A = \gamma(x_P - vt_B - x_P + vt_A)$$
$$= -\gamma v(t_B - t_A)$$

$$\Rightarrow \ell_0 = \gamma v(t_B - t_A) = \gamma \ell \Leftrightarrow \ell = \gamma^{-1}\ell_0$$

eli Lorentz kontraktio todella pätee mitatulle pituudelle

Sama vielä toisella tavalla:



(alku ja loppupäiden x-koord. ero samalla ajanhetkellä)

Suora pituuden mittaus:

Tangon päistä x_A, x_B K:n hetkellä t_A lähteneet valonsäteet saavuttavat havaitsijan pisteessä $(t_c, 0)$

Tangon pituus K:ssa $\ell \equiv x_B - x_A = 2x_B$

$$(t_A', x_A') = (\gamma(t_A + \frac{vx_B}{c^2}), \gamma(-x_B - vt_A))$$

$$(t_B', x_B') = (\gamma(t_A - \frac{vx_B}{c^2}), \gamma(x_B - vt_A))$$

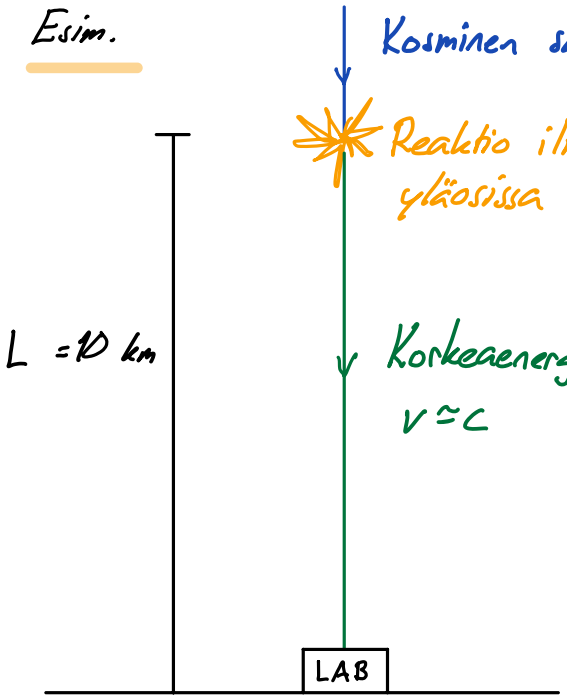
$$x_B' - x_A' = \ell_0 = \gamma(x_B - vt_A) - \gamma(-x_B - vt_A) = 2x_B\gamma = \gamma\ell \Rightarrow \ell = \gamma^{-1}\ell_0 \text{ OK}$$

$x_B' - x_A'$: valonlähteet tangon päissä

Mutta HUOM!

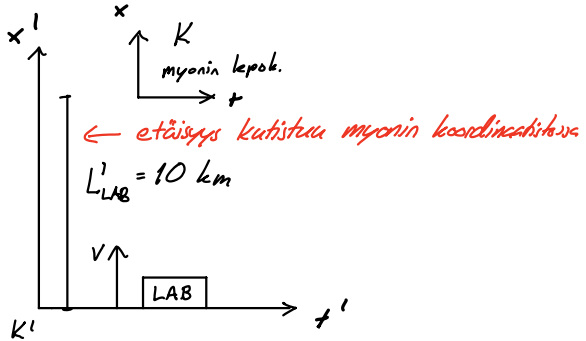
$t_B' - t_A' = -\frac{\gamma v}{c^2}\ell \neq 0$, säteet lähetetty eri aikaan K':ssa !

Esim.



Myonin elinaika lepokoordinaatistossa $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,s$

$v\tau_0 \simeq 660\,m \ll 10\,km$, miksi suurenergisiä myoneja kuitenkin pääsee maahan?



Tarkastellaan tilannetta myonin lepokoordinaatistossa K:

K' lähestyy K:ta nopeudella v

K':n etäisyys L'_{LAB} vastaa K:ssa etäisyyttä $L_{LAB} = \gamma^{-1} L'_{LAB} < 10\,km$

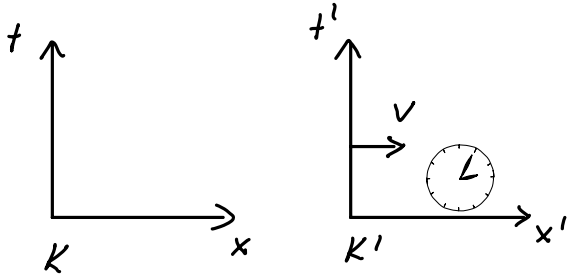
Ajassa τ_0 K' kulkee K:ssa matkan $v\tau_0$

Milloin $v\tau_0 > L_{LAB} \Leftrightarrow v\tau_0 > \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot 10\,km \Rightarrow v > 0.998\,c$

($\tau_0 = 2.2 \cdot 10^{-6}\,s$)

Kun v riittävän iso, LAB saavuttaa myonin ajassa τ_0 !

Aikadilaatio



K':ssa paikallaan oleva kello mittaa tapahtumien A ja B välillä ajan

$$\Delta t' = t'_B - t'_A \quad , \quad \Delta x' = 0$$

Mikä on vastaava ajanjakso K:ssa?

Lorentz-muunnos:

$$\left.\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0 \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta t' = \gamma^{-1}\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t}$$

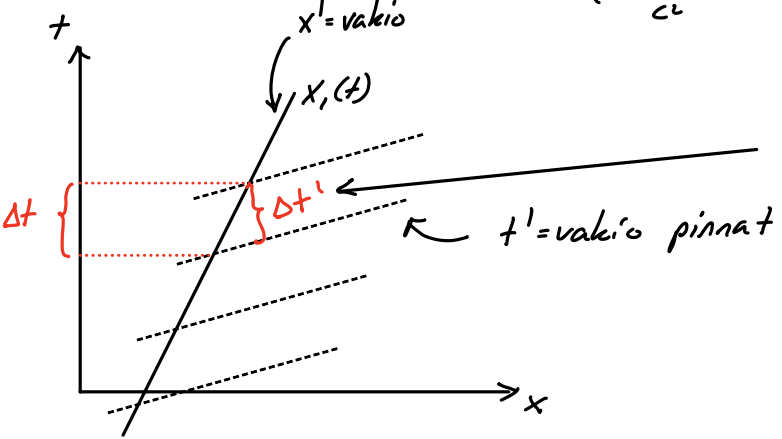
Liikkuva kello jätättää suhteessa paikallaan olevaan $\Delta t' < \Delta t$!

Näkyy esim. GPS-satelliitteissa ja lennätettäessä atomikelloja lentokoneella maapallon ympäri ($\Delta t_{maa} - \Delta t'_{kello} \sim 10^{-7}\,s$)

Aikadilaatio

Kellon rata K:ssa

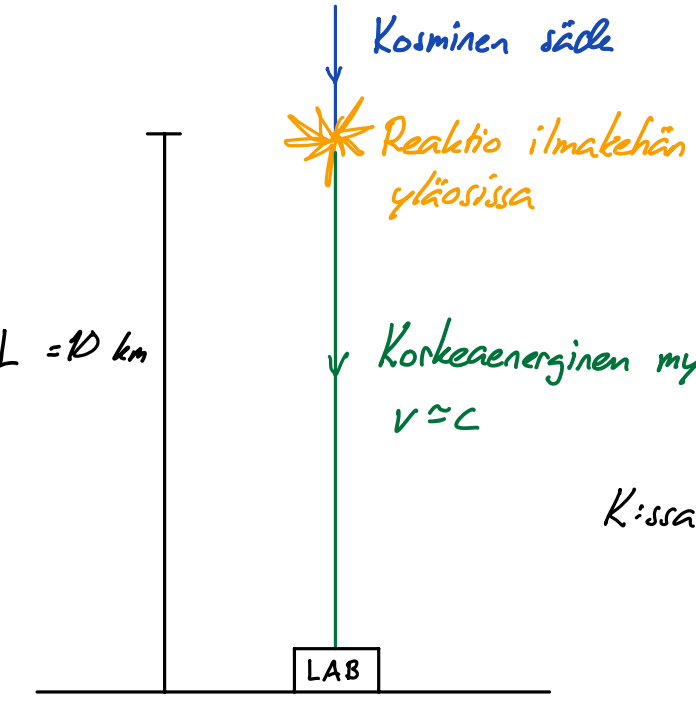
$$x' = \gamma(x - vt) \quad > \quad x = \gamma(x' + vt')$$
$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \qquad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$



$$\Delta t'\Big|_{\Delta x' = 0} = \gamma^{-1}\Delta t < \Delta t$$

Esim. Myonit uudestaan

Myonin elinaika lepokoordinaatistossa $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,s$



Olk. K LAB koord. ja K' myonin lepokoord.

$\Delta t' = \tau_0$, aikadilaatio $\Delta t' = \gamma^{-1}\Delta t$

$$\Rightarrow \Delta t \equiv \tau_{LAB} = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

K:ssa myoni ehtii kulkea matkan $v\tau_{LAB} = \frac{v\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > v\tau_0$

$$\frac{v\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq L \Rightarrow v \geq 0.998c$$

Sama tulos kuin s. 21 laskussa