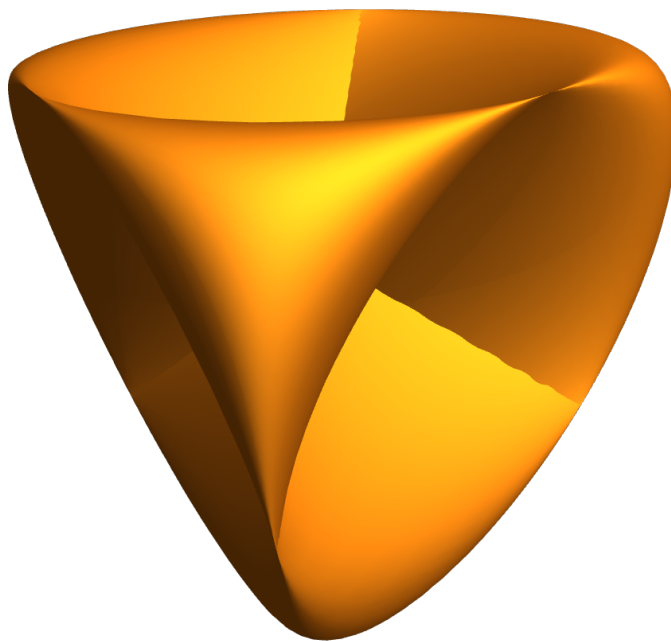

Differentiaaligeometria



JOUNI PARKKONEN
LUENTOJA JYVÄSKYLÄN YLIOPISTOSSA
SYKSYLLÄ 2023

Contents

I	Introduction to Manifolds	1
1	Smooth Manifolds	3
1.1	Euclidean Space	3
1.2	Topological Manifolds	4
1.3	Properties of Topological Manifolds	5
1.4	Smooth Manifolds	7
1.5	Manifolds and Quotient Maps	11
	Exercises	16
2	Smooth Functions and Maps	19
2.1	Smooth Vector-Valued Maps	19
2.2	Smooth Real-Valued Functions	20
2.3	Smooth Maps	21
2.4	Diffeomorphisms	22
2.5	Smooth Bump Functions	24
	Exercises	25
3	Tangent Space	27
3.1	Tangent Vectors and Derivatives at a Point in Euclidean Space	27
3.2	Differential of a Smooth Map at a Point	29
3.3	Computations in Coordinates	31
3.4	Tangent Vector of a Curve	33
	Exercises	34
4	Tangent Bundle and Vector Fields	37
4.1	Tangent Bundle	37
4.2	(Global) Differential of a Smooth Map	39
4.3	Vector Fields	40
4.4	On the Algebraic Structure	41
4.5	Integral Curves of a Vector Field	43
	Exercises	45
5	Alimonistot	47

5.1	Upotettu alimonisto	47
5.2	Säännölliset tasa-arvojoukot	48
5.3	Immersion ja upotus	50
5.4	Alimoniston tangenttiavaruus	53
	Harjoitustehtäviä	54
6	Submanifolds	57
6.1	Embedded Submanifold	57
6.2	Regular Level Sets	58
6.3	Immersion and Embedding	60
6.4	Tangent Space of a Submanifold	63
	Exercises	65
II	Differentiaaligeometriaa monistoilla	67
7	Kotangenttikimppu	69
7.1	Vektoriavaruuden duaali ja duaalikuvaus	69
7.2	Kotangenttivektorit	71
7.3	Kotangenttikimppu	73
7.4	Sileät 1-muodot	73
7.5	Sileän 1-muodon alkukuva	76
7.6	Sileän 1-muodon rajoittuma alimonistolle	78
7.7	Laskelmia koordinaateissa	78
	Harjoitustehtäviä	80
8	Multilineaarialgebraa	83
8.1	Vektoriavaruuden tensorit	83
8.2	Symmetriset ja alternoivat tensorit	85
8.3	Symmetointi ja alternointi	88
8.4	Ulkoista algebraa	89
8.5	Alternoivien tensorien kanta	92
8.6	Grassmannin algebra $A(V)$	94
	Harjoitustehtäviä	94
9	Tensorikimput ja tensorikentät	97
9.1	Tensorikimput ja tensorikentät	97
9.2	Kovariantin tensorikentän alkukuva	99
9.3	Riemannin metriikka	100
9.4	Modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorit	102
9.5	Modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorin arvo pisteessä	103
9.6	Yleistetyt tensorit	104
	Harjoitustehtäviä	105
10	Sileät differentiaalimuodot	107
10.1	Sileät k -muodot	107
10.2	Ulkoinen derivaatta	109
10.3	Suljetut ja eksaktit muodot	113

Harjoitustehtäviä	114
11 Suunnistus ja integrointi monistoilla	117
11.1 Polkuintegraalit sileällä monistolla	117
11.2 Korkeimman asteen muotojen integrointi euklidisessä avaruudessa	119
11.3 Suunnistus	120
11.4 Ykkösen ositus	121
11.5 Korkeimman asteen sileän muodon integraali	123
11.6 Suunnistusmuoto	124
Harjoitustehtäviä	126

Introduction

This text is the course material for the fall 2023 courses INTRODUCTION TO MANIFOLDS and DIFFERENTIAL GEOMETRY ON MANIFOLDS. Together, these courses form an introduction to the basics of differential geometry.

Prerequisites for the course include a good knowledge of differential calculus (Vector Analysis 2) and mastery of the basics of topology, for example based on the sources [?] or [?, Chapters I-V]. It is possible to take the courses even if the topology course is taken concurrently with DIFFERENTIAL GEOMETRY ON MANIFOLDS. In this case, assimilating new concepts is in some respects more demanding, but the aforementioned sources will assist in this task. Many concepts appear in the metric spaces course in a more limited context and thus become familiar through that.

The book [?] is recommended reading for the course, and the course is largely based on this book.

Notations and Conventions

This section introduces notations for some concepts that may be familiar from previous courses. Some notations¹⁾ or choices²⁾ differ in different courses.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ the natural numbers.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ the number of elements in the set A .
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ the difference of sets A and B .
- $A \sqcup B$ is the *disjoint union* of sets A and B . The notation signifies the set $A \cup B$ with the additional information that $A \cap B = \emptyset$.
- The *disjoint union* of sets X_α is

$$\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x, \alpha) : x \in X_\alpha, \alpha \in A\}.$$

- $f|_A$ the restriction of the map $f: X \rightarrow Y$ to the subset $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ for all $a \in A$.
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A, \text{ such that } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ for all } \alpha \in A\}$.
- $A \subsetneq B$ the set A is a proper subset of the set B : $A \subset B$ and $A \neq B$.
- $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$.
- ${}^t A$ is the transpose of the matrix A .
- $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ for all $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{E}^n$ is n -dimensional Euclidean space, see Chapter 1.2.
- $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

¹For example, the notations used for set differences vary.

²Is 0 a natural number?

- $B^n(a, r) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x - a\| < r\}$
- $\partial_i f(p) = \partial|_p f = \frac{\partial}{\partial x_k} f(p)$ is the partial derivative of the map $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ at the point $p \in \mathbb{E}^n$.
- $Df(p) = (\partial_i f_j(p))$ is the differential of the map $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$ at the point $p \in \mathbb{E}^n$.

Uusien käsitteiden *määritelmät* on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Tällaisessa laatikossa on jokin huomautus tai sopimus, joka on tärkeä huomata.

Part I

Introduction to Manifolds

Chapter 1

Smooth Manifolds

In the first chapter, we define smooth manifolds and become acquainted with several key examples. The definition of a smooth manifold given in Section 1.4 is based on the definition of a topological manifold, so Subsection 1.2 deals with this, more general concept than a smooth manifold. Subsection 1.3 and part of Subsection 1.5 require a more advanced mastery of the content of the topology course, but most of Chapter 1 can be studied smoothly before studying topology.

1.1 Euclidean Space

The *standard basis vectors* of the vector space $\mathbb{R}^n$ are

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

and a general vector is expressed in terms of its components in the forms

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k.$$

The *Euclidean inner product* on the vector space $\mathbb{R}^n$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

determines the *Euclidean norm*

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

and the *Euclidean distance* $d(x, y) = \|x - y\|$. The triple

$$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, (\cdot \mid \cdot), \|\cdot\|)$$

is *n-dimensional Euclidean space*.¹

¹We agree that $\mathbb{E}^0 = \{0\}$.

1.2 Topological Manifolds

Topological manifolds are topological spaces,² which locally have the same properties as Euclidean space.

Let X be a topological space. If every $x \in X$ has a neighborhood that is homeomorphic to Euclidean space, then X is a *locally Euclidean space*. Let $n \in \mathbb{N}$. If every $x \in X$ has a neighborhood that is homeomorphic to some open set of Euclidean space $\mathbb{E}^n$, then X is an *n -dimensional locally Euclidean space*.

If $U \subset \mathbb{R}^n$ and $V \subset \mathbb{R}^m$ are non-empty open sets and $m \neq n$, then there is no homeomorphism $h: U \rightarrow V$. It follows that the n -dimensionality of a locally Euclidean space is well-defined. This result is proven, for example, in the sources [?, 13.22], [?, Thm. 17.26] using methods of algebraic topology. We will not examine this result more closely in this course, as the result is considerably easier for differentiable manifolds, as we will notice in Chapter 1.4.

A topological space X is a *Hausdorff space* if for all $x, y \in X$, $x \neq y$ there exist open neighborhoods $U \ni x$ and $V \ni y$ such that $U \cap V = \emptyset$.

A topological space X is an *N_2 -space*,^a if its topology has a countable basis.^b

^aUsually called *second countable* in English.

^bA subset β of the topology τ is a *basis* for the topology τ if for every $U \in \tau - \{\emptyset\}$ there exist $B_i \in \beta$ such that $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ for some index set I .

Esimerkki 1.1. As a metric space, $\mathbb{E}^n$ is a Hausdorff space. Any open set of Euclidean space can be expressed as a countable union of balls whose center and radius are rational numbers. These balls form a countable basis for the topology of the space $\mathbb{E}^n$, so $\mathbb{E}^n$ is an N_2 -space.

Let $n \in \mathbb{N}$. If $M = (M, \tau)$ is an n -dimensional locally Euclidean Hausdorff N_2 -space, then it is an *n -dimensional topological manifold* or a *topological n -manifold*.

Esimerkki 1.2. (1) Euclidean space $\mathbb{E}^n$ is a topological n -manifold.

(2) Let $U \subset \mathbb{E}^n$ be an open set and let $f: U \rightarrow \mathbb{E}^m$ be a continuous map. The *graph* of the map f

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^m$$

is an n -dimensional topological manifold when equipped with the relative topology, i.e., the subspace topology. Then $\mathcal{G}(f)$ is a Hausdorff space and N_2 , because these properties are inherited from Euclidean space $\mathbb{E}^{n+m}$.

The map $F: U \rightarrow \mathcal{G}(f)$, $F(x) = (x, f(x))$ is continuous and the projection map $(x, f(x)) \mapsto x$ is its continuous inverse. The entire graph $\mathcal{G}(f)$ is thus homeomorphic to an open set of the space $\mathbb{E}^n$, so $\mathcal{G}(f)$ is a topological manifold.

²A *topological space* $X = (X, \tau)$ is a pair where $X \neq \emptyset$ is a set and τ is a collection of subsets of X that has the same properties regarding unions and intersections as the open sets of Euclidean space: (1) $\emptyset \in \tau$ and $X \in \tau$, (2) if $U_1, U_2, \dots, U_N \in \tau$, then $\bigcap_{k=1}^N U_k \in \tau$ and (3) if $A \neq \emptyset$ and $U_\alpha \in \tau$ for all $\alpha \in A$, then $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$. The collection τ is a *topology* and its elements are *open sets*. The theory of topological spaces can be reviewed or studied using, for example, the sources [?], [?] and [?].

Propositio 1.3. *Let $M_1, M_2, \dots, M_n$ be topological manifolds. Then $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ is a topological manifold.³*

Proof. Exercise 1.3. □

Let M be a topological manifold and let $p \in M$. Let U be an open neighborhood of the point p and let $\phi: U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{E}^n$ be a homeomorphism. The pair (U, ϕ) is a *chart* or a *local coordinate* and the map ϕ is a *chart map* or *coordinate map*. The open set U is a *coordinate neighborhood* of the point x .

A chart (U, ϕ) contains a point $p \in M$ if $p \in U$. A chart (U, ϕ) is *centered* at p if $\phi(p) = 0$.

Esimerkki 1.4. The surface of the unit sphere

$$\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n(0, 1) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}$$

is a topological space equipped with the relative topology from the topology of the space $\mathbb{E}^{n+1}$. Thus $\mathbb{S}^n$ is a Hausdorff space and since $\mathbb{E}^n$ is an N_2 -space, $\mathbb{S}^n$ is also an N_2 -space.

Let $1 \leq k \leq n+1$. The *coordinate projection in the direction $\mathbf{e}_k$* , which is the map $\text{pr}_k: \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{E}^n$,

$$\text{pr}_k(x) = \sum_{i \neq k} x_i \mathbf{e}_i,$$

determines homeomorphisms from the sets

$$U_k^\pm = \{x \in \mathbb{S}^n : \pm x_k > 0\} \tag{1.1}$$

to the unit ball $B^n(0, 1)$. If $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{S}^n$, then $x_j \neq 0$ for some $1 \leq j \leq n+1$. Then $x \in U_k^\pm$. So $\mathbb{S}^n$ is locally an n -dimensional Euclidean space, therefore it is a topological n -manifold.

Let $x \in \mathbb{S}^n$. The orthogonal projection $\text{pr}_x: \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow x^\perp$, $\text{pr}_x(y) = y - (y | x)x$, determines a homeomorphism from the open hemispheres of the sphere $\mathbb{S}^n$

$$U_x^+ = \{y \in \mathbb{S}^n : (x | y) > 0\} \quad \text{and} \quad U_x^- = \{y \in \mathbb{S}^n : (x | y) < 0\}$$

to the set $B^{n+1} \cap x^\perp$.⁴ From linear algebra we recall that there is an orthogonal linear map L_x such that $L_x(x) = \mathbf{e}_{n+1}$ and $L(x^\perp) = \mathbb{E}^n \times \{0\} = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$. The map $\text{pr}_{n+1} \circ L_x \circ \text{pr}_x|_{U_x}: U_x \rightarrow B^n(0, 1)$ is a homeomorphism. The pair $(U_x^\pm, \text{pr}_x|_{U_x^\pm})$ is a chart centered at x .

1.3 Properties of Topological Manifolds

A topological manifold has useful topological properties. The properties discussed in this section will mainly come into use in Part II. They are introduced in this part of the text because they hold even if the manifold does not have the differentiable structure defined in Chapter 1.4.

³The product space uses the product topology.

⁴If $x = \mathbf{e}_k$ for some $1 \leq k \leq n+1$, then $\text{pr}_{\mathbf{e}_k}$ is the coordinate projection pr_k and $U_{\mathbf{e}_k}^\pm = U_k^\pm$ as defined in equation (1.1).

A topological space is *locally compact* if every point has a neighborhood whose closure is compact.

Propositio 1.5. *A topological manifold is locally compact.*

Proof. Let M be a topological manifold and let $p \in M$. Then there is an open neighborhood $p \in U \subset M$ and a homeomorphism $\phi: U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{E}^n$, where $\phi(U)$ is open. For some $r > 0$, we have $\overline{B}(\phi(p), r) \subset \phi(U)$. Since ϕ is a homeomorphism, $\phi^{-1}(B(\phi(p), r))$ is a neighborhood of the point p and $\overline{\phi^{-1}(B(\phi(p), r))} = \phi^{-1}(\overline{B}(\phi(p), r))$ is compact. $\square$

A topological space is a *Lindelöf space* if every open cover has a countable subcover.

Propositio 1.6. *A topological manifold is a Lindelöf space.*

Proof. See [?, Theorem 9.15]. $\square$

A topological space is σ -compact if it is a countable union of compact sets.

Propositio 1.7. *A topological manifold is σ -compact.*

Proof. Exercise 1.4. $\square$

Let X be a topological space. A collection $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ is *locally finite* if every $x \in X$ has a neighborhood U such that the set $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ is finite.

Let X be a topological space and let $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$ be covers of the space X . The cover $\mathcal{V}$ is a *refinement* of the cover $\mathcal{U}$ if for every $U \in \mathcal{U}$ there exists $V \in \mathcal{V}$ such that $V \subset U$.

A topological space is *paracompact* if every open cover has a locally finite refinement.

Lause 1.8. *A topological manifold is paracompact.*

Proof. [?, Thm. 1.15]. $\square$

Theorem 1.8 follows from a more technical result needed for the construction of the smooth partition of unity in Chapter 11.4.

Lause 1.9. *Let M be a topological manifold and let $\mathcal{B}$ be a basis for its topology. Let $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ be an open cover of the manifold M . Then there exists a locally finite open cover $(B_i)_{i \in I}$ of the manifold M such that $B_i \in \mathcal{B}$ for all $i \in I$.*

Proof. [?, Thm. 1.15]. $\square$

Lause 1.10. *A topological manifold is metrizable.*

Proof. By Smirnov's metrization theorem⁵, every locally metrizable paracompact Hausdorff space is metrizable. A topological manifold is locally metrizable because it is locally homeomorphic to Euclidean space and the topology of Euclidean space is a metric topology. By definition, a topological manifold is a Hausdorff space and by Theorem 1.8 it is paracompact, so the claim follows. $\square$

⁵[?, Thm. 42.1]

1.4 Smooth Manifolds

The structure of a topological manifold is not sufficient for developing differential calculus on manifolds. In this chapter, we define the necessary additional structure.

Let $U \subset \mathbb{E}^n$ be an open set. A map $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ is *smooth* or a C^∞ -map if it is infinitely many times continuously differentiable.

Let M be a topological manifold. The charts (U, ϕ) and (V, ψ) defined on open sets U and V of the manifold M are (C^∞) -compatible if the *transition map*

$$\psi \circ (\phi|_{U \cap V})^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

is a C^∞ -diffeomorphism.^a

^aThe condition is empty if $U \cap V$ is empty.

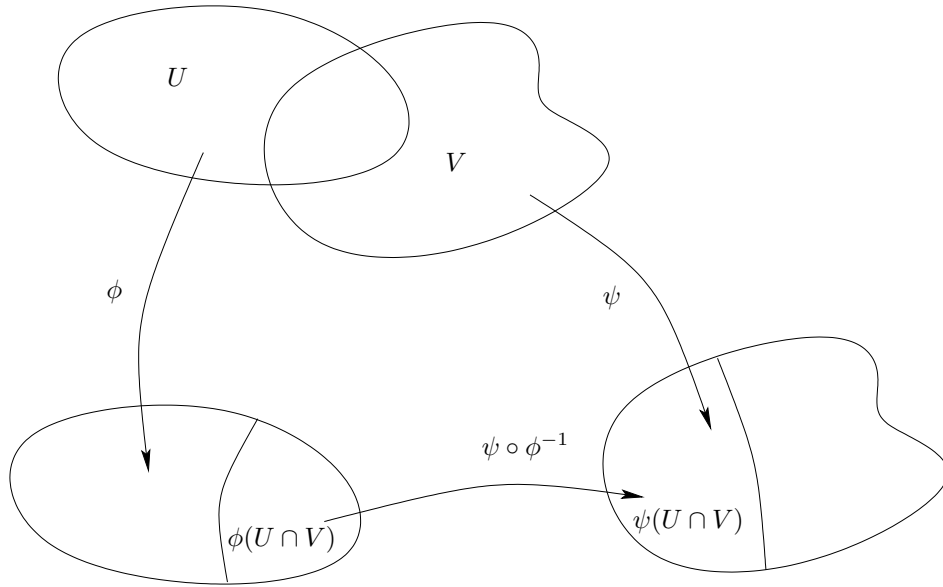


Figure 1.1 — Charts (U, ϕ) and (V, ψ) and their transition function.

Lemma 1.11. Let (U_1, ϕ_1) , (U_2, ϕ_2) , (U_3, ϕ_3) be charts on a topological manifold M such that (U_1, ϕ_1) and (U_2, ϕ_2) are compatible and (U_2, ϕ_2) and (U_3, ϕ_3) are compatible. Then $\phi_1 \circ (\phi_3|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3})^{-1}$ is smooth.

Proof. Exercise 1.5. □

Let $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ be a collection of pairwise C^∞ -compatible charts on the topological manifold M such that $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ is a cover of the manifold M . Then $\mathcal{U}$ is a C^∞ -atlas or a *smooth atlas* of the manifold M .^a

^aThe term *atlas* can also be used for the collection.

In a similar manner, one can define C^k -manifolds for any $k \in \mathbb{N}$, analytic manifolds, and for example complex analytic manifolds. For simplicity, in this course we will only consider smooth manifolds.

Esimerkki 1.12. (1) The collection $\{(U, \text{id}|_U) : U \subset \mathbb{E}^n \text{ open, } U \neq \emptyset\}$ is the *canonical atlas* of Euclidean space $\mathbb{E}^n$. The transition functions of the canonical atlas are identity maps, so the canonical atlas is a C^∞ -atlas.

(2) The restrictions of the coordinate projections form a C^∞ -atlas on the unit sphere $\mathbb{S}^n$. In the case of the unit circle $\mathbb{S}^1$, these charts are $(U_1^\pm, \text{pr}_1)$ and $(U_2^\pm, \text{pr}_2)$ as in Example 1.4. For example, on the set $\text{pr}_2(U_1^+ \cap U_2^+) = \{s \in \mathbb{E}^1 : 0 < s < 1\}$ we have

$$\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2^{-1}(s) = \text{pr}_1(s, \sqrt{1-s^2}) = \sqrt{1-s^2}$$

and similarly in other cases, so the transition maps are smooth.

(3) The map $S_0: \mathbb{S}^n - \{\mathbf{e}_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$

$$S_0(x) = \frac{x - \mathbf{e}_{n+1}}{1 - x_{n+1}} + \mathbf{e}_{n+1}$$

associates to the point x the intersection point of the line between $\mathbf{e}_{n+1}$ and x and the hyperplane $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^1$. The map $\mathcal{S} = \text{pr}_{n+1} \circ S_0: \mathbb{S}^n - \{\mathbf{e}_3\} \rightarrow \mathbb{E}^n$,

$$\mathcal{S}(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}$$

is the *stereographic projection from the north pole*. The expression for the inverse map of the stereographic projection is

$$\mathcal{S}^{-1}(y) = \frac{(2y, \|y\|^2 - 1)}{1 + \|y\|^2}. \quad (1.2)$$

Similarly, the *stereographic projection from the south pole* $\tilde{\mathcal{S}} =: \mathbb{S}^n - \{-\mathbf{e}_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{E}^n$ is formed by the expression

$$\tilde{\mathcal{S}}(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_{n+1}}.$$

The coordinate neighborhoods of the stereographic projections $\mathcal{S}$ and $\tilde{\mathcal{S}}$ form a cover of the topological manifold $\mathbb{S}^n$. Their intersection set is $\mathbb{S}^n - \{\pm \mathbf{e}_{n+1}\}$ and by expression (1.2), on the set $\mathbb{E}^n - \{0\}$ we have

$$\tilde{\mathcal{S}} \circ \mathcal{S}^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2} = \mathcal{S} \circ \tilde{\mathcal{S}}^{-1}(y),$$

so the transition map is a reflection in the sphere $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$. Thus, the stereographic projections from the north and south poles form a smooth atlas.

(4) Example (2) can be generalized using the implicit function theorem⁶: Let $U \subset \mathbb{E}^n$ be open and let $F: U \rightarrow \mathbb{E}^1$ be smooth. A number $c \in F(U)$ is a *regular value* if $\nabla F(p) \neq 0$ for all $p \in F^{-1}(c)$. By the implicit function theorem, the *level set* $F^{-1}(c)$ is locally the graph of a smooth function and the transition maps are smooth.

⁶See Vector Analysis 2 or for example [?, Thm. C.40].

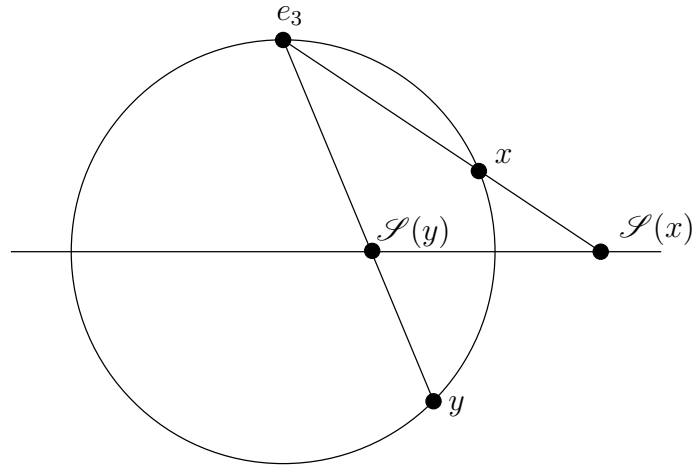
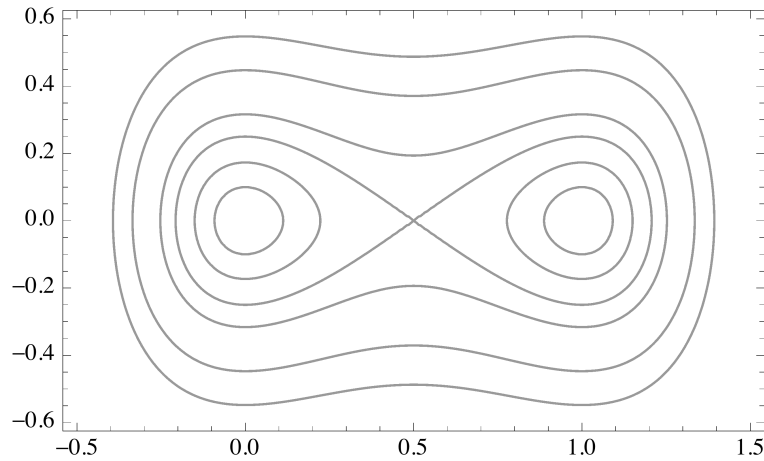


Figure 1.2 — Stereographic projection.

For example, $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

as a polynomial function of two variables is smooth and $\nabla F(x) = \begin{pmatrix} -4x_1(x_1 - \frac{1}{2})(x_1 - 1) \\ -2x_2 \end{pmatrix} = 0$ only if $x_2 = 0$ and $x_1 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Thus, the level curves of the function V illustrated in Figure 1.3 are smooth everywhere except at the point $(\frac{1}{2}, 0)$, since $F^{-1}(0) = \{(0, 0), (1, 0)\}$ is a smooth 0-manifold even though 0 is not a regular value of the function V .

Figure 1.3 — Level curves of the function V from Example 1.12(4)

If $\mathcal{U}$ is a smooth atlas and for no smooth atlas $\mathcal{V}$ does $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V}$ hold, then $\mathcal{U}$ is a *maximal smooth atlas* or a *differentiable structure* or a *smooth structure* on the manifold M .

If $\mathcal{U}$ is a differentiable structure on a topological manifold M , then $(M, \mathcal{U})$ is a *smooth manifold* or a *differentiable manifold*.

If $(M, \mathcal{U})$ is a smooth manifold and $(U, \phi) \in \mathcal{U}$, then $(U, \phi) \in \mathcal{U}$ is a *smooth chart*.

Propositio 1.13. *Every smooth atlas $\mathcal{U}$ on a manifold M is contained in a unique maximal smooth atlas.*

Proof. Let $\mathcal{U}$ be a smooth atlas on the manifold M . Let $\widehat{\mathcal{U}}$ be the collection of all charts that are compatible with the atlas $\mathcal{U}$. The charts belonging to the atlas $\mathcal{U}$ cover the manifold M and they are contained in the atlas $\widehat{\mathcal{U}}$, so the charts belonging to the atlas $\widehat{\mathcal{U}}$ cover the manifold M . Let $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2) \in \widehat{\mathcal{U}}$. Assume that $p \in U_1 \cap U_2$. Let $(V, \psi) \in \mathcal{U}$ be a chart that contains the point p . By Lemma 1.11, $\phi_1 \circ (\phi_2|_{U_1 \cap U_2 \cap V})^{-1}$ is smooth. This holds for all $p \in U_1 \cap U_2$, so $\phi_1 \circ (\phi_2|_{U_1 \cap U_2})^{-1}$ is smooth. Thus the collection $\widehat{\mathcal{U}}$ is a smooth atlas. By its definition, the atlas $\widehat{\mathcal{U}}$ is a maximal smooth atlas.

If $\mathcal{V}$ is an atlas that contains the atlas $\mathcal{U}$, then its charts are compatible with the charts of the atlas $\mathcal{U}$. So they belong to the atlas $\widehat{\mathcal{U}}$, hence $\mathcal{V} \subset \widehat{\mathcal{U}}$. Thus $\widehat{\mathcal{U}}$ is unique. $\square$

Let $\mathcal{U}$ be a smooth atlas on a topological manifold M . The smooth structure in which $\mathcal{U}$ is contained is the *maximal smooth atlas/differentiable structure/smooth structure determined by the atlas $\mathcal{U}$* .

Propositio 1.14. *If a chart (V, ψ) is compatible with a smooth atlas $\mathcal{U}$ of a topological manifold M , then it is smooth in the smooth structure determined by the atlas $\mathcal{U}$.*

Proof. Exercise 1.6. $\square$

Esimerkki 1.15. (1) The atlases from Example 1.12 determine differentiable structures, and the topological manifolds equipped with these structures are smooth manifolds.

We use the smooth structures determined by the atlases presented in Example 1.12 for the smooth manifolds $\mathbb{E}^n$ and $\mathbb{S}^n$.

(2) If $M_1, M_2, \dots, M_n$ are smooth manifolds, their product manifold $M = M_1 \times \dots \times M_n$ has a smooth manifold structure: If (U_j, ϕ_j) is a smooth chart on the manifold M_j , $1 \leq j \leq n$, then $(U_1 \times \dots \times U_n, \phi_1 \times \dots \times \phi_n)$ is a smooth chart on the product manifold M . The sets $U_1 \times \dots \times U_n$ cover the manifold M and it is easy to check that the atlas thus obtained is a smooth atlas. Unless otherwise stated, we use the smooth structure determined by this atlas for the product manifold of smooth manifolds.

(3) Let M be a smooth manifold and let $V \subset M$ be a non-empty open subset. If $\mathcal{U}$ is a smooth atlas of the manifold M , then $\{(U \cap V, \phi|_{U \cap V}) : (U, \phi) \in \mathcal{U}, U \cap V \neq \emptyset\}$ is a smooth atlas that makes the open set U a smooth manifold. Then U is an *open submanifold* of the smooth manifold M .

Esimerkki 1.16. The map $\phi: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$, $\phi(t) = t^3$, is a homeomorphism, so $(\mathbb{E}^1, \phi)$ is a chart and it forms an atlas. By Proposition 1.13, $(\mathbb{E}^1, \phi)$ is contained in a maximal atlas $\mathcal{V}$. This atlas is not the same as the maximal atlas of the canonical atlas, because the transition map $\text{id} \circ \phi^{-1}$, $s \mapsto \sqrt[3]{s}$, is not smooth.

1.5 Manifolds and Quotient Maps

In this chapter, we examine some key examples of smooth manifolds constructed from equivalence classes using the quotient construction.

Let (X, τ) be a topological space and let $\sim$ be an equivalence relation on the set X . The equivalence classes of the equivalence relation $\sim$

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

form the *quotient set*

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}$$

and the map $\pi_\sim : X \rightarrow X/\sim$,

$$p_\sim(x) = [x],$$

is the *quotient map* or *natural* or *canonical projection*.

The collection

$$\tau_\sim = \{U \subset X/\sim : \pi_\sim^{-1}(U) \in \tau\}$$

is the *quotient topology* on the set $X/\sim$.

Propositio 1.17. *Let X be a topological space and let $\sim$ be an equivalence relation on the set X . The quotient map $\pi_\sim : X \rightarrow X/\sim$ is a continuous surjection.*

Proof. [?, Prop. 12.12], [?, §22]. □

Let X and Y be topological spaces. A map $f : X \rightarrow Y$ is an *open map* if $f(U)$ is open for all open sets $U \subset X$.

An equivalence relation is *open* if its quotient map is an open map.

The following result is often useful in constructing manifolds:

Propositio 1.18. *Let X be a topological space and let B be a basis for the topology of the space X . Let $\sim$ be an equivalence relation on the set X whose quotient map $\pi : X \rightarrow X/\sim$ is an open map. Then $\{\pi(E) : E \in B\}$ is a basis for the topology of the space $X/\sim$.*

Proof. Exercise 1.8. □

Seuraus 1.19. *Let $\sim$ be an open equivalence relation on an N_2 -space X . Then $X/\sim$ is an N_2 -space.* □

In Exercise 1.10 we examine an example where the quotient map of an equivalence relation is neither open nor closed.

Verifying that a quotient space is a Hausdorff space is often more challenging.

Esimerkki 1.20 (Torus). Define an equivalence relation on the space $\mathbb{E}^n$ by choosing the equivalence classes to be the sets $x + \mathbb{Z}^n$ for all $x \in \mathbb{E}^n$. The quotient space thus formed

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{E}^n / \mathbb{Z}^n$$

is the n -dimensional *torus*.

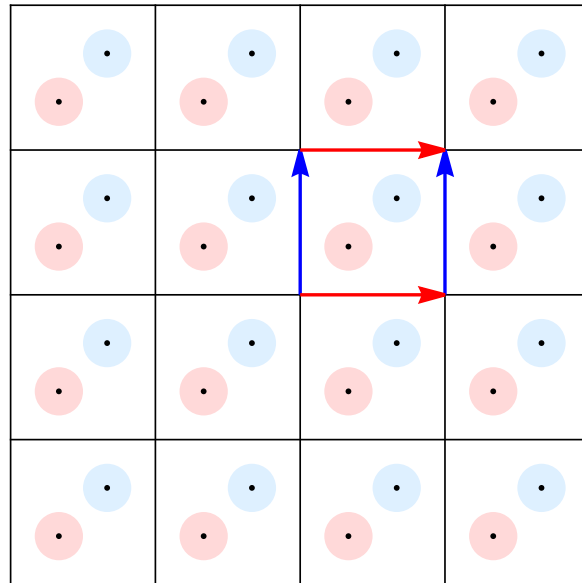


Figure 1.4 — Ball neighborhoods of the points $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + \mathbb{Z}^2$ and $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + \mathbb{Z}^2$ on the 2-torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$. The torus can also be formed by identifying opposite sides of the closed unit square as indicated by the arrows.

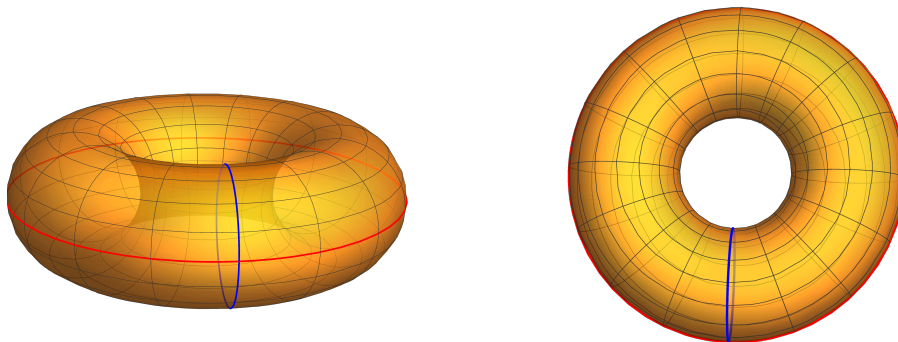


Figure 1.5 — 2-torus.

If $a + \mathbb{Z}^n, b + \mathbb{Z}^n \in \mathbb{T}^n$ are two distinct points, then their preimages $a + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{E}^n$ and $b + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{E}^n$ are disjoint and it is easy to choose a small $r > 0$ such that $B(a, r) + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{E}^n$ and $B(b, r) + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{E}^n$ are disjoint. The images of these open sets on the torus are open disjoint neighborhoods of the points $a + \mathbb{Z}^n, b + \mathbb{Z}^n \in \mathbb{T}^n$. Thus $\mathbb{T}^n$ is a Hausdorff space.

Next, we check that the quotient map $\pi: x \mapsto x + \mathbb{Z}^n$ is open: Let $U \subset \mathbb{E}^n$ be an open set. From the definition of the equivalence relation it follows that

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (U + k),$$

which is an open set. By the definition of the quotient topology, $\pi(U)$ is thus open. By Corollary 1.19, $\mathbb{T}^n$ is an N_2 -space.

The torus has a natural smooth atlas obtained from local inverses of the quotient map: Let $a + \mathbb{Z}^n \in \mathbb{T}^n$. The restriction of the quotient map π to the ball $B(a, \frac{1}{2})$ is an injection, so its inverse map $\phi_a = \pi^{-1}: U_a = \pi(B(a, \frac{1}{2})) \rightarrow B(a, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{E}^n$ is a chart map. By the definition of the equivalence relation, the transition maps of the atlas $\{(U_a, \phi_a) : a \in \mathbb{R}^n\}$ are affine maps $x \mapsto x + k$, $k \in \mathbb{Z}^n$. In particular, the transition maps are thus smooth.

Let $\sim$ be an equivalence relation on the set X . A map $f: X \rightarrow Y$ is *compatible* with the equivalence relation $\sim$ if $f(x_1) = f(x_2)$ for all $x_1, x_2 \in X$ for which $x_1 \sim x_2$.

If a map $f: X \rightarrow Y$ is compatible with the equivalence relation $\sim$, then it determines a map $f_\sim: X/\sim \rightarrow Y$,

$$f_\sim([x]) = f(x).$$

For a map $f: X \rightarrow Y$ compatible with the equivalence relation $\sim$ on the set X , we thus have $f = f_\sim \circ \pi_\sim$.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi_\sim \downarrow & \searrow f & \\ X/\sim & \xrightarrow{f_\sim} & Y \end{array}$$

Propositio 1.21. *Let $\sim$ be an equivalence relation on a topological space X and let Y be a topological space. Let $f: X \rightarrow Y$ be a map that is compatible with the equivalence relation $\sim$. Then f is continuous if and only if $f_\sim$ is continuous.*

Proof. See [?, Chapter 12.2], [?, Thm. 22.2]. □

Esimerkki 1.22. The quotient space $\mathbb{E}^1/\mathbb{Z}$ is homeomorphic to the unit circle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{E}^2$: The map $f: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, is a continuous surjection, which is injective on the interval $[0, 1]$. It is compatible with the equivalence relation due to the periodicity of cosine and sine, so by Proposition 1.21 the map $f_\sim: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ is continuous. The restriction of the quotient map $\pi_\sim$ to the interval $[0, 1]$ is a bijection, so the map $f_\sim$ is a bijection.

By Proposition 1.17, the quotient map $\pi_\sim$ is continuous and $\mathbb{E}^1/\mathbb{Z}^1 = \pi_\sim(0, 1)$, so $\mathbb{E}^1/\mathbb{Z}^1$ is compact as the image of a compact set under a continuous map. Thus $f_\sim$ is a continuous bijection from a compact space to a Hausdorff space, so it is a homeomorphism.⁷ More generally, $\mathbb{T}^n$ is homeomorphic to the product space $(\mathbb{S}^1)^n$.

Esimerkki 1.23 (Projective space). Let $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$. Define an equivalence relation $\sim$ on the topological space $\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$ by setting the partition to be the sets

$$\mathbb{R}^\times x = \{t x : t \in \mathbb{R}^\times\} = [x] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_n : x_{n+1}].$$

Each equivalence class of this equivalence relation intersects the sphere surface $\mathbb{S}^n$ in exactly two points and determines a partition of the set $\mathbb{S}^n$ into sets $\{x, -x\}$, $x \in \mathbb{S}^n$. The quotient space

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{E}^{n+1} - \{0\})/\sim = \mathbb{S}^n/\sim$$

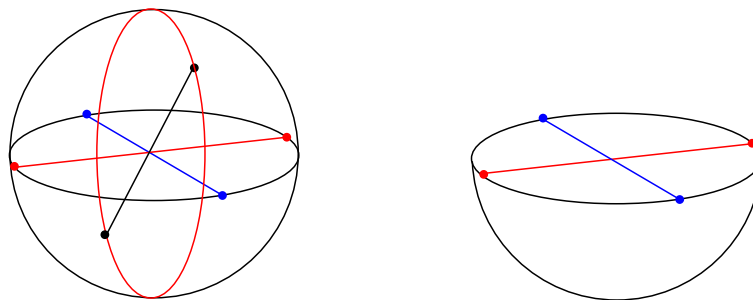


Figure 1.6 — Formation of the projective plane $\mathbb{P}^2$ by identifying opposite points on the surface $\mathbb{S}^2$ as in the left figure and by identifying opposite points on the equator of the closed southern hemisphere as in the right figure.

is the n -dimensional *projective space*. Projective space is compact by Proposition 1.17, since $\mathbb{S}^n$ is compact.

Projective space $\mathbb{P}^n$ is the space of lines, i.e., 1-dimensional vector subspaces, of the space $\mathbb{E}^{n+1}$: Points $x, y \in \mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$ span the same line

$$\langle x \rangle = \{rx : r \in \mathbb{R}\} = \{ry : r \in \mathbb{R}\} = \langle y \rangle,$$

if and only if $y = sx$ for some $s \in \mathbb{R}^\times$.

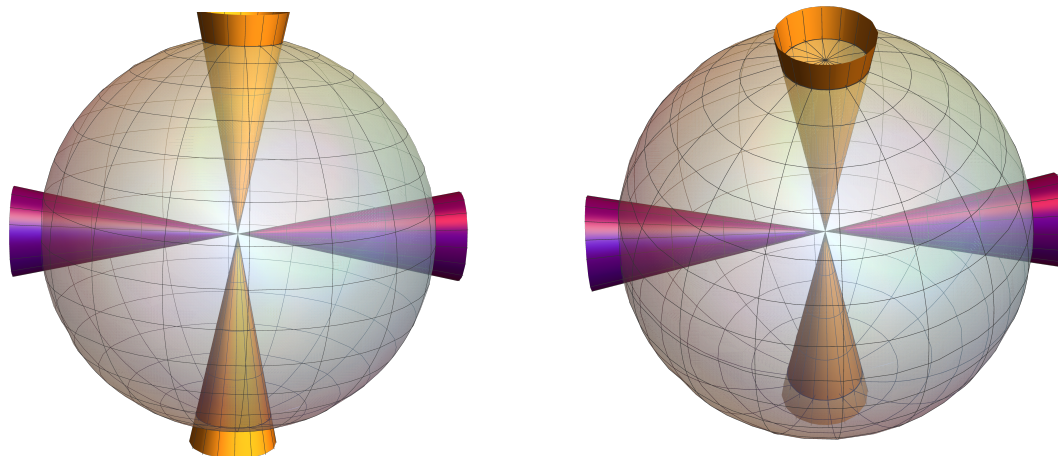


Figure 1.7 — The projective plane is the space of lines in $\mathbb{E}^3$.

By Exercise 1.11, $\mathbb{P}^n$ is a Hausdorff space and an N_2 -space. We show next that projective space is an n -dimensional smooth manifold. Let $1 \leq k \leq n+1$. Let $U_k = \{[x_1 :$

⁷See [?, Theorem 11.17], [?, Thm. 22.2].

$x_2 : \cdots : x_{n+1}] : x_k \neq 0\}^8$. The map $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{E}^n$,

$$\phi_k([x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_k} \right).$$

The map is clearly well-defined, because $\frac{\lambda x_j}{\lambda x_k} = \frac{x_j}{x_k}$ for all $1 \leq j, k \leq n+1$ and all $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. By restricting to the unit sphere surface, Example 1.4 shows that it is a homeomorphism onto its image and that the coordinate neighborhoods $U_1, U_2, \dots, U_{n+1}$ cover the projective space $\mathbb{P}^n$.

We show that the transition maps are smooth diffeomorphisms: Let $[x] \in \mathbb{P}^n$. Assume that $x_1, x_2 \neq 0$, so $[x] \in U_1 \cap U_2$. Then

$$\phi_1([x]) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_1} \right) \quad \text{and} \quad \phi_2([x]) = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_2} \right).$$

The expressions for the inverse maps $\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1} : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ are

$$\phi_1^{-1}(y) = [1 : y_1 : \cdots : y_n] \quad \text{and} \quad \phi_2^{-1}(y) = [y_1 : 1 : y_2 : \cdots : y_n],$$

so

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1} \right),$$

and

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(y) = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1} \right).$$

Thus the transition map $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \{y \in \mathbb{E}^n : y_1 \neq 0\} \rightarrow \{y \in \mathbb{E}^n : y_1 \neq 0\}$ is a smooth diffeomorphism. The other transition maps are examined similarly.

We use the smooth structure determined by the atlas presented in this example for projective space.

Projective space is an abstract smooth manifold whose definition does not give it as a subset of any Euclidean space.

⁸The condition $x_k = 0$ is well-defined because the equivalence class is defined by multiplying by non-zero real numbers.

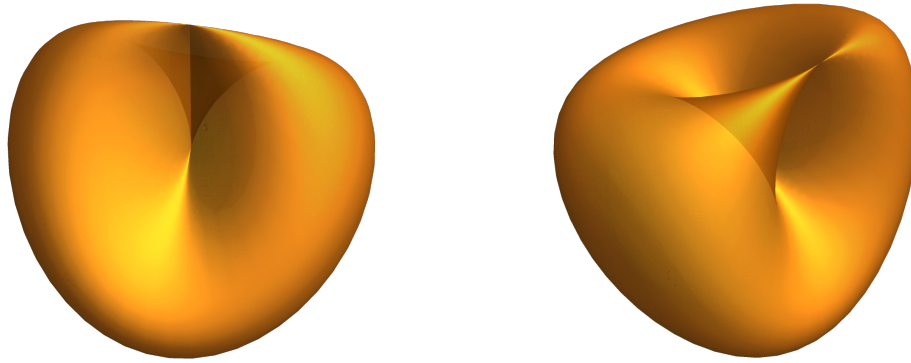


Figure 1.8 — Visualization of the projective plane based on the construction in the right part of Figure 1.6. The figure shows an image of the projective plane $\mathbb{P}^2$ by the map f_2 from Exercise 1.12.

Let X and Y be topological spaces. A map $F: X \rightarrow Y$ is a *(topological) embedding* if $F: X \rightarrow F(X)$ is a homeomorphism.^a

^aThe image set $F(X)$ is equipped with the subspace topology, i.e., the induced topology.

By Whitney's embedding theorem⁹, $\mathbb{P}^n$ can be embedded into Euclidean space $\mathbb{E}^{2n}$ for all $n \geq 2$. In Exercise 1.13 we examine a topological embedding of the projective plane $\mathbb{P}^2$ into the space $\mathbb{E}^4$.

Esimerkki 1.24 (Real numbers with two zeros). Let $X = \mathbb{E}^1 \times \{0, 1\}$ equipped with the disjoint union topology of the topological spaces $\mathbb{E}^1$ and $\mathbb{E}^1$. Let $\sim$ be the equivalence relation whose equivalence classes are $\{(x, 0), (x, 1)\}$ for all $x \neq 0$ and the one-point sets $\{(0, 0)\}$ and $\{(0, 1)\}$. The quotient space $X/\sim$ is locally Euclidean but it is not a Hausdorff space, because the points $\{(0, 0)\} \in X/\sim$ and $\{(0, 1)\} \in X/\sim$ do not have disjoint neighborhoods.

Exercises

1.1. Let

$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{E}^2$$

equipped with the relative topology. Show that X is an N_2 Hausdorff space but X is not a manifold.¹⁰

1.2. Let $T > 0$ and let

$$S_T = \{(\sin(t), \sin(2t)) : 0 < t < T\} \subset \mathbb{E}^2.$$

Show that S_T is a manifold when $0 < T \leq \pi$, and that S_T is not a manifold when $T > \pi$.

⁹Theorem 6.16.

¹⁰Justify carefully why the origin does not have a neighborhood that is homeomorphic to an open set of Euclidean space.

1.3. Prove Proposition 1.3.

1.4. Prove Proposition 1.7.

1.5. Prove Lemma 1.11.

1.6. Prove Proposition 1.14.

1.7. Show that the stereographic projection $\mathcal{S}: \mathbb{S}^2 - \{\mathbf{e}_3\} \rightarrow \mathbb{E}^2$ is compatible with the smooth structure of the smooth manifold $\mathbb{S}^2$.

1.8. Prove Proposition 1.18

1.9. Show that the quotient topology is a topology.

1.10. Let $X = \{x \in \mathbb{E}^2 : x_1 \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{E}^2 : x_2 = 0\}$ equipped with the relative topology. Let $\sim$ be the equivalence relation whose equivalence classes are the sets $\{x \in X : x_1 = a\}$, $a \in \mathbb{R}$. Show that the quotient map $\pi: X \rightarrow X/\sim \cong \mathbb{E}^1$ is neither open nor closed.

1.11. Show that projective space is a Hausdorff space and an N_2 -space.¹¹

1.12. Let $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$,

$$\tilde{f}_1(x) = (x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2),$$

$$\tilde{f}_2(x) = (x_2x_3, 2x_1x_2, x_1^2 - x_2^2),$$

$$\tilde{f}_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{(x_1 + x_2 + x_3)((x_1 + x_2 + x_3)^3 + 4(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3))}{4} \\ (2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)\|x\|^2 + 2x_2x_3(x_2^2 - x_3^2) + x_3x_1(x_1^2 - x_3^2) + x_1x_2(x_2^2 - x_1^2) \\ \sqrt{3}((x_2^2 - x_3^2)\|x\|^2 + x_3x_1(x_3^2 - x_1^2) + x_1x_2(x_2^2 - x_1^2)) \end{pmatrix}.$$

Show that the maps $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ determine continuous maps $f_1, f_2, f_3: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$.

1.13. Show that the map $\nu: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{E}^4$,

$$\nu([x]) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$$

is a topological embedding.¹²

¹¹Show that the projection map is an open map. Figure 1.7 may help in showing the Hausdorff property.

¹²Examine the map $\tilde{\nu}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^4$, $\tilde{\nu}(x) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$. To show that ν is injective, show that $\tilde{\nu}(x) = \tilde{\nu}(y)$ if and only if $x = \pm y$. Why is it sufficient to show that ν is a continuous injection?

Chapter 2

Smooth Functions and Maps

The differentiable structure of a manifold enables the development of differential calculus on the manifold. In this chapter, we will become acquainted with smooth maps. At the beginning of the chapter, we will examine vector-valued maps. In this course, we call maps whose target set is $\mathbb{E}^1$ *functions*.

2.1 Smooth Vector-Valued Maps

Let $m, n \in \mathbb{N}$ and let M be a smooth n -manifold. A vector-valued map $f: M \rightarrow \mathbb{E}^m$ is *smooth* if $f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{E}^m$ is smooth for all smooth charts (U, ϕ) .
Let $C^\infty(M, \mathbb{E}^m) = \{f: M \rightarrow \mathbb{E}^m : f \text{ is smooth}\}$.

Lemma 2.1. *Let M be a smooth manifold and let $(U, \phi), (V, \psi)$ be smooth charts of the manifold M such that $U \cap V \neq \emptyset$. Let $f: M \rightarrow \mathbb{E}^n$. If $f \circ \phi^{-1}$ is smooth, then $f \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}$ is smooth.*

Proof. In the domain $\psi(U \cap V)$ of the map $f \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}$, we have

$$f \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}),$$

so $f \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}$ is smooth as a composition of two smooth maps. □

By Lemma 2.1, it suffices to check the smoothness of a vector-valued map using one smooth chart around each point.

Seuraus 2.2. *Let M be a smooth manifold. A map $f: M \rightarrow \mathbb{E}^n$ is smooth if and only if for every $p \in M$ there is a smooth chart (U_p, ϕ_p) such that $p \in U_p$ and the map $f \circ \phi_p^{-1}: \phi_p(U_p) \rightarrow \mathbb{E}^n$ is smooth.*

Proof. Assume that for every $p \in M$ there is a smooth chart (U_p, ϕ_p) such that $p \in U_p$ and the map $f \circ \phi_p^{-1}: \phi_p(U_p) \rightarrow \mathbb{E}^n$ is smooth. Let (V, ψ) be a smooth chart and let $q \in V$. Then

$$f \circ (\psi|_{V \cap U_q})^{-1} = (f \circ \phi_q^{-1}) \circ (\phi_q \circ (\psi|_{V \cap U_q})^{-1})$$

is smooth as a composition of two smooth maps. Since this holds for all $q \in V$, the map $f \circ \psi^{-1}$ is smooth.

If, on the other hand, f is smooth, then $f \circ \phi^{-1}$ is smooth for all charts ϕ . The claim follows because any point p of the manifold M has a smooth chart containing the point p . $\square$

The $\mathbb{E}^n$ -valued maps defined on a smooth manifold M form a vector space when the addition of maps $f, g: M \rightarrow \mathbb{E}^n$ and multiplication by a constant $\lambda \in \mathbb{R}$ are defined by setting

$$\begin{aligned}(f + g)(p) &= f(p) + g(p), \\ (\lambda f)(p) &= \lambda f(p)\end{aligned}$$

for all $p \in M$.

Lemma 2.3. *Let M be a smooth manifold. The set of smooth maps $C^\infty(M, \mathbb{E}^n)$ equipped with map addition and multiplication by constants is a real vector space.*

Proof. We show that $C^\infty(M, \mathbb{E}^n)$ is a subspace of the vector space of all $\mathbb{E}^n$ -valued maps defined on the manifold M . The constant functions are smooth, so $C^\infty(M, \mathbb{E}^n)$ is not empty. Let $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{E}^n)$ and let $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Let $p \in M$ and let (U, ϕ) be a chart containing the point p . By definition, the vector-valued maps $f \circ \phi^{-1}$ and $g \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{E}^n$ are smooth. By known results from differential calculus, $\lambda f \circ \phi^{-1} + \mu g \circ \phi^{-1}$ is smooth. Since this holds for all $p \in M$, it follows from Corollary 2.2 that $f + g$ is smooth. $\square$

Lemma 2.4. *Let M be a smooth n -manifold and let (U, ϕ) be a smooth chart. Then $\phi: U \rightarrow \mathbb{E}^n$ is smooth.*

Proof. By Corollary 2.2, to check the smoothness of the map ϕ , it suffices to use the chart (U, ϕ) itself. In this chart, we have $\phi \circ \phi^{-1} = \text{id}$. $\square$

2.2 Smooth Real-Valued Functions

Smooth functions are a particularly important special case. Different sources use different notations for them

$$C^\infty(M) = \mathfrak{F}(M) = C^\infty(M, \mathbb{E}^1).$$

In addition to addition and multiplication by constants, multiplication is defined for real-valued functions by setting

$$(fg)(p) = f(p)g(p)$$

for all $p \in M$.

Let V be a vector space equipped with a bilinear multiplication of vectors $(v, w) \mapsto vw$. If $(V, +, \cdot)$ is a ring, then V equipped with addition, multiplication, and multiplication by constants is an (associative) $\mathbb{R}$ -algebra.

Propositio 2.5. *The set of smooth functions $C^\infty(M) = \mathfrak{F}(M)$ equipped with addition, multiplication, and multiplication by real constants is a commutative associative $\mathbb{R}$ -algebra.*

Proof. By Lemma 2.3, $\mathfrak{F}(M)$ is a vector space. The rest of the claim is proven similarly. Exercise 2.1. $\square$

2.3 Smooth Maps

Let M and N be smooth manifolds. A continuous map $F: M \rightarrow N$ is *smooth at the point* $p \in M$ if the map $\psi \circ F \circ (\phi|_{U \cap F^{-1}(V)})^{-1}$ is smooth for every chart (U, ϕ) containing the point p and for every chart (V, ψ) containing the point $F(p)$,

The map F is *smooth* if it is smooth at every point $p \in M$.

Let

$$C^\infty(M, N) = \{f: M \rightarrow N : f \text{ is smooth}\}.$$

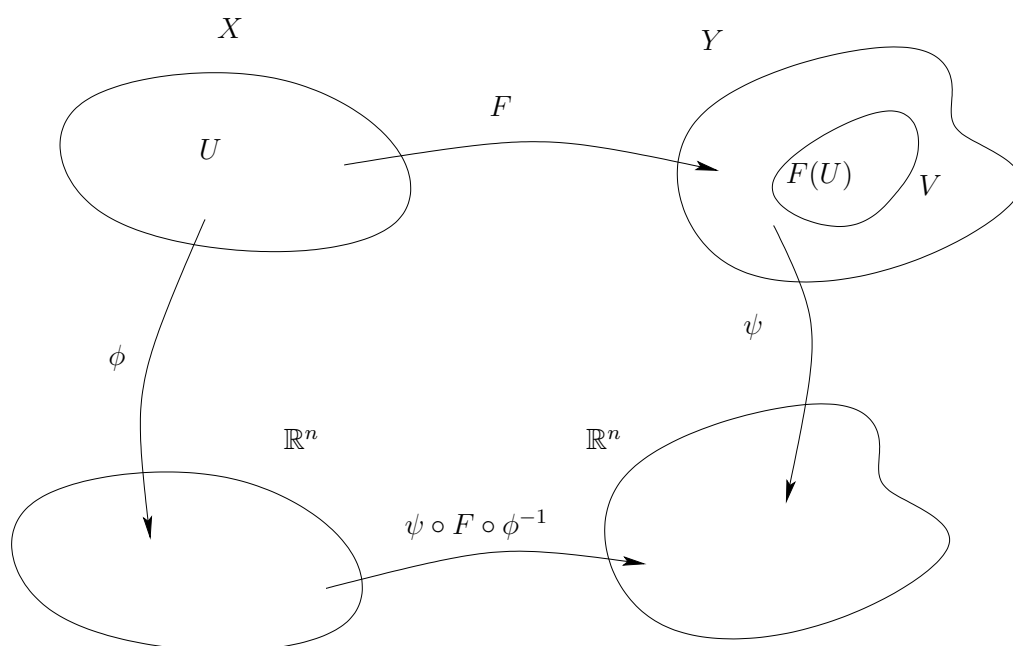


Figure 2.1 — Differentiable map.

Propositio 2.6. *Let M and N be smooth manifolds. A continuous map $F: M \rightarrow N$ is smooth at the point $p \in M$ if the map $\psi \circ f \circ (\phi|_{U \cap F^{-1}(V)})^{-1}$ is smooth at the point $\phi(p)$ for some smooth chart (U, ϕ) containing the point p and for some smooth chart (V, ψ) containing the point $F(p)$.*

Proof. Exercise 2.2. □

Propositio 2.7. *The composition of smooth maps is smooth.*

Proof. Let M_1 , M_2 , and M_3 be smooth manifolds. Let $F_1: M_1 \rightarrow M_2$ and $F_2: M_2 \rightarrow M_3$ be smooth maps. Let $p \in M_1$, let (U_1, ϕ_1) be a smooth chart containing p , let (U_2, ϕ_2) be a smooth chart containing $F_1(p)$, and let (U_3, ϕ_3) be a smooth chart containing $F_2 \circ F_1(p)$. Then

$$\begin{aligned} \phi_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ \phi_1|_{U_1 \cap (F_1^{-1}(U_2 \cap F_2^{-1}(U_3)))} \\ = (\phi_3 \circ F_2 \circ (\phi_2|_{U_2 \cap F_2^{-1}(U_3)})^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F_1 \circ \phi_1|_{U_1 \cap (F_1^{-1}(U_2 \cap F_2^{-1}(U_3)))}) \end{aligned}$$

is smooth. The claim follows from Proposition 2.6. □

Esimerkki 2.8. (1) The inclusion map $i: U \rightarrow M$, $i(p) = p$, of an open submanifold $U \subset M$ of a smooth manifold M is smooth: Let $p \in U$ and let (ϕ, V) be a smooth chart of the manifold M containing the point p . Then $\phi|_U$ is a smooth chart by Example ?? . The map ι is smooth at p , because $\phi \circ i \circ (\phi|_U)^{-1} = \text{id}$ in its domain $U \cap V \ni p$. The identity map is smooth, so ι is smooth by Proposition 2.6.

(2) The quotient map $\pi: (\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{P}^n$, $\pi(x) = [x]$ is smooth: Use the chart defined by the canonical chart of the Euclidean space on the smooth manifold $\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$, $\text{id}|_{\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}}: \mathbb{E}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, and the charts $\phi_k: U_k \rightarrow \mathbb{E}^n$, $1 \leq k \leq n+1$, defined in Example ?? for the projective space. Let $p \in \mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$ and assume that $p_{n+1} \neq 0$. Then

$$\phi_k \circ \pi \circ \text{id}^{-1}(x) = \frac{(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_{n+1}}$$

is smooth in its domain $\{x \in \mathbb{E}^{n+1} : x_k \neq 0\} \ni p$. The calculations are done similarly for the other charts.

(3) The map $F: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, $F(x) = [x]$ is smooth: Let $p \in \mathbb{S}^n$. Assume that $p_1 > 0$. Use the chart maps $\text{pr}_1: U_1^+ \rightarrow B^n(0, 1)$ and ϕ_1 defined in the previous chapter. Let $y \in B^n(0, 1) = \text{Im } \text{pr}_1$. Then

$$\phi_1 \circ F \circ \text{pr}_1^{-1}(y) = \phi_1(F(\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_1, \dots, y_n)) = \frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}},$$

so $\phi_1 \circ F \circ \text{pr}_1^{-1}$ is smooth. The calculations are done similarly for the other charts.

2.4 Diffeomorphisms

Let M and N be smooth manifolds. A smooth bijection $F: M \rightarrow N$ is a *diffeomorphism* if its inverse map is smooth.

A map $G: M \rightarrow N$ is a *local diffeomorphism* if for every point $p \in M$ there is a neighborhood U_p such that $G|_{U_p}: U_p \rightarrow G(U_p)$ is a diffeomorphism.

Lemma 2.9. Let M_1 , M_2 , and M_3 be smooth manifolds. If M_1 and M_2 are diffeomorphic and M_2 and M_3 are diffeomorphic, then M_1 and M_3 are diffeomorphic.

Proof. Let $F_1: M_1 \rightarrow M_2$ and $F_2: M_2 \rightarrow M_3$ be diffeomorphisms. The composition of bijections is a bijection and the composition of smooth maps is smooth by Proposition 2.7. The claim follows by noting that $(F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$. $\square$

Lemma 2.10. Let M be a smooth manifold and let (U, ϕ) be a smooth chart. Then $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ is a diffeomorphism.

Proof. The coordinate representation of the chart map ϕ in the chart (U, ϕ) is $\text{id} \circ \phi \circ \phi^{-1} = \text{id}$, which is a diffeomorphism. $\square$

Esimerkki 2.11. (1) The map $\phi: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$, $\phi(x) = x^3$ is not a diffeomorphism, because its inverse map $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ is not smooth at the origin.

In Example ?? we noted that the maximal atlas $\mathcal{U}$ containing the atlas $\{(\mathbb{E}^1, \phi)\}$ is different from the maximal atlas of the canonical atlas. The map $\phi^{-1}: \mathbb{E}^1 \rightarrow (\mathbb{E}^1, \mathcal{U})$ is

a diffeomorphism, because its coordinate representation is $\phi \circ \phi^{-1} \circ \text{id}^{-1} = \text{id}$, which is smooth.

Lemma 2.12. *Let M be a smooth n -manifold and let $U \subset M$ be open, $U \neq \emptyset$. Let $F: U \rightarrow F(U) \subset \mathbb{E}^n$ be a smooth diffeomorphism. Then (U, F) is a smooth chart.*

Proof. Exercise 2.9. □

If the smooth manifolds $(M, \mathcal{U})$ and $(M, \mathcal{V})$ are diffeomorphic, then the differentiable structures $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$ are *equivalent*.

If smooth manifolds are diffeomorphic, they are considered manifestations of the same abstract smooth manifold and are said to be *the same up to diffeomorphism*. Every manifold of dimension at most 3 has a unique differentiable structure up to diffeomorphism. The topological space $\mathbb{E}^4$ has uncountably many differentiable structures that are not equivalent to each other. Results proven by Donaldson and Freedman in the 1980s imply that such exotic structures exist.¹ For compact manifolds, examples were already known earlier of manifolds with multiple differentiable structures that are not equivalent to each other. For example, Milnor [?] showed that the manifold $\mathbb{S}^7$ has 15 differentiable structures up to diffeomorphism. On the other hand, Kervaire [?] gave an example of a 10-manifold with no differentiable structure at all.

It is easier to show that diffeomorphic smooth manifolds must have the same dimension than to show that homeomorphic topological manifolds have the same dimension.²

Propositio 2.13. *Let M be a smooth m -manifold and let N be a smooth n -manifold. If M and N are diffeomorphic, then $m = n$.*

Proof. Let $F: M \rightarrow N$ be a diffeomorphism. Let (U, ϕ) be a smooth chart on the manifold M and let (V, ψ) be a smooth chart on the manifold N such that $V \subset F(U)$. The map

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ (\phi|_{F^{-1}(V)})^{-1}$$

is a diffeomorphism from an open non-empty subset $\phi(F^{-1}(V))$ of $\mathbb{E}^m$ to an open subset $\psi(V)$ of $\mathbb{E}^n$.

Let $x_0 \in \phi(F^{-1}(V))$. By the chain rule,

$$I_n = D(\hat{F}^{-1} \circ \hat{F})(x_0) = D(\hat{F}^{-1})(\hat{F}(x_0)) D\hat{F}(x_0)$$

and

$$I_m = D(\hat{F} \circ \hat{F}^{-1})(\hat{F}(x_0)) = D\hat{F}(x_0) D(\hat{F}^{-1})(\hat{F}(x_0)),$$

so $D\hat{F}(x_0)$ is invertible³ and $D(\hat{F}^{-1})(\hat{F}(x_0)) = D\hat{F}(x_0)^{-1}$. Thus $n = m$. □

¹See for example [?].

²See Chapter ??.

³See Exercise 2.10.

2.5 Smooth Bump Functions

Let $f: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{when } t > 0 \\ 0, & \text{when } t \leq 0 \end{cases}.$$

Let $a < b$ and let $g: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$,

$$h_{a,b}(t) = \frac{f(b-t)}{f(b-t) + f(t-a)} \quad (2.1)$$

for all $t \in \mathbb{E}^1$.

Lemma 2.14. *The functions f and h are smooth. Furthermore, $h_{a,b}(t) = 1$ for all $t \leq a$ and $h_{a,b}(t) = 0$ for all $t \geq b$.*

Proof. The smoothness of f is an exercise in analysis. The denominator of the expression defining $h_{a,b}$ has no zeros because $a < b$. Its smoothness thus follows from the smoothness of f . See [?, Lemmas 2.20,2.21]. $\square$

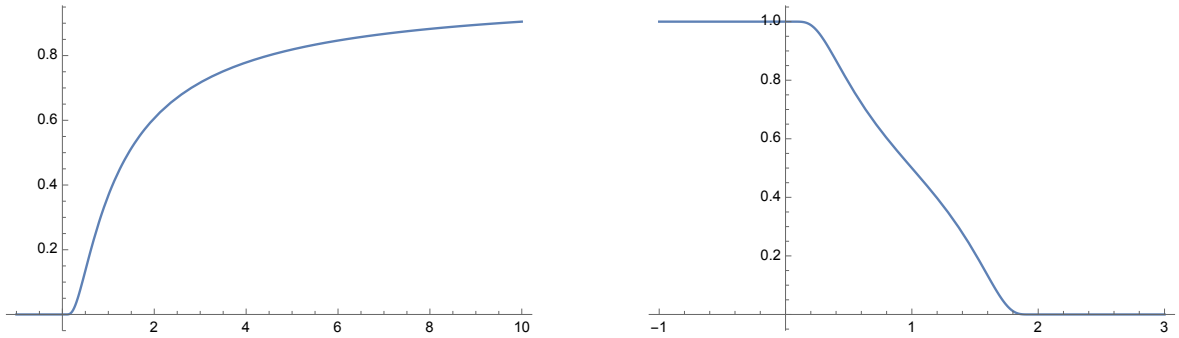


Figure 2.2 — Graphs of the functions f and $h_{1,2}$.

Let $0 < a < b$ and let $h: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$,

$$H_{a,b}(x) = h_{a,b}(\|x\|).$$

Lemma 2.15. *The function $H_{a,b}$ is smooth. Furthermore, $H(x) = 1$ for all $x \in \overline{B}(0, a)$ and $H_{a,b}(x) = 0$ for all $x \notin \overline{B}(0, b)$.*

Proof. See [?, Lemma 2.22]. $\square$

The function $H_{a,b}$ is a *smooth bump function* at the point $0 \in \mathbb{E}^n$.

Lemma 2.16. *Let M be a smooth n -manifold and let (U, ϕ) be a p -centered chart at the point p . Let $b > 0$ such that $\overline{B}(\phi(p), b) \subset \phi(U)$ and let $0 < a < b$. Let $\eta_{a,b}: M \rightarrow \mathbb{E}^1$,*

$$\eta_{a,b}(q) = \begin{cases} H \circ \phi(q), & \text{if } q \in U, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

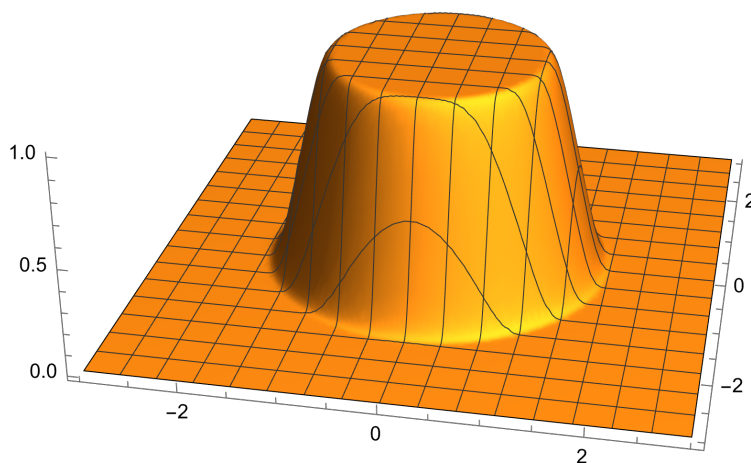


Figure 2.3 — A smooth bump function $H_{1,2}$ in the plane.

Then $\eta_{a,b}$ is a smooth function such that $\eta_{a,b}(q) = 1$ in some open neighborhood of the point p and whose support⁴ is contained in the open set U . $\square$

The smooth bump function is a useful tool with which we can, for example, extend a smooth function defined in a coordinate neighborhood of some point $p \in M$ to a smooth function defined on the whole manifold M , which takes the same values as the original function in some neighborhood of the point p .

Lemma 2.17. *Let M be a smooth n -manifold and let $p \in M$. Let U be an open neighborhood of p and let $g \in C^\infty(U)$. Then there exists $\tilde{g} \in C^\infty(M)$, and an open neighborhood $V \subset U$ of the point p , such that $g|_V = \tilde{g}|_V$.*

Proof. Let (W, ϕ) be a p -centered chart.⁵ By Lemma 2.16, there is a smooth bump function $\eta: M \rightarrow \mathbb{E}^1$ whose support is contained in the set $W \cap U$. Let $\tilde{g}: M \rightarrow \mathbb{E}^1$,

$$\tilde{g}(q) = \begin{cases} \eta(q)g(q), & \text{if } q \in W \cap U, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Then $\tilde{g}$ is smooth at all points of the open set $W \cap U$, because it is the product of two smooth functions. If $q \notin W \cap U$, then $\eta(q) = 0$ and since the support of a continuous function is closed, the point q has an open neighborhood in which $\tilde{g}$ is the constant zero function. Thus $\tilde{g}$ is smooth at q , so $\tilde{g} \in C^\infty(M)$. $\square$

Exercises

2.1. Prove Proposition 2.5.

⁴The *support* of a function is the complement of its zero set.

⁵The open set U is not necessarily a chart neighborhood.

- 2.2.** Prove Proposition 2.6.
- 2.3.** Show that the inclusion map $i: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{E}^2$, $i(p) = p$, is smooth.
- 2.4.** Let $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$ be a smooth function. Show that $f|_{\mathbb{S}^1}$ is smooth.
- 2.5.** Show that the quotient map $\pi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, $\pi(x) = x + \mathbb{Z}^n$, is smooth.
- 2.6.** Show that the map $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, $\pi(x) = [x]$, is a smooth local diffeomorphism.
- 2.7.** Let M and N be smooth manifolds and let $q_0 \in N$. Let $i_{q_0}: M \rightarrow M \times N$ be the map $i_{q_0}(p) = (p, q_0)$. Show that i_{q_0} is smooth.
- 2.8.** Show that the map $F: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $F(s + \mathbb{Z}) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ is smooth.
- 2.9.** Prove Lemma 2.12.
- 2.10.** Let A and B be matrices such that $AB = I_n$ and $BA = I_m$. Show that $B = A^{-1}$ and $n = m$.
- 2.11.** Let M be a smooth n -manifold, $n \geq 1$. Show that the vector space $\mathfrak{F}(M)$ is infinite-dimensional.⁶
- 2.12.** Let M , N_1 , and N_2 be smooth manifolds. Let $\pi_k: N_1 \times N_2 \rightarrow N_k$ be the projection maps $\pi_k(p_1, p_2) = p_k$, for $k \in \{1, 2\}$. Show that a map $F: M \rightarrow N_1 \times N_2$ is smooth if and only if the maps $\pi_1 \circ F$ and $\pi_2 \circ F$ are smooth.

⁶Show that it is not finite-dimensional! Bump functions may be helpful here.

Chapter 3

Tangent Space

In this chapter, we define the tangent vectors of a smooth manifold by generalizing the concept of the directional derivative in Euclidean space to this more abstract setting.

3.1 Tangent Vectors and Derivatives at a Point in Euclidean Space

Let $U \subset \mathbb{E}^n$ be an open set and let $p \in U$. Every vector $v \in \mathbb{R}^n$ determines a *directional derivative* at the point p by setting, for every¹ $f \in C^\infty(U)$,

$$\partial_v|_p f = \partial_v f(p) = Df(p)v = (\nabla f(p) \cdot v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

From differential calculus, we know that the directional derivative $\partial_v|_p: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ is a linear map that satisfies the *Leibniz rule*: If $f, g \in C^\infty(U)$ and $v \in \mathbb{R}^n$, then

$$\partial_v|_p(fg) = \partial_v|_p f g(p) + f(p) \partial_v|_p g.$$

In this chapter, we consider the generalization of the directional derivative to manifolds.

Let M be a smooth manifold and let $p \in M$. A linear map $\mathfrak{d}: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ is a *(point) derivation at the point p* on the space $C^\infty(M)$ if it satisfies the *Leibniz rule*

$$\mathfrak{d}(fg) = \mathfrak{d}(f)g(p) + f(p)\mathfrak{d}(g).$$

Let $\mathfrak{D}_p(M)$ be the set of point derivations at the point $p \in M$.

The definition is set up so that the directional derivative is a derivation at the point p for all $p \in U$, where $U \subset \mathbb{E}^n$ is an open set.

¹The definition of the directional derivative works for more general functions as well, but in this course we only consider smooth functions.

Lemma 3.1. *Let M be a smooth manifold. Let $\mathfrak{d}$ be a point derivation at the point $p \in M$.*

- (1) *If c is a constant function, then $\mathfrak{d}c = 0$.*
 (2) *If $f, g \in C^\infty(M)$ and $f(p) = g(p) = 0$, then $\mathfrak{d}(fg) = 0$.*

Proof. For the derivation $\mathfrak{d}$, we have $\mathfrak{d}(1) = \mathfrak{d}(1 \cdot 1) = 1\mathfrak{d}(1) + \mathfrak{d}(1)1$, so $\mathfrak{d}(1) = 0$. By linearity, the same holds for all constant functions.

(2) Follows directly from the Leibniz rule. $\square$

Lemma 3.2. *Let M be a smooth manifold and let $p \in M$. The derivations at the point p form a vector space.*

Proof. Exercise 3.1. $\square$

The point derivations of Euclidean space are directional derivatives:

Propositio 3.3. *A linear map $L: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ is a derivation at the point p if and only if $L = \partial_v|_p$ for some $v \in \mathbb{R}^n$.*

Proof. Let $\mathfrak{d}$ be a derivation at the point $p \in \mathbb{R}^n$. Let $f \in C^\infty(U)$. Consider the function f on the line $t \mapsto p + t(x - p)$. By the chain rule,

$$\frac{d}{dt}f(p + t(x - p)) = Df(p + t(x - p))(x - p) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(p + t(x - p))(x_k - p_k),$$

so by integrating we get

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{k=1}^n (x_k - p_k) \int_0^1 \partial_k f(p + t(x - p)) dt \\ &= f(p) + \sum_{k=1}^n (x_k - p_k) g_k(x). \end{aligned}$$

In particular, $g_k(p) = \partial_k f(p)$. By the Leibniz rule for the derivation, linearity, and Lemma 3.1,

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}(f) &= \mathfrak{d}\left(\sum_{k=1}^n (x_k - p_k) g_k(x)\right) = \sum_{k=1}^n \mathfrak{d}(x_k - p_k) g_k(p) + \mathfrak{d}(g_k)(p_k - p_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_k f(p) \mathfrak{d}(x_k) \\ &= \left(\nabla f(p) \cdot (\mathfrak{d}(x_1), \mathfrak{d}(x_2), \dots, \mathfrak{d}(x_n))\right) = \partial_{(\mathfrak{d}(x_1), \mathfrak{d}(x_2), \dots, \mathfrak{d}(x_n))}|_p f. \end{aligned}$$

Thus the derivation $\mathfrak{d}$ is a directional derivative. $\square$

Lause 3.4. *The map $\partial: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{D}_p(\mathbb{R}^n)$, $v \mapsto \partial_v|_p$, is a linear bijection.*

Proof. By the definition of the directional derivative,

$$\partial_{\lambda v + \mu w}|_p f = Df(p)(\lambda v + \mu w) = \lambda Df(p)v + \mu Df(p)w = (\lambda \partial_v|_p + \mu \partial_w|_p)f,$$

so the map is linear. Surjectivity was shown in Proposition 3.3.

Let $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. For the map $r_k: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$, $r_k(x) = x_k$, we have

$$\partial_v r_k(p) = D r_k(p)v = v_k,$$

for $1 \leq k \leq n$. Since $v \neq 0$, there is $1 \leq k \leq n$ such that $v_k \neq 0$. Thus $\partial_v|_p \neq 0$, so the map $v \mapsto \partial_v|_p$ is injective. $\square$

Theorem 3.4 identifies the tangent space of Euclidean space at the point $p \in \mathbb{E}^n$ with the vector space whose elements are derivations, i.e., directional derivatives at the point p :

$$T_p(\mathbb{E}^n) = \mathfrak{D}_p(\mathbb{E}^n).$$

This observation is the basis for the definition of the tangent space of a smooth manifold:

The *tangent space* of the smooth manifold M at the point p is

$$T_p(M) = \mathfrak{D}_p(M).$$

The following result shows that a point derivation is determined by the behavior of the function near the point in question.

Propositio 3.5. *Let M be a smooth manifold and let $p \in M$. Let $f, g \in C^\infty(M)$. If there is an open neighborhood V of the point p such that $f|_V = g|_V$, then $vf = vg$ for all $v \in T_p M$.*

Proof. Let (U, ϕ) , $U \subset V$, be a chart centered at p . The set $\phi(U) \subset \mathbb{E}^n$ is an open neighborhood of the origin, so there exists $b > 0$ such that $\overline{B}(0, b) \subset \phi(U)$. Let $0 < a < b$. Let $\eta_{a,b}$ be a smooth bump function as in Lemma ???. With these parameter choices, we have $(f - g)(1 - \eta_{a,b}) = f - g$.

Let $v \in T_p M$. By Lemma 3.1, we have

$$v(f - g) = v((1 - \eta_{a,b})(f - g)) = 0,$$

so by the linearity of the point derivation, $vf = vg$. $\square$

3.2 Differential of a Smooth Map at a Point

If $f \in C^\infty(M)$ and $F \in C^\infty(M, N)$, then by Proposition ??, $f \circ F \in C^\infty(N)$.

Lemma 3.6. *Let M and N be smooth manifolds and let $p \in M$. Let $F: M \rightarrow N$ be a smooth map and let $v \in T_p M$ and $f \in C^\infty(N)$. Let $\tilde{v}: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{v}(f) = v(f \circ F)$. Then $\tilde{v} \in T_{F(p)} N$.*

Proof. Let $f, g \in C^\infty(N)$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Then by the linearity of the map v ,

$$\tilde{v}(\lambda f + \mu g) = v(\lambda f \circ F + \mu g \circ F) = \lambda v(f \circ F) + \mu v(g \circ F) = \lambda \tilde{v}(f) + \mu \tilde{v}(g),$$

so $\tilde{v}$ is linear. Similarly, from the Leibniz rule for the derivation v , it follows that

$$\begin{aligned} \tilde{v}(fg) &= v((fg) \circ F) = v(f \circ F g \circ F) = v(f \circ F) g \circ F(p) + f \circ F(p) v(g \circ F) \\ &= \tilde{v}(f) g(F(p)) + f(F(p)) \tilde{v}(g), \end{aligned}$$

so $\tilde{v}$ satisfies the Leibniz rule. $\square$

By Lemma 3.6, the following definition is well-posed.

Let M and N be smooth manifolds and let $F: M \rightarrow N$ be a smooth map and let $p \in M$. The map $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$,

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F)$$

for all $f \in C^\infty(N)$, is the *differential* of the map F at the point $p \in M$.

Propositio 3.7. (1) The differential of a smooth map $F: M \rightarrow N$ at the point $p \in M$ is a linear map.

(2) Let M_1 , M_2 and M_3 be smooth manifolds and let $F_1: M_1 \rightarrow M_2$ and $F_2: M_2 \rightarrow M_3$ be smooth maps. Then

$$d(F_2 \circ F_1)_p = (dF_2)_{F_1(p)}(dF_1)_p.$$

(3) The differential of the identity map of the smooth manifold M at the point $p \in M$ is $\text{id}_{T_p M}$.

(4) If F is a smooth diffeomorphism, then dF_p is a linear bijection and

$$(dF_p)^{-1} = (dF^{-1})_{F(p)}.$$

Proof. Exercises 3.2 and 3.3. □

Propositio 3.8. Let M be a smooth manifold, let $U \subset M$ be an open set, and let $p \in U$. Let $i: U \rightarrow M$ be the inclusion map. Then $di_p: T_p U \rightarrow T_p M$ is an isomorphism.²

Proof. First, we show that di_p is injective. Let $v \in T_p U$ such that $di_p(v) = 0 \in T_p M$. Then for all $f \in C^\infty(M)$, we have

$$0 = di_p(v)(f) = v(f \circ i) = v(f|_U).$$

Let $g \in C^\infty(U)$. By Lemma ??, there exists $\tilde{g} \in C^\infty(M)$ and an open neighborhood $V \subset U$ of the point p such that $g|_V = \tilde{g}|_V$. By Proposition 3.5, $vg = v(\tilde{g}|_U) = 0$. This holds for all $g \in C^\infty(U)$, so $v = 0$. Thus di_p is injective.

Next, we show that di_p is surjective. Let $v \in T_p M$. Let $\hat{v}: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ be the map $\hat{v}f = v\tilde{f}$, where $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ is any function such that $\tilde{f}|_W = f|_W$ in some neighborhood $W \subset U$ of the point p . The map $\hat{v}$ is well-defined by Proposition 3.5, and in Exercise 3.4 it is verified that $\hat{v} \in T_p U$. For all $g \in C^\infty(M)$, we have by Proposition 3.5

$$di_p(\hat{v})g = \hat{v}(g \circ i) = \hat{v}(g|_U) = v(\widetilde{g|_U}) = vg,$$

so $di_p(\hat{v}) = v$. □

Lause 3.9. Let M be a smooth n -manifold and let $p \in M$. Then $\dim T_p M = n$.

Proof. Let (U, ϕ) be a chart containing the point p . By Lemma ??, $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ is a diffeomorphism. By Proposition 3.7(4), the vector spaces $T_p U$ and $T_{\phi(p)} \mathbb{E}^n$ are isomorphic. By Proposition 3.8 and Theorem 3.4,

$$\dim T_p M = \dim T_p U = T_{\phi(p)} \mathbb{E}^n = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

□

²So it is a linear bijection.

3.3 Computations in Coordinates

Let (U, ϕ) be a chart on the smooth n -manifold M and let $p \in U$. By Theorem 3.4, the *coordinate (tangent) vectors* $\partial_1|_{\phi(p)}, \dots, \partial_n|_{\phi(p)}$ form a basis for the tangent space $T_{\phi(p)}\mathbb{E}^n$. The tangent vector

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \partial_i|_p = (d\phi_p)^{-1}(\partial_i|_{\phi(p)})$$

is the i th *coordinate vector* at the point p in the coordinates defined by the chart ϕ .

Seuraus 3.10. *The coordinate vectors form a basis for the tangent space $T_p M$.*

Proof. The claim follows from the proof of Theorem 3.9. $\square$

Here we introduce the general notation for the coordinate vector of a manifold at a point $p \in M$.

Note that we now move to the general notation used in differential geometry for computations involving coordinates, where the components of the coordinate x are denoted by a superscript

$$\phi(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)).$$

Rule: Basis vectors of the tangent space use subscripts and vector components use superscripts. The index i in the expression $\frac{\partial}{\partial x^i}$ is interpreted as a subscript because it is the superscript in the *denominator of the fraction*.

Einstein summation convention: If the same index appears once as a superscript and once as a subscript in a monomial expression like $ca^i b_i$, the expression means the sum $\sum_{i=1}^n ca^i b_i$. However, we will avoid using the Einstein summation convention.

Let M be a smooth m -manifold and N a smooth n -manifold and let $F: M \rightarrow N$ be a smooth map. Let $\phi = (x^1, \dots, x^m)$ be a local coordinate at the point $p \in M$ and let $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ be a local coordinate at the point $F(p) \in N$. Then by the definitions and differential calculus, we have

$$\begin{aligned} dF_p(\partial_i|_p) &= dF_p d(\phi^{-1})_{\phi(p)}(\partial_i|_{\phi(p)}) \\ &= d(\psi^{-1})_{\psi \circ F(p)} d(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\partial_i|_{\phi(p)}) \\ &= d(\psi^{-1})_{\psi \circ F(p)} \sum_{j=1}^n \partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j(\phi(p)) \partial_j|_{\psi \circ F(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j(\phi(p)) d(\psi^{-1})_{\psi \circ F(p)} \partial_j|_{\psi \circ F(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j(\phi(p)) \partial_j|_{F(p)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Such concise notation is well-suited for situations where M and N are different manifolds. The effect of a change of coordinates on the coordinate vectors is obtained by the same

calculation, but now the notation used above is not sufficient because the atlas used is not clear from the notation. A more traditional way to write equation (3.1) is

$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}. \quad (3.2)$$

If there are many calculations to be done, it is good to adopt a more concise notation for the map $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$.

Let $p \in M$ and let (U, ϕ) and (V, ψ) be smooth charts at the point p . When $F = \text{id}$, the calculation of equation (3.1) gives as a special case

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(\psi \circ \phi^{-1})^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \quad (3.3)$$

Traditionally, the abbreviated notation $y^j = y^j(x) = (\psi \circ \phi^{-1})^j$ is used, so that equation (3.3) takes the form

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \quad (3.4)$$

Esimerkki 3.11. Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and let

$$C_\alpha = \{t(\cos \alpha, \sin \alpha) : t \geq 0\}.$$

The map $\Phi_\alpha: [\text{open}]0\infty \times [\text{open}]-\pi + \alpha\pi + \alpha \rightarrow U_\alpha = \mathbb{E}^2 - C_\alpha$,

$$\Phi_\alpha(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

gives the *polar coordinates* of the plane $\mathbb{E}^2$. Then $\Phi_\alpha^{-1}: U \rightarrow [\text{open}]0\infty \times [\text{open}]-\pi + \alpha\pi + \alpha$ is a chart map on the manifold $\mathbb{E}^2$. The choice $\alpha = 0$ gives the conventional polar coordinates.

By considering the charts $\phi = \Phi_\alpha^{-1}$ and $\psi = \text{id}$, the change of coordinates gives the expressions

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\Phi_\alpha(r_0, \theta_0)} &= \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \theta_0 \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\Phi_\alpha(r_0, \theta_0)} &= -r_0 \sin \theta_0 \frac{\partial}{\partial x^1} + r_0 \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

or in another form

$$\begin{aligned} r_0 \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\Phi_\alpha(r_0, \theta_0)} &= x_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\Phi_\alpha(r_0, \theta_0)} &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

where $(x_1, x_2) = \Phi_\alpha(r_0, \theta_0)$.

3.4 Tangent Vector of a Curve

By Theorem 3.9, the tangent space of the smooth manifold $\mathbb{E}^1$ at the point $t_0 \in \mathbb{E}^1$ is 1-dimensional. Then the tangent space $T_{t_0}\mathbb{E}^1$ has a natural basis $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t_0}$, for which the traditional notation is

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t_0}$$

Let M be a smooth manifold and let $p \in M$. Let J be an open interval, let $\gamma: J \rightarrow M$ be a smooth curve, and let $t_0 \in J$ such that $\gamma(t_0) = p$. The *tangent vector of the smooth curve γ at the point p or the velocity at time t_0* is^a

$$\dot{\gamma}(t_0) = d\gamma_{t_0} \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}.$$

^aLee [?, s. 69] denotes the velocity vector by $\gamma'(t_0)$.

Let $\gamma: I \rightarrow M$ be a smooth curve and let $t'_0 \in I$. Let (U, ϕ) be a chart containing the point $\gamma(t_0)$ and let $x^1, x^2, \dots, x^n$ be the component functions of the chart map ϕ . Denote $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ for all $1 \leq i \leq n$. Then we get as a special case of formula (3.1)

$$\dot{\gamma}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{d\gamma^i}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t_0)}. \quad (3.5)$$

Propositio 3.12. *Let M be a smooth manifold and let $p \in M$. For every $v \in T_p M$, there exists an open interval $I \subset \mathbb{E}^1$ with $0 \in I$, and a smooth curve $\gamma: I \rightarrow M$ such that $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Proof. Let (U, ϕ) be a smooth chart centered at p . Let $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$ such that³

$$d\phi_p v = \sum_{k=1}^n \hat{v}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_0.$$

Let $\gamma_0: [\text{open}] - \varepsilon\varepsilon \rightarrow \phi(U)$,

$$\gamma_0(t) = t \hat{v}.$$

Then for every $f \in C^\infty(\phi(U))$, we have

$$\left(d(\gamma_0)_0 \frac{d}{dt}\bigg|_0\right) f = \frac{d}{dt}\bigg|_0 f \circ \gamma_0 = \frac{d}{dt}\bigg|_0 f(t\hat{v}) = Df(0)\hat{v} = (d\phi_p v) f.$$

So

$$d(\gamma_0)_0 \frac{d}{dt}\bigg|_0 = d\phi_p v.$$

Let $\gamma = \phi^{-1} \circ \gamma_0$. By Proposition 3.7 parts (2) and (4),

$$\dot{\gamma}(0) = d(\phi^{-1} \circ \gamma_0)_0 \frac{d}{dt}\bigg|_0 = d(\phi^{-1})_0 \circ d(\gamma_0)_0 \frac{d}{dt}\bigg|_0 = d(\phi^{-1})_0 \circ d\phi_p v = v. \quad \square$$

³By Theorem 3.4, if $v \in T_p \mathbb{E}^n$, then $v = \partial_{\hat{v}} = \sum_{k=1}^n \hat{v}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ for some $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$.

The following result can be used, with the help of Proposition 3.12, to determine the differentials of smooth maps.

Propositio 3.13. *Let M and N be smooth manifolds and let $F: M \rightarrow N$ be a smooth map. Let $p \in M$ and let $v \in T_p M$. Let $\gamma: I \rightarrow M$ be a smooth curve such that $\dot{\gamma}(0) = v$. Then*

$$dF_p v = (F \circ \gamma)'(0).$$

Proof. By the assumption, the definition of the velocity of a curve, Proposition 3.7(2), and the definition of the differential, we get

$$dF_p v = dF_p \dot{\gamma}(0) = dF_p d\gamma_0 \frac{d}{dt} \Big|_0 = d(F \circ \gamma)_0 \frac{d}{dt} \Big|_0 = (F \circ \gamma)'(0). \quad \square$$

The tangent space can also be described using smooth curves. Let

$$\Gamma_p = \{ \gamma: J \rightarrow M : J \ni 0 \text{ open interval, } \gamma: J \rightarrow M \text{ smooth, } \gamma(0) = p \}.$$

Define $\gamma_1 \sim \gamma_2$ if and only if $\frac{d}{dt} f \circ \gamma_1(0) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma_2(0)$ for all $f \in C^\infty(M)$.

Propositio 3.14. *Let M be a smooth manifold and let $p \in M$. The map $[\gamma] \mapsto \dot{\gamma}(0)$ is a well-defined bijection from the quotient set $\Gamma_p / \sim$ to the tangent space $T_p M$.*

Proof. Exercise 3.7 $\square$

Exercises

3.1. Prove Lemma 3.2.

3.2. Prove parts (1) and (2) of Proposition 3.7.

3.3. Prove parts (3) and (4) of Proposition 3.7.

3.4. Show that the map $\hat{v}$ defined in Proposition 3.8 is a point derivation at the point p on the space $\mathfrak{F}(U)$.

3.5. The *spherical coordinates* of a point $x \in \mathbb{E}^3 \setminus \{0\}$ are determined by the expression

$$x = (r \cos \theta_1 \sin \theta_2, r \sin \theta_1 \sin \theta_2, r \cos \theta_2).$$

Let $p \in \mathbb{E}^3 - \{0\}$. Determine the expressions of the tangent vectors $\frac{\partial}{\partial r} \Big|_p$, $\frac{\partial}{\partial \theta_1} \Big|_p$ and $\frac{\partial}{\partial \theta_2} \Big|_p$ in the basis formed by $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p$, $\frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p$ and $\frac{\partial}{\partial x^3} \Big|_p$.

3.6. Let M_1 and M_2 be smooth manifolds and let $\pi_k: M_1 \times M_2 \rightarrow M_k$ be the projection maps $\pi_k(p_1, p_2) = p_k$, for $k \in \{1, 2\}$. Let $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$. Show that the map $d(\pi_1)_p \times d(\pi_2)_p: T_p(M_1 \times M_2) \rightarrow T_{p_1}(M_1) \times T_{p_2}(M_2)$,

$$d(\pi_1)_p \times d(\pi_2)_p(v) = (d(\pi_1)_p(v), d(\pi_2)_p(v)),$$

is a linear isomorphism.⁴

⁴Use the smooth structure on the product space defined in Example ???. What happens to the coordinate vectors?

3.7. Prove Proposition 3.14.

Let G be a smooth manifold and let there be a binary operation defined on the set G , which we denote like multiplication, such that G is a group and the maps $\mu: G \times G \rightarrow G$, $\mu(g, h) = gh$ and $\iota: G \rightarrow G$, $\iota(g) = g^{-1}$ are smooth. Then G is a *Lie group*.

3.8. Let G be a Lie group and let $e \in G$ be the identity element. Show that⁵

$$d\mu_{(e,e)}(v, w) = v + w$$

and

$$d\iota_e(v) = -v.$$

⁵First compute $d\mu_{(e,e)}(v, 0)$ for example using Propositions 3.12 and 3.13.

Chapter 4

Tangent Bundle and Vector Fields

Let $U \subset \mathbb{E}^n$ be an open set. A mapping $X: U \rightarrow \mathbb{E}^n$ is a *vector field* in the set U . Vector fields are important mathematical objects, especially because in applications many phenomena are modeled using differential equations and initial value problems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

A continuous or smooth vector field X determines at each point $p \in U$ a tangent vector $X(p) \in \mathbb{E}^n$, where $\mathbb{E}^n$ is thought of as the tangent space $T_p\mathbb{E}^n$. In this chapter, we define vector fields on a smooth manifold M , where to each point $p \in M$ a tangent vector $X(p) \in T_pM$ is associated. Now, the tangent vectors at different points lie in different vector spaces, which together form the manifold's tangent bundle, which is a smooth manifold.

4.1 Tangent Bundle

Let M be a smooth manifold. The *tangent bundle* of the manifold M is

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

equipped with the smooth manifold structure defined below. The (*base point*) *projection* of the tangent bundle TM is the mapping $\pi = \pi_M: TM \rightarrow M$, $\pi_M(v, p) = p$.

For an element (v, p) of the tangent bundle TM , we use the notation $v_p = (v, p)$, so that we think of $v_p \in T_pM \subset TM$.

Let (U, ϕ) be a smooth chart on the smooth n -manifold M and let $p \in U$. In Chapter ?? we noticed that the coordinate vectors $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$ form a basis for the tangent

space $T_p M = T_p U$. Thus, for every $(v, p) \in T_p U \subset TU \subset TM$ we have

$$v = \sum_{k=1}^n c^k(v) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \quad (4.1)$$

for some coefficients $c^1(v), c^2(v), \dots, c^n(v) \in \mathbb{R}$. Let $c: TU \rightarrow \mathbb{E}^n$ be the mapping whose components are $c^1(v), c^2(v), \dots, c^n(v)$. Let $\Phi_U: TU \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{E}^n$ be the mapping¹

$$\Phi_U(v, q) = (\phi(q), c(v)).$$

We choose a uniquely defined topology on the set TU for which the mapping Φ_U is a homeomorphism. Let

$$\mathcal{B} = \{A \subset TM : A \subset TU \text{ is open for some coordinate neighborhood } U \subset M\}.$$

Lemma 4.1. *The collection $\mathcal{B}$ is a basis for some topology on the set TM .*

Proof. Clearly TM is the union of the sets TU belonging to the collection $\mathcal{B}$, since the sets U cover the manifold M . Let $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ and let $(v, p) \in A_1 \cap A_2$. By the definition of the collection $\mathcal{B}$, there are chart neighborhoods U_1 and U_2 of the point p such that A_1 is open in TU_1 and A_2 is open in TU_2 .

The set $U_1 \cap U_2$ is open, so the space $T(U_1 \cap U_2)$ appears in the definition of the collection $\mathcal{B}$. The topological space $T(U_1 \cap U_2)$ is a subspace of the spaces TU_1 and TU_2 , so by the definition of the relative topology, the sets $A_1 \cap T(U_1 \cap U_2)$ and $A_2 \cap T(U_1 \cap U_2)$ are open in $T(U_1 \cap U_2)$. Thus

$$p \in A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 \cap T(U_1 \cap U_2) = (A_1 \cap T(U_1 \cap U_2)) \cap (A_2 \cap T(U_1 \cap U_2))$$

is open in the topological space $T(U_1 \cap U_2)$ as the intersection of two open sets. The claim follows from the basis lemma.² $\square$

We choose the topology on the set TM whose basis is $\mathcal{B}$.

Propositio 4.2. *TM is a topological manifold.*

Proof. By Lemma 4.1, TM is a topological space and by its construction it is locally Euclidean. By Proposition ??, the manifold M has a countable cover by coordinate neighborhoods U_k , $k \in \mathbb{N}$. The topology of the space TM was defined so that the sets $TU_k \subset TM$ are homeomorphic to an open set of Euclidean space, so each topological space TU_k has a countable basis $\mathcal{B}_k$. The countable collection $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_k$ is a countable basis for the topology of the space TM , so TM is N_2 (second-countable).

Let $(v, p), (w, q) \in TM$. If $p = q$ and $v \neq w$, then there is $k \in \mathbb{N}$ such that $(v, p), (w, p) \in TU_k$. Since TU_k is homeomorphic to an open set of Euclidean space, the points (v, p) and (w, p) have disjoint neighborhoods. If on the other hand $p \neq q$, then the points p and q have disjoint neighborhoods V_p and V_q on the manifold M . Then TV_p and TV_q are disjoint neighborhoods of the points (v, p) and (w, q) . $\square$

¹In this context, it might be logical for the alternative notation of the vector $v_p \in T_p M$ to be (p, v) instead of (v, p) as above.

²See [?, Lemma 13.5]. Munkres [?, §13] takes the conditions of the basis lemma as the definition of a basis for a topology.

Equip TM with the atlas $\{(TU, \Phi_U) : (U, \phi) \text{ is a smooth chart}\}$.

Propositio 4.3. *The tangent bundle of a smooth manifold is a smooth manifold. The base point projection is a smooth map.*

Proof. Let M be a smooth n -manifold. Let (TU, Φ) and (TV, Ψ) be charts of the tangent bundle TM , associated with the smooth charts (U, ϕ) and (V, ψ) on the manifold M . Then for every $(y, w) \in \Phi(TU) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ we have³

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(y, w) = (\psi \circ \phi^{-1}(y), D(\psi \circ \phi^{-1})(y) w), \quad (4.2)$$

so the chart transition is a smooth diffeomorphism. The first claim follows from Proposition 4.2.

In the smooth charts defined above, $\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}(y, w) = y$, so the base point projection π is smooth. $\square$

Esimerkki 4.4. If the manifold M has a global smooth chart, then TM is diffeomorphic to the product space $M \times \mathbb{E}^n$. In particular, $T\mathbb{E}^n$ is diffeomorphic to the space $\mathbb{E}^{2n}$. Not all tangent bundles are this simple: Using methods of algebraic topology, it can be shown that, for example, the tangent bundle of the manifold $\mathbb{S}^2$ is more complex. We do not have the means to show this in this course. In Exercise ??, we will show that the smooth manifolds $T\mathbb{S}^3$ and $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{E}^3$ are diffeomorphic.

4.2 (Global) Differential of a Smooth Map

In Chapter ?? we defined the pointwise differential $dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ of a smooth map $F: M \rightarrow N$ at each point $p \in M$. We now combine these maps into a map defined on the tangent bundle in a natural way.

The (global) differential of a smooth map $F: M \rightarrow N$ is the map $dF: TM \rightarrow TN$,

$$dF(v, p) = (dF_p v, F(p)).$$

Propositio 4.5. *The global differential of a smooth map is a smooth map.*

Proof. Let M be a smooth m -manifold and let N be a smooth n -manifold. Let (TU, Φ) and (TV, Ψ) be charts associated with the smooth charts (U, ϕ) and (V, ψ) on the manifold M . Then for every $(y, w) \in \Phi(TU) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ we have

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(y, w) = (\psi \circ F \circ \phi^{-1}(y), D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(y) w),$$

so the differential is smooth. $\square$

Propositio 4.6. (1) Let M_1, M_2 and M_3 be smooth manifolds and let $F_1: M_1 \rightarrow M_2$ and $F_2: M_2 \rightarrow M_3$ be smooth maps. Then $d(F_2 \circ F_1) = dF_2 \circ dF_1$.

(2) The differential of the identity map of a smooth manifold M is id_{TM} .

(3) If F is a smooth diffeomorphism, then dF is a smooth diffeomorphism and $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$.

Proof. Exercise 4.1. $\square$

³See equation (??).

4.3 Vector Fields

Let M be a smooth manifold. A (smooth) map $X: M \rightarrow TM$, for which $\pi_M \circ X = \text{id}_M$ holds, is a (smooth) *vector field* on the manifold M .

Let

$$\mathfrak{X}(M) = \{X: M \rightarrow TM : X \text{ is a smooth vector field}\}.$$

We use the notation

$$X_p = X(p).$$

This is compatible with the notation for coordinate vectors and coordinate vector fields.

Esimerkki 4.7. Let M be a smooth manifold and let (U, ϕ) be a smooth chart with components $x^1, x^2, \dots, x^n$. The *coordinate vector fields* $\frac{\partial}{\partial x^k}$ are smooth vector fields on the set U , since their representation in the natural chart Φ is

$$\Phi \circ \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \phi^{-1}(y) = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\phi^{-1}(y)}\right) = (y, \mathbf{e}_k),$$

from which it is easily seen that $\pi \circ \frac{\partial}{\partial x^k} = \text{id}$ and that the vector field is smooth.

In the set of vector fields $\mathfrak{X}(M)$ addition and multiplication by a scalar are defined pointwise: If $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ and $\lambda \in \mathbb{R}$, set

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad \text{and} \quad (\lambda X)_p = \lambda X_p,$$

where the addition of tangent vectors and multiplication by a real number are performed using the operations of the vector space $T_p M$ for all $p \in M$. A vector field can also be multiplied by a smooth function pointwise: If $X \in \mathfrak{X}(M)$ and $f \in C^\infty(M)$, set

$$(fX)_p = f(p)X_p \tag{4.3}$$

for all $p \in M$.

By equation (4.1), any vector field X on the set U can be expressed using the coordinate vector fields: There are functions $X^1, X^2, \dots, X^n: U \rightarrow \mathbb{R}$, for which

$$X(p) = \sum_{k=1}^n X^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4.4}$$

Propositio 4.8. Let M be a smooth manifold and let (U, ϕ) be a smooth chart. A vector field $X: M \rightarrow TM$ is smooth on the set U if and only if its coefficient functions in the representation (4.4) are smooth.

Proof. The representation of the vector field X in the natural coordinates (U, ϕ) and (TU, Φ) is

$$y \mapsto \left(y, \left(X^1 \circ \phi^{-1}(y), \dots, X^n \circ \phi^{-1}(y)\right)\right),$$

so $X|_U$ is smooth if and only if the coefficient functions $c^1, \dots, c^n$ are smooth. $\square$

Esimerkki 4.9. Let $\gamma: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\gamma(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$. The maps

$$\begin{aligned}\gamma_1^+ &= \text{pr}_1 \circ \gamma|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}, & \gamma_1^+(s) &= \cos s \\ \gamma_1^- &= \text{pr}_1 \circ \gamma|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})}, & \gamma_1^-(s) &= \cos s \\ \gamma_2^- &= \text{pr}_2 \circ \gamma|_{(-\pi, 0)}, & \gamma_2^-(s) &= \sin s \\ \gamma_2^+ &= \text{pr}_2 \circ \gamma|_{(0, \pi)}, & \gamma_2^+(s) &= \sin s\end{aligned}$$

are diffeomorphisms, so the maps

$$\theta_1^+ = \left(\gamma|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \quad \theta_2^+ = \left(\gamma|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})}\right)^{-1}, \quad \theta_2^- = \left(\gamma|_{(-\pi, 0)}\right)^{-1} \quad \text{and} \quad \theta_1^- = \left(\gamma|_{(0, \pi)}\right)^{-1}$$

are smooth chart maps, called *angle charts*.

The chart transitions of the angle charts are of the form $s \mapsto s + k 2\pi$ for some $k \in \mathbb{Z}$. If θ and $\tilde{\theta}$ are angle charts, then $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} = 1$, so $\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \theta}$ on the intersection sets of the angle coordinate neighborhoods. Since the angle charts cover the entire circle $\mathbb{S}^1$, we obtain the *angle coordinate vector field* $\frac{\partial}{\partial \theta}$ defined on the whole manifold $\mathbb{S}^1$, which has no zeros.

Propositio 4.10. The map $\Phi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{E}^1 \rightarrow T\mathbb{S}^1$, $\Phi(p, s) = s \frac{\partial}{\partial \theta}|_p$ is a smooth diffeomorphism.

Proof. Exercise 4.2. □

Propositio 4.11. Let M be a smooth manifold. Let $p \in M$ and let $v_p \in T_p M$. Then there exists $X \in \mathfrak{X}(M)$ such that $X_p = v_p$.

Proof. Exercise 4.4. □

4.4 On the Algebraic Structure

In this chapter we examine vector fields from a more algebraic perspective. In Chapter 2.2 we observed that the smooth real-valued functions on a smooth manifold form an algebra; in particular, they form a ring. We defined the multiplication of vector fields by functions in equation (4.3). The following definition links this operation to more general algebraic structures.

Let $(K, +, \cdot)$ be a commutative ring and let $(M, +)$ be a commutative group. Let $\mu: K \times M \rightarrow M$ be a map, $\mu(k, m) = km$, such that

- $k_2(k_1 m) = (k_2 k_1) m$ for all $k_1, k_2 \in K$ and $m \in M$,
- $1_K m = m$ for all $m \in M$
- $(k_1 + k_2) m = k_1 m + k_2 m$ for all $k_1, k_2 \in K$ and $m \in M$, and
- $k(m_1 + m_2) = km_1 + km_2$ for all $k \in K$ and $m_1, m_2 \in M$.

Then M is a K -module.

Esimerkki 4.12. (1) If K is a field and V is a K -vector space, then V is a K -module.
 (2) $\mathbb{Z}^2$ is a $\mathbb{Z}$ -module, when multiplication by an integer is defined in the natural way by setting $\mu(k, (n_1, n_2)) = (kn_1, kn_2)$.

Propositio 4.13. *The smooth vector fields of a smooth manifold M form a real vector space and a $C^\infty(M)$ -module.*

Proof. Exercise 4.5. □

Let $X: M \rightarrow TM$ be a vector field on a smooth manifold M and let $f \in C^\infty(M)$. Since $X_p \in \text{Der}_p(M)$ for each $p \in M$, X and f determine a function $Xf: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ by setting

$$(Xf)(p) = X_p f$$

for all $p \in M$. The following result shows that a smooth vector field determines a map from the set $C^\infty(M)$ to itself, and we obtain a characterization of smooth vector fields via this property.

Propositio 4.14. *Let M be a smooth manifold. Let $X: M \rightarrow TM$ be a vector field. Then $X \in \mathfrak{X}(M)$ if and only if $Xf \in C^\infty(M)$ for all $f \in C^\infty(M)$.*

Proof. Let $X \in \mathfrak{X}(M)$ and let $f \in C^\infty(M)$. Let (U, ϕ) be a smooth chart. Then

$$(Xf)(q) = \left(\sum_{k=1}^n X^k(q) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_q \right) f = \sum_{k=1}^n X^k(q) \frac{\partial f}{\partial x^k}(q),$$

so Xf is smooth as a finite sum of smooth functions.

Assume then that Xf is smooth for all $f \in C^\infty(M)$. Let (U, ϕ) be a smooth chart. Then

$$Xx^i = \left(\sum_{k=1}^n X^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) x^i = X^i.$$

Let $p \in U$. By Lemma 2.17, there is an open set $U \supset V \ni p$, and a function $\tilde{x}^i \in C^\infty(M)$, such that $x^i|_V = \tilde{x}^i|_V$. By assumption, $X\tilde{x}^i$ is smooth on the set V , so $X^i = Xx^i$ is smooth on V . Since this holds for all $p \in M$, we can conclude that $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

The map⁴ $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ determined by the vector field X satisfies the *Leibniz rule* pointwise because $X(q)$ is a point derivation at each $q \in M$: For all $f, g \in C^\infty(M)$ we have

$$X(fg)(q) = X_q(fg) = X_q f g(q) + f(q) X_q g = (Xf)(q)g(q) + f(q)(Xg)(q). \quad (4.5)$$

Similarly, the linearity of the map X follows from the linearity of the point derivations.

Let A be an associative $\mathbb{R}$ -algebra. A linear map $\mathfrak{d}: A \rightarrow A$ is a *derivation* if it satisfies the *Leibniz rule*

$$\mathfrak{d}(ab) = \mathfrak{d}(a)b + a\mathfrak{d}(b)$$

for all $a, b \in A$.

Lemma 4.15. (1) *If $\mathfrak{d}$ is a derivation of the algebra A , then $\mathfrak{d}(1) = 0$.*

(2) *If $\mathfrak{d}_1$ and $\mathfrak{d}_2$ are derivations of the algebra A , then $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_1$ is a derivation.*

⁴We denote the map by the same symbol as the vector field, for simplicity or obfuscation, depending on the viewpoint.

Proof. Exercise 4.6. □

Let $\text{Der}(M)$ be the set of derivations of the associative $\mathbb{R}$ -algebra $C^\infty(M)$.^a

^a $C^\infty(M)$ is an $\mathbb{R}$ -algebra by Proposition 2.5.

Let M be a smooth manifold. If $\mathfrak{d} \in \text{Der}(M)$ and $g \in C^\infty(M)$, then we define the map $f\mathfrak{d}: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ by setting

$$((g\mathfrak{d})f)(p) = g(p)\mathfrak{d}(f)(p)$$

for all $f \in C^\infty(M)$ and for all $p \in M$.

Lemma 4.16. *Let M be a smooth manifold. Then $\text{Der}(M)$ is a $C^\infty(M)$ -module.*

Proof. Exercise 4.7

Propositio 4.17. *Let M be a smooth manifold. Then $X \in \mathfrak{X}(M)$ if and only if $X \in \text{Der}(M)$.*

Proof. We checked above that a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ determines a derivation; see equation (4.5).

Let $\mathfrak{d} \in \text{Der}(M)$. Let $p \in M$. By the calculation done above, $\mathfrak{d}$ determines a point derivation X_p at the point p by setting $X_p(f) = (\mathfrak{d}f)(p)$ for all $f \in C^\infty(M)$. The vector field X thus determined is smooth, because $Xf = \mathfrak{d}f \in C^\infty(M)$ for all $f \in C^\infty(M)$. □

4.5 Integral Curves of a Vector Field

Let X be a smooth vector field on a smooth manifold M . A smooth curve $\gamma: I \rightarrow M$ is an *integral curve* of the vector field X if

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

for all $t \in I$.

Let (U, ϕ) be a smooth chart on the manifold M . Let $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ be the coordinates of the curve γ in the chart ϕ . By equation (??), the equation defining the integral curve becomes

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^i} = \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) = \sum_{k=1}^n X^k(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Componentwise, we obtain the differential equation(s) in the open set $\phi(U)$

$$\frac{d}{dt}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) = (X^1(\gamma(t)), \dots, X^n(\gamma(t))).$$

Lause 4.18 (ODE Theorem). *Let $D \subset \mathbb{E}^n$ be open. Let $f: D \rightarrow \mathbb{E}^n$ be a smooth vector field. For every $a \in \mathbb{R}$ and $b \in D$ there exists $\delta > 0$ such that the initial value problem*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (4.6)$$

has a unique solution defined on the interval $(a - \delta, a + \delta)$.

Proof. See [?, Theorem 5.2] or [?, Appendix D]. □

Seuraus 4.19. *Let M be a smooth manifold and let $p \in M$. Every smooth vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ has an integral curve passing through the point p .* □

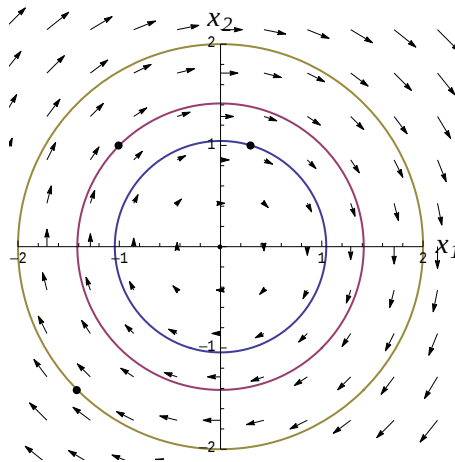


Figure 4.1 — Integral curves of the plane vector field $V(x) = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$. By Example ??, the expression of the vector field V in polar coordinates is $-\frac{\partial}{\partial \theta}$.

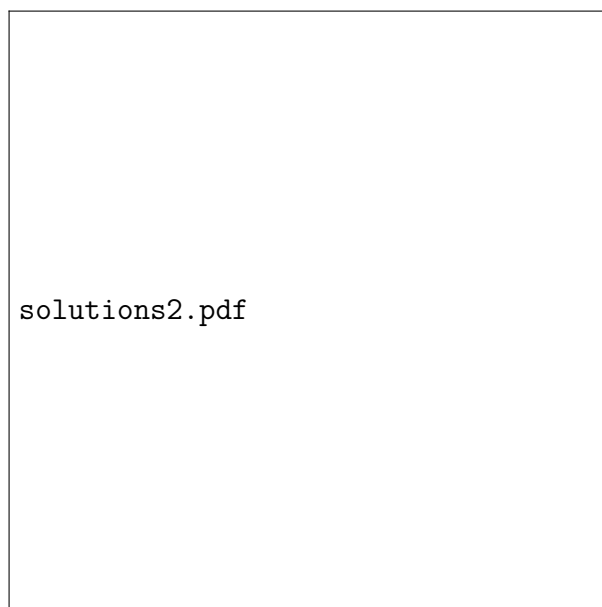


Figure 4.2 — Integral curves of the plane vector field $\frac{r(r^2-1)}{2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta}$, given in polar coordinates.

Exercises

4.1. Prove Proposition 4.6.

4.2. Prove Proposition 4.10.

4.3. Let M be a smooth n -manifold. Let $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ be smooth vector fields such that the tangent vectors $X_1(p), X_2(p), \dots, X_n(p) \in T_p M$ are linearly independent for all $p \in M$. Show that there is a smooth diffeomorphism $F: M \times \mathbb{E}^n \rightarrow TM$.

4.4. Prove Proposition 4.11.⁵

4.5. Prove Proposition 4.13.

4.6. Prove Lemma 4.15.

4.7. Prove Lemma 4.16.

Let M be a smooth manifold. Let $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Define the map $XY: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ by setting

$$(XY)f = X(Yf)$$

for all $f \in C^\infty(M)$.

4.8. Give an example of vector fields $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ for which XY is not a vector field.

Let M be a smooth manifold. The *Lie bracket*^a $[X, Y]$ of vector fields $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ is defined by setting

$$[X, Y]h = XYh - YXh$$

for all $h \in C^\infty(M)$.

^a

4.9. Let M be a smooth manifold. Let $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Show that $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

4.10. Let M be a smooth manifold. Let $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Show that

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

4.11. Let M be a smooth manifold. Give an example of a manifold M and vector fields $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ for which $XY \notin \mathfrak{X}(M)$. Let $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ and let $f, g \in C^\infty(M)$. Show that

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

4.12. Let $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3)$ be the vector fields

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{x^1}{2} \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Determine the Lie brackets $[X, Y]$, $[X, Z]$ and $[Y, Z]$.

⁵Note that the vector field in the claim is defined and smooth on the whole manifold M .

Chapter 5

Submanifolds

In this chapter, we define the concept of a smooth embedded submanifold of a smooth manifold, which generalizes, for example, the linear and affine subspaces of a vector space, as well as the case $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$, which was previously examined as a central example in the course, to abstract manifolds.

5.1 Embedded Submanifold

Let M be a smooth n -manifold and let $0 \leq k \leq n$. A subset $S \subset M$ is an *embedded k -submanifold*,^a if for every $p \in S$ there is a smooth chart (U, ϕ) of the manifold M that contains the point p and for which

$$\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap \{x \in \mathbb{E}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Then $\text{codim } S = n - k$ is the *codimension* of the submanifold S and (U, ϕ) is a chart *adapted* to the submanifold S or a *slice chart*.

The submanifold S is a *hypersurface*, if $\text{codim } S = 1$.

^aSometimes it is also called a *regular* submanifold.

Esimerkki 5.1. (1) The affine k -planes of Euclidean space are k -dimensional submanifolds.

(2) If M and N are smooth manifolds and $q \in N$, then $M \times \{q\}$ is an embedded submanifold of the manifold $M \times N$.¹ Let $(p, q) \in M \times \{q\} \subset M \times N$. If $\phi: U \rightarrow \mathbb{E}^m$ is a smooth chart on the manifold M containing the point p and $\psi: V \rightarrow \mathbb{E}^n$ is a smooth chart on the manifold N centered at q , then $\phi \times \psi: U \times V \rightarrow \mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^n$ is a smooth chart on the product manifold $M \times N$. Furthermore,

$$\begin{aligned} \phi \times \psi((U \times V) \cap M \times \{q\}) &= \phi(U) \times \{\psi(q)\} = \phi(U) \times \{0\} \\ &= \phi \times \psi(U \times V) \cap \{x \in \mathbb{E}^{m+n} : x^{m+1} = \dots = x^{m+n} = 0\}, \end{aligned}$$

¹The smooth structure of the product manifold was defined in Example 1.15(2).

so $\phi \times \psi$ is a slice chart.

(3) Let $U = \{x \in \mathbb{E}^2 : x^2 > 0\}$. The mapping $\phi: U \rightarrow \phi(U) = \{y \in \mathbb{E}^3 : y^2 > (y^1)^2 - 1\}$, $\phi(x) = (x^1, \|x\|^2 - 1)$, is a slice chart adapted to the submanifold $\mathbb{S}^1$ of the Euclidean plane.

(4) Polar coordinates² Φ_0^{-1} map the set $U = \mathbb{E}^2 - [\text{open}] - \infty 0 \times \{0\}$ onto the set $[\text{open}] 0 \infty \times [\text{open}] - \pi \pi$ such that $\Phi_0^{-1}(U \cap \mathbb{S}^1) = \{1\} \times [\text{open}] - \pi \pi$. Let $h: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, $h(x) = (x^2, 1 - x^1)$. Then $h \circ \Phi_0^{-1}$ is a slice chart as in the definition.

Similarly, spherical coordinates³ $x \mapsto (r, \phi, \theta)$ determine a slice chart adapted to the submanifold $\mathbb{S}^2$ of the smooth manifold $\mathbb{E}^3$ in their domain of definition.

Let $\text{Pr}_k^n: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^k$,

$$\text{Pr}_k^n(x) = \sum_{i=1}^k x^i \mathbf{e}_i$$

be the projection map corresponding to the orthogonal projection onto the subspace $\mathbb{E}^k \times \{0\} \subset \mathbb{E}^n$.

Propositio 5.2. *If S is a k -dimensional embedded submanifold of a smooth n -manifold M , then it is a k -dimensional smooth manifold when equipped with the subspace topology and the atlas defined by the adapted charts*

$$\{(U \cap S, \phi_S) : (U, \phi) \text{ is an adapted chart}\},$$

where $\phi_S = \text{Pr}_k^n \circ \phi|_{U \cap S}$.

The inclusion map $i: S \rightarrow M$ is a smooth injection.

Proof. Exercise 6.1. □

Propositio 5.3. *Let S be a smooth embedded submanifold of a smooth manifold M .*

(1) *If $G: M \rightarrow N$ is a smooth map, then $G|_S$ is smooth.*

(2) *Let $F: N \rightarrow M$ be a smooth map such that $F(N) \subset S$. Then $F: N \rightarrow S$ is smooth.*

Proof. (1) $G|_S = G \circ i$, so G_S is smooth as a composition of smooth maps.

(2) Let $p \in N$ and let (U, ϕ) be a smooth chart of the smooth manifold N that contains the point p . Let $S \subset M$ be a k -dimensional submanifold and let $\psi: V \rightarrow \mathbb{E}^m$ be a smooth slice chart of the manifold M that is adapted to the submanifold S and contains the point $F(p)$. Then the map $\psi_S \circ F \circ \phi^{-1} = \text{Pr}_k^m \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1}$ is smooth as a composition of smooth maps, so $F: N \rightarrow S$ is smooth. □

5.2 Regular Level Sets

In this chapter, we observe that the level surfaces of smooth functions and smooth maps yield embedded submanifolds of smooth manifolds, similarly to the case of Euclidean space, provided we consider regular values.

²See Example 3.11.

³See Exercise 3.5.

Lause 5.4 (Inverse Function Theorem). *Let M and N be smooth n -manifolds. Let $F: M \rightarrow N$ be a smooth map and let $p \in M$. If $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ is invertible, then there is an open neighborhood $W \ni p$ of the point p such that $F: W \rightarrow F(W)$ is a smooth diffeomorphism.*

Proof. Let (U, ϕ) be a smooth chart centered at p and let (V, ψ) be a smooth chart centered at $F(p)$ such that $F(U) \subset V$. The map $\psi \circ F \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is smooth and $d(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}$ is invertible by Proposition 3.7, since the maps ϕ and ψ are diffeomorphisms. By the inverse function theorem of differential calculus,⁴ there is an open neighborhood $U' \subset \phi(U)$ of the point $\phi(p)$ such that $\psi \circ F \circ \phi^{-1}|_{U'}: U' \rightarrow \psi \circ F \circ \phi^{-1}(U')$ is a smooth diffeomorphism. Then $W = \phi^{-1}(U') \subset U$ is an open neighborhood of the point p and $F|_{\phi^{-1}(U')}: W \rightarrow F(W)$ is a diffeomorphism. $\square$

Let M and N be smooth manifolds and let $F: M \rightarrow N$ be a smooth map and let $p \in M$. If $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ is surjective, then p is a *regular point* of the map F . Otherwise p is a *critical point*.

Esimerkki 5.5. A point $p \in M$ is a critical point of a real-valued smooth function $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ if and only if df_p is the zero map.

Let M and N be smooth manifolds. Let $F \in C^\infty(M, N)$. If $c \in F(M)$ and dF_p is surjective for every $p \in F^{-1}(c)$, then c is a *regular value* and $F^{-1}(c)$ is a *regular level set*.

Lause 5.6. *Let M be a smooth manifold. Let $f \in C^\infty(M)$ and let $c \in f(M)$ be a regular value. Then $f^{-1}(c)$ is an embedded hypersurface.*

Proof. Let M be a smooth n -manifold. By considering the function $f - c$ we may assume that $c = 0$. Let $S = f^{-1}(0)$ and let $p \in S$. Let (U, ϕ) be a chart centered at p . Since 0 is a regular value, by equation (3.2) there is $1 \leq k \leq n$ such that $\frac{\partial}{\partial x^k}|_p f \neq 0$. By reordering the chart components we may assume that $k = 1$.

Let $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(q) = (f(q), x^2(q), \dots, x^n(q))$. Then

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}|_p f & \frac{\partial}{\partial x^2}|_p f & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}|_p f \\ \frac{\partial}{\partial x^1}|_p x^2 & \frac{\partial}{\partial x^2}|_p x^2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}|_p x^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^1}|_p x^n & \frac{\partial}{\partial x^2}|_p x^n & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}|_p x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}|_p f & \frac{\partial}{\partial x^2}|_p f & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}|_p f \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

By assumption, the Jacobian determinant of the map $F \circ \phi^{-1}$

$$D(F \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = \frac{\partial}{\partial x^1}|_{\phi(p)} f \circ \phi^{-1}$$

⁴The continuously differentiable case is treated in the course Vector Analysis 2, see also [?, Chapter 4.5]. The smooth version is proved in the appendix of Lee's book [?, Thm.C.34].

at the point $\phi(p) \in \phi(U) \subset \mathbb{E}^n$ is nonzero, so dF_p is invertible. By the inverse function theorem,⁵ there is an open neighborhood $V \subset M$ of the point p such that $(V, F|_V)$ is a smooth chart. This is the desired chart, since $f(q) = 0$ for all $q \in S \cap V$.⁶ $\square$

Esimerkki 5.7. (1) Let $f: \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{E}^1$ be a smooth function. A number $c \in f(\mathbb{E})$ is a regular value if $\nabla f(x) \neq 0$ for all $x \in f^{-1}(c)$.

(2) The map $r: \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{E}^1$, $r(x) = \|x\|^2$ is smooth and $\nabla r(x) = 2x$, so $\mathbb{S}^n = r^{-1}(1)$ is a smooth submanifold.

A more general result, which gives submanifolds of higher codimension, can be proved in a similar way.

Lause 5.8. *Let M and N be smooth manifolds. Let $F: M \rightarrow N$ be smooth and let $c \in F(M)$ be a regular value. Then $F^{-1}(c)$ is an embedded submanifold.*

Proof. See [?, Cor. 5.14]. $\square$

5.3 Immersion and Embedding

Let S and M be smooth manifolds. A smooth map $F: S \rightarrow M$ is a *smooth immersion*, if dF_p is injective for all $p \in S$.

If F is a smooth immersion and a topological embedding,^a then it is a *smooth embedding*.

^aA map is a topological embedding if it is a homeomorphism onto its image.

Propositio 5.9. *Let $S \subset M$ be a smooth submanifold and let $i: S \rightarrow M$ be the inclusion map $i(p) = p$. Then i is a smooth embedding.*

Proof. By the definition of a submanifold, the inclusion map is a topological embedding. Furthermore, using a slice chart one easily sees that di_p is injective. $\square$

Propositio 5.10. *Let S be a compact smooth manifold and let $F: S \rightarrow M$ be an injective smooth immersion. Then F is a smooth embedding.*

Proof. The map F is a continuous bijection onto the set $F(S)$, which is a Hausdorff space with the subspace topology. Thus $F: S \rightarrow F(S)$ is a homeomorphism,⁷ so F is a topological embedding. $\square$

Esimerkki 5.11. In Exercise 2.6 it was shown that the quotient map $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, $\pi(x) = [x]$, is a smooth local diffeomorphism, so $d\pi_p$ is invertible for every $p \in \mathbb{S}^n$. In particular, $d\pi_p$ is injective, so π is a smooth immersion.

Lause 5.12 (Immersion Theorem). *Let $F: S \rightarrow M$ be a smooth immersion and let $p \in S$. Then there is a smooth chart (U, ϕ) of the manifold S centered at p and a smooth chart (V, ψ) of the manifold M centered at $F(p)$ such that $\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x) = (x, 0)$ for all $x \in \phi(U)$.*

⁵Theorem 6.4.

⁶According to the definition, the last coordinate should be zero and not the first, but the order naturally does not matter.

⁷See [?, Theorem 11.7], [?, Thm. 26.6]

Proof. The claim is proved using the inverse function theorem⁸ in the same way as Theorem 6.6, see for example [?, Chapter 2.6.2], where a differentiable version of the theorem is proved. $\square$

Laue 5.13 (Embedding Theorem). *Let $F: S \rightarrow M$ be a smooth embedding. Then $F(S)$ is a smooth submanifold of the manifold M .*

Proof. Let $\dim S = k$ and $\dim M = m$. Let $p \in S$. Choose neighborhoods $U \ni p$ and $V \ni F(p)$ and charts as in the Immersion Theorem such that $F(U) \subset V$ and

$$\psi(F(U) \cap V) = \{x \in \mathbb{E}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\} \cap \psi(V).$$

Since F is an embedding, $F(U)$ is open in the space $F(S)$. By the definition of the subspace topology, $F(U) = F(S) \cap W$ for some open $W \subset M$. Thus

$$(V \cap W) \cap F(S) = V \cap F(U) = F(U),$$

so in the neighborhood $W \cap V \subset V$ of the point $F(p)$ we have

$$\psi(F(S) \cap V \cap W) = \{x \in \mathbb{E}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\} \cap \psi(V \cap W).$$

Thus $F(S)$ is an embedded submanifold. $\square$

Esimerkki 5.14. Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and let $\gamma_\alpha: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$\gamma_\alpha(t) = (t, \alpha t) + \mathbb{Z}^2.$$

The map γ_α is a smooth immersion, since it is the composition of the smooth embedding $t \mapsto (t, \alpha t)$ and the smooth map $x \mapsto x + \mathbb{Z}^2$.

If $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, then $\gamma_\alpha(t + q) = \gamma_\alpha(t) + (q, p)$ for all $t \in \mathbb{E}^1$. Thus γ_α defines a smooth map from the compact quotient manifold $\mathbb{E}^1/q\mathbb{Z}$, $t + q\mathbb{Z} \mapsto \gamma_\alpha(t)$, which has the same image as the map γ_α . By Proposition 6.10, $\gamma_\alpha(\mathbb{E}^1)$ is an embedded submanifold.

If $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, then by Kronecker's approximation theorem⁹ $\gamma_\alpha(\mathbb{E}^1)$ is a dense subset of the torus $\mathbb{T}^2$. Thus it is not a submanifold.

Let M and N be smooth manifolds and let $F: M \rightarrow N$ be a smooth map. Then

$$\Gamma(f) = \{(x, F(x)) : x \in M\}$$

is the *graph* of the map F .

Propositio 5.15. *Let M and N be smooth manifolds and let $F: M \rightarrow N$ be a smooth map. Then the graph of the map F is a smooth manifold.*

Proof. Let $\tilde{F}: M \rightarrow M \times N$, $\tilde{F}(x) = (x, F(x))$. Then $\Gamma(F) = \tilde{F}(M)$. The map $\tilde{F}$ is clearly injective. The restriction of the projection map $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ to the graph $\Gamma(F)$ is the inverse of the map $\tilde{F}: M \rightarrow \Gamma(F)$, which is continuous as the restriction of a continuous map. Thus $\tilde{F}$ is a homeomorphism onto its image.

The map $d\tilde{F}_p$ is injective for every $p \in M$, since from the equation $\pi_M \circ \tilde{F} = \text{id}_M$ it follows by Proposition 3.7(2) that $\text{id}_{T_p M} = d(\pi_M)_{\tilde{F}(p)} d\tilde{F}_p$. Thus $\tilde{F}$ is a smooth embedding, so $\Gamma(F)$ is an embedded submanifold by Theorem 6.13. $\square$

⁸Theorem 6.4.

⁹See for example [?, Chapter XXIII].

Seuraavan tuloksen mukaan kaikki sileät monistot ovat itse asiassa sileästi diffeomorfisia jonkin euklidisen avaruuden sileän alimoniston kanssa.

Lause 5.16 (Whitney's Embedding Theorem). *Every n -manifold has a smooth embedding into Euclidean space $\mathbb{E}^{2n+1}$.*

Proof. See [?, Theorem 6.15]. □

Esimerkki 5.17. (1) The torus $\mathbb{T}^n$ is by definition an abstract smooth manifold, whose definition does not provide an embedding as a submanifold of any Euclidean space. In Example 1.22 we noted that the map $\tilde{f}: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^2$, $\tilde{f}(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ determines a homeomorphism $f: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. The differential $d\tilde{f}_{\tilde{p}}$ of the map $\tilde{f}$ is injective for every $\tilde{p} \in \mathbb{E}^1$, since in coordinates its matrix is $\begin{pmatrix} -\sin 2\pi t \\ \cos 2\pi t \end{pmatrix} \neq 0$ for all t . Furthermore, the quotient map $\pi_{\sim}: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ is a local diffeomorphism, since it is the inverse of the chart maps of the 1-torus when restricted to short intervals. Let $p \in \mathbb{T}^1$, let (U, ϕ) be a chart containing the point p such that $\pi_{\sim} \circ \phi = \text{id}$. Thus $d\tilde{f}_p = d\tilde{f}_{\phi(p)} d\phi_p$ is injective, so f is an embedding.

In the general case, let $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{E}^{2n} = (\mathbb{E}^2)^n$,

$$F(x + \mathbb{Z}^n) = (f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

It is easy to check that dF_p is injective for all $p \in \mathbb{T}^n$, so F is an immersion. The torus $\mathbb{T}^n$ is compact, since $\mathbb{T}^n = \pi_{\sim}([0, 1]^n)$. The map F is clearly a smooth injection, so by Proposition 6.10 it is an embedding. In particular, we thus obtain a smooth embedding of the 2-torus into space $\mathbb{E}^4$.

It is well-known that the torus can be embedded into space $\mathbb{E}^3$. The map $G: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$, defined by the map $\tilde{G}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$,

$$\tilde{G}(x) = ((2 + \cos 2\pi x_1) \cos 2\pi x_2, (2 + \cos 2\pi x_1) \sin 2\pi x_2, \sin 2\pi x_1) \quad (5.1)$$

is a smooth embedding.¹⁰

(2) Projective space $\mathbb{P}^n$ is an abstract smooth manifold, whose definition does not provide an embedding as a submanifold of any Euclidean space. By Whitney's embedding theorem, it can be embedded into space $\mathbb{E}^{2n+1}$. In Exercise 6.6 we show that $\mathbb{P}^2$ can be embedded into space $\mathbb{E}^4$ as an embedded submanifold. The projective plane cannot be embedded into space $\mathbb{E}^3$,¹¹ but there are several immersions $F: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$. The map f_3 in Exercise 1.12 is an immersion.¹² Its image $f_3(\mathbb{P}^2)$ is the *Boy's surface*.

¹⁰Exercise 6.5

¹¹See for example [?, Thm. 4.7].

¹²Exercise 6.7.

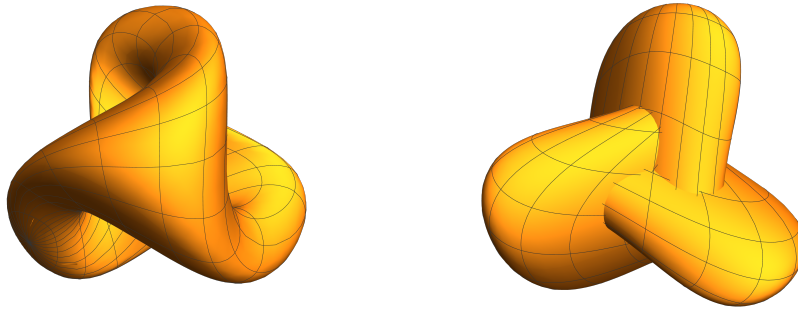


Figure 5.1 — Boy's surface from two different directions.

5.4 Tangent Space of a Submanifold

It is natural to think of the tangent space of a smooth submanifold $S \subset M$ at a point p as a subspace of the tangent space $T_p M$ of the ambient manifold M . In this identification, the space $T_p S$ is identified with the image of the differential $di_p: T_p S \rightarrow T_p M$ of the inclusion map $i: S \rightarrow M$: If $f \in C^\infty(M)$ and $v \in T_p S$, then

$$di_p v f = v(f \circ i) = v(f|_S). \quad (5.2)$$

The differential di_p of the inclusion map is a linear map, so we think of the subspace $T_p S$ as a linear subspace of the vector space $T_p M$.

Propositio 5.18. *Let S be a smooth submanifold of a smooth manifold M . The map $di: TS \rightarrow TM$ is a smooth embedding. In particular, TS is a smooth submanifold of the smooth manifold TM .*

Proof. Let S be a k -manifold and let M be an n -manifold, $k \leq n$. In slice coordinates $di_p(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ for all $1 \leq i \leq k$. Thus in the coordinates corresponding to a slice chart of the tangent bundle TM , di corresponds to the map $(x, y) \mapsto ((x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0), (y^1, \dots, y^k, 0, \dots, 0))$, so di is smooth. It is clearly injective and a topological embedding as the inclusion of a linear subspace part in Euclidean space. $\square$

Propositio 5.19. *Let S be a smooth submanifold of a smooth manifold M . Let $p \in S$ and let $v \in T_p M$. Then $v \in T_p S$, if and only if there is a smooth curve $\gamma: I \rightarrow M$, such that $\dot{\gamma}(0) = v$ and $\gamma(t) \in S$ for all $t \in I$, for some interval $I \subset \mathbb{R}^1$ containing the point 0.*

Proof. Exercise 6.4. $\square$

Esimerkki 5.20. Let $x_0 \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ and let $a \in x_0^\perp$. Let $\gamma_a: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$,

$$\gamma_a(t) = x_0 \cos(\|a\|t) + \frac{a}{\|a\|} \sin(\|a\|t).$$

Then $\gamma_a(t) \in \mathbb{S}^n$ for all $t \in \mathbb{R}^1$ and by equation (3.5)

$$\dot{\gamma}_a(0) = \sum_{i=1}^{n+1} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0}.$$

Thus

$$T_{x_0}\mathbb{S}^n = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} a^k \frac{\partial}{\partial x^k} : a \in x_0^\perp \right\} \subset T_{x_0}\mathbb{E}^{n+1}.$$

This corresponds to the familiar result from differential calculus, where $T\mathbb{S}^n$ is identified with the space $x_0^\perp$.

The following result gives a slightly different way to recognize tangent vectors of a submanifold.

Propositio 5.21. *Let S be a smooth submanifold of a smooth manifold M . Let $p \in S$. Let $v \in T_p M$. Then $v \in T_p S$, if and only if $vf = 0$ for all $f \in C^\infty(M)$ such that $f|_S = 0$.*

Proof. If $f|_S = 0$ and $v \in T_p S$, then $vf = 0$ by equation (6.2).

Assume then that $v \in T_p M$ and $vf = 0$ for all $f \in C^\infty(M)$ such that $f|_S = 0$. Let $k = \dim S < \dim M = n$. In slice coordinates

$$T_p S = di_p(T_p S) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right\rangle.$$

Let $v \in T_p M$. Then $v = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$. Let $k+1 \leq j \leq n$. Then $x^k(q) = 0$ for all $q \in S \cap V$, so

$$0 = vx^j = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial x^j}{\partial x^k} \Big|_p = v^j.$$

Thus $v \in T_p S$. □

When considering maps between submanifolds of Euclidean spaces, the map can often be thought of as the restriction of a map of the ambient space. In that case, the differential can be examined using the derivative matrix, i.e., the Jacobian matrix. In particular, if the differential of the extended map is injective at some point of the submanifold, then the restriction of the differential to the tangent space of the submanifold is also injective.

Let $1 \leq m < n$ be natural numbers. A linear map $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ is injective if the *rank* of the corresponding $n \times m$ matrix¹³ A is m . The rank of the matrix A is m if its rows are linearly independent, which is equivalent to the matrix A having m linearly independent rows. The rank of the matrix A is thus m if it has a nonzero $m \times m$ subdeterminant. See for example [?, V§3, VI§9].

Esimerkki 5.22. Let $W: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $W(x) = ((x^1 x^2, x^1, (x^2)^2)$. The derivative matrix of the map W is

$$\begin{pmatrix} x^2 & x^1 \\ 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

If $x^2 \neq 0$, then the columns are linearly independent, for example because the determinant of the 2×2 matrix formed by the second and third rows is $x^2 \neq 0$. If $x^2 = 0$ and $x^1 \neq 0$ the same conclusion is reached by considering the 2×2 matrix formed by the first and second rows. If $x = 0$ then the second column is the zero vector. Thus $W|_{\mathbb{E}^3 - \{0\}}$ is a smooth immersion but the image of the linear map dW_0 is 1-dimensional. The image of the map W is the *Whitney umbrella*.

¹³Such a matrix has n rows and m columns.

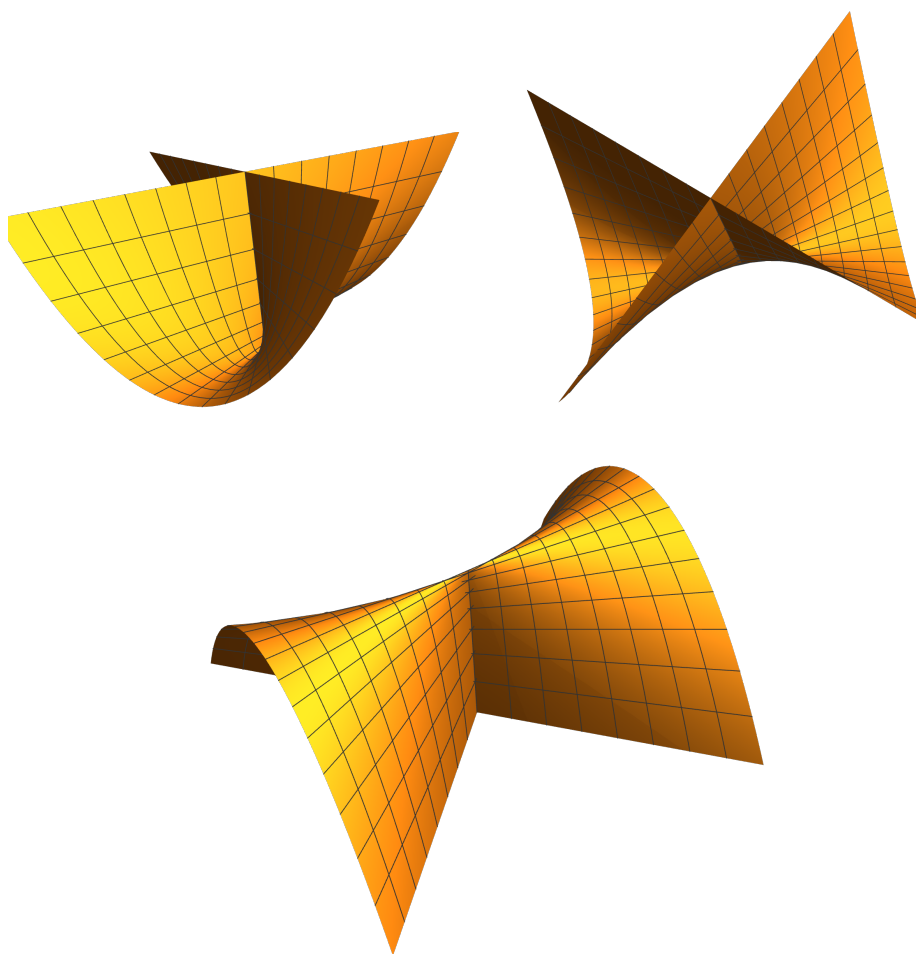


Figure 5.2 — The Whitney umbrella from three different directions.

Exercises

5.1. Prove Proposition 6.2.

5.2. Let $\tilde{f}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^1$, $\tilde{f}(y) = y_3$ for all $y \in \mathbb{E}^3$ in the standard coordinates of Euclidean space. Show that $f = \tilde{f}|_{\mathbb{S}^2}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$ is a smooth function. Determine the critical points of the map f .

5.3. Let M be a smooth manifold. Let $f: M \rightarrow \mathbb{E}^1$ be a smooth function that has a local maximum at a point $p \in M$. Show that p is a critical point of the function f .¹⁴

5.4. Prove Proposition 6.19.

5.5. Show that the map $\tilde{G}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$,

$$\tilde{G}(x) = ((2 + \cos 2\pi x_1) \cos 2\pi x_2, (2 + \cos 2\pi x_1) \sin 2\pi x_2, \sin 2\pi x_1)$$

defines a smooth embedding of the torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ into the smooth manifold $\mathbb{E}^3$.

¹⁴Results from analysis and differential calculus may be used.

5.6. Show that the map $\nu: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{E}^4$,

$$\nu([x]) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$$

is a smooth embedding.¹⁵

5.7. Show that the map f_3 in Exercise 1.12 is an immersion.

5.8. Show that the map $\nu: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$,

$$\nu([x]) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)$$

is a smooth map but is not an immersion. Show that there is a finite set $P \subset \mathbb{P}^2$ such that the restriction of the map ν to the set $\mathbb{P}^2 - P$ is an immersion.¹⁶

5.9. Let $\tilde{\nu}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^6$,

$$\tilde{\nu}(x) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2}x_2x_3, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_1x_2).$$

(1) Show that $\tilde{\nu}(\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{S}^5$.

(2) Show that $\tilde{\nu}|_{\mathbb{S}^2}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ is a smooth immersion.

(3) Show that the map $\nu: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$,

$$\nu([x]) = [x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : \sqrt{2}x_2x_3 : \sqrt{2}x_1x_3 : \sqrt{2}x_1x_2]$$

is a smooth embedding.

5.10. Let X_1, X_2, X_3 be vector fields on the manifold $\mathbb{E}^4$,

$$\begin{aligned} X_1(x) &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^4}, \\ X_2(x) &= -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^4 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^4}, \\ X_3(x) &= -x^4 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

(1) Show that X_1, X_2, X_3 define vector fields on the submanifold $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$.

(2) Show that $X_1(p), X_2(p), X_3(p)$ are linearly independent for all $p \in \mathbb{S}^3$.

(3) Show that $T\mathbb{S}^3$ is diffeomorphic to the product manifold $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{E}^3$.

¹⁵Exercise 1.13

¹⁶See the cover image.

Part II

Differentiaaligeometriaa monistoilla

Chapter 6

Kotangenttikimppu

Tässä luvussa määrittelemme sileän moniston kotangenttikimppun, joka on moniston tangenttiavaruuksien duaalien erillinen yhdiste. Tangenttikimppun tapaan myös kotangenttikimppu on sileä monisto. Luvun aluksi tarkastelemme vektoriavaruuksien ja erityisesti tangenttiavaruuksien duaaleja.

6.1 Vektoriavaruuden duaali ja duaalikuvaus

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Lineaarikuvaus $\omega: V \rightarrow \mathbb{R}$ on *lineaarimuoto* eli *lineaarinen 1-muoto* eli *kovektori*. Vektoriavaruuden V (*algebrallinen*) *duaali* on

$$V^* = \{\omega: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ kovektori}\}.$$

Lineaarialgebrasta tiedämme, että duaali on vektoriavaruus, kun se varustetaan tavanomaisilla funktioiden yhteenlaskulla ja vakiolla kertomisella.

Lemma 6.1. *Olkoon $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektoriavaruuden V kanta.*

- (1) *Jos $v = \sum_{i=1}^n a^i v_i$, niin $\omega(v) = \sum_{i=1}^n a^i \omega(v_i)$.*
- (2) *Jokainen vektori $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ määrää lineaarimuodon $\omega_b \in V^*$, kun jokaiselle $v = \sum_{i=1}^n a^i v_i$ asetetaan $\omega_b(v) = \sum_{i=1}^n a^i b_i$.*
- (3) $\dim V^* = \dim V = n$.

Proof. Harjoitustehtävä 7.1. □

Lemman 7.1 nojalla lineaarimuoto $\omega \in V^*$ määräytyy yksikäsitteisesti arvoista $\omega(v_i)$, $1 \leq i \leq n$, kun $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ on vektoriavaruuden V kanta.

Propositio 6.2. *Olkoon $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Olkoot $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ siten, että*

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j, \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}.$$

Tällöin $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ on duaaliavaruuden V^ kanta.*

Proof. Lemman 7.1 nojalla väitteen ehto määrittelee lineaarimuodot $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ yksikäsitteisesti. Olkoon $\omega \in V^*$. Jokaiselle $v = \sum_{i=1}^n v^i E_i \in V$ pätee lineaarisuuden ja kuvauksen ε^j määritelmän nojalla

$$\varepsilon^i(v) = \sum_{j=1}^n v^j \varepsilon^i E_j = \sum_{j=1}^n v^j \delta_j^i = v^i$$

kaikille $1 \leq i, j \leq n$. Siis

$$\omega v = \omega \left(\sum_{i=1}^n v^i E_i \right) = \sum_{i=1}^n v^i \omega(E_i) = \sum_{i=1}^n \omega(E_i) \varepsilon^i(v) = \left(\sum_{i=1}^n \omega(E_i) \varepsilon^i \right)(v).$$

Siis $\omega = \sum_{i=1}^n \omega(E_i) \varepsilon^i \in \langle \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \rangle$ kaikille $\omega \in V^*$. Lemman 7.1(3) nojalla $\dim V^* = n$, joten väite seuraa tästä. $\square$

Olkoon $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Olkoot $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ siten, että

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j, \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}.$$

Tällöin $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ on kannalle $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ *duaalin* kanta.

Esimerkki 6.3. (1) Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikannalle $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ duaalin kanta $(\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n)$ on *duaaliavaruuden* $(\mathbb{R}^n)^*$ *standardikanta*.

(2) Olkoon $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Jokainen $v \in V$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa

$$v = \sum_{i=1}^n v^i E_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i(v) E_i.$$

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja olkoon $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvauks. Kuvaus $L^*: W^* \rightarrow V^*$,

$$L^*(\omega) = \omega \circ L$$

on kuvauksen L *duaalikuvauks* eli *transpoosi*.

Lemma 6.4. (1) Lineaarikuvauksen duaalikuvauks on lineaarikuvauks.

(2) Jos $L_1: V_1 \rightarrow V_2$ ja $L_2: V_2 \rightarrow V_3$ ovat lineaarikuvauksia, niin $(L_2 L_1)^* = L_1^* L_2^*$.

Proof. Harjoitustehtävä 7.2. $\square$

Vektoriavaruuden V duaalin duaali $V^{**} = (V^*)^*$ on vektoriavaruuden V *biduaali*.

Seuraava tulos on hyödyllinen luvussa 8, kun käsittelemme tensoreita.

Propositio 6.5. Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Kuvaus $\xi: V \rightarrow V^{**}$,

$$\xi(v)\omega = \omega v,$$

on lineaarinen isomorfismi

Proof. Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $v \in V$. Kuvaus $\xi(v): V^* \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarinen sillä kaikille $\omega_1, \omega_2 \in V^*$ ja kaikille $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ pätee duaaliavaruuden laskutoimituksia käyttämällä

$$\xi(v)(a_1\omega_1 + a_2\omega_2) = (a_1\omega_1 + a_2\omega_2)v = a_1\omega_1v + a_2\omega_2v = a_1\xi(v)\omega_1 + a_2\xi(v)\omega_2.$$

Osoitetaan sitten, että ξ on lineaarikuvaus. Olkoot $v_1, v_2 \in V$ ja $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin kuvauksen $\omega \in V^*$ lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \xi(a_1v_1 + a_2v_2)\omega &= \omega(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\omega v_1 + a_2\omega v_2 = a_1\xi(v_1)\omega + a_2\xi(v_2)\omega \\ &= (a_1\xi(v_1) + a_2\xi(v_2))\omega, \end{aligned}$$

joten

$$\xi(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\xi(v_1) + a_2\xi(v_2).$$

Lemman 7.1(3) nojalla $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V < \infty$, joten ξ on isomorfismi, jos se on injektio. Olkoon $v \in V - \{0\}$. Olkoot $v_2, v_3, \dots, v_n \in V - \{0\}$ siten, että $(v, v_2, v_3, \dots, v_n)$ on avaruuden V kanta. Olkoon $\omega_v \in V^*$ se (yksikäsitteisesti määrätty) lineaarimuoto, jolle pätee $\omega_v(v) = 1$ ja $\omega_v(v_2) = \omega_v(v_3) = \dots = \omega_v(v_n) = 0$. Tällöin

$$\xi(v)\omega_v = \omega_v(v) = 1,$$

joten $\xi(v) \neq 0 \in V^{**}$. Siis $\ker \xi = \{0\}$, joten ξ on injektio. □

6.2 Kotangenttivektorit

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Duaaliavaruus $T_p^*(M)$ on moniston M *kotangenttiavaruus* pisteessä p . Kotangenttiavaruuden alkiot ovat *kotangenttivektoreita* p .^a

^aJoskus niitä kutsutaan *kovektoreiksi* pisteessä p .

Lemma 6.6. *Olkoon M sileä monisto. Sileä funktio $f \in \mathfrak{F}(M)$ määrää kotangenttivektorin $\mathbf{d}f|_p$ asettamalla*

$$\mathbf{d}f|_p v_p = v_p f$$

kaikille $v_p \in T_p M$.

Proof. Olkoot $v, w \in T_p M$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mathbf{d}f|_p(av + bw) = (av + bw)f = a(vf) + b(wf) = a\mathbf{d}f|_p v + b\mathbf{d}f|_p w,$$

joten $\mathbf{d}f|_p \in T_p^* M$. □

Sileän funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ differentiaali df_p pisteessä $p \in M$ määriteltiin luvussa 3.2 asettamalla $df_p(v_p)g = v_p(g \circ f)$ kaikille $v_p \in T_p M$ ja kaikille $g \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^1)$.

Lemma 6.7. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$. Tällöin*

$$df_p(v_p) = \mathbf{d}f|_p v_p \frac{d}{dt} \Big|_{f(p)}.$$

Proof. Kiinnitetään $v_p \in T_p M$. Koska $T_{f(p)} \mathbb{E}^1 = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{f(p)} \right\rangle$, on $a \in \mathbb{R}$, jolle

$$df_p(v_p) = a \frac{d}{dt} \Big|_{f(p)} \quad (6.1)$$

Differentiaalin määritelmän ja yhtälön (7.1) nojalla

$$df|_p v_p = v_p(f) = v_p(\text{id}_{\mathbb{E}^1} \circ f) = df_p v_p \text{id}_{\mathbb{E}^1} = a \frac{d}{dt} \Big|_{f(p)} \text{id}_{\mathbb{E}^1} = a. \quad \square$$

Tangenttiavaruus $T_{f(p)} \mathbb{E}^1$ samastetaan usein vektoriavaruuden $\mathbb{R}$ kanssa kuvauksella $a \frac{d}{dt} \Big|_{f(p)} \mapsto a$. Tämän samastuksen jälkeen merkintä df_p tarkoittaa yleensä kotangenttivektoria $df_p \in T_p^* M$, jota merkitsimme edellä $df|_p$.

Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä monistolla M ja olkoon $p \in U$. Kuvauksen ϕ komponenttien $x^1, \dots, x^n$ differentiaalit $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$ ovat kartan (U, ϕ) koordinaattiko(tangentti)vektorit pisteessä p .

Käytämme kotangenttivektoreille yläindeksejä ja niiden komponenteille alaindeksejä.

Propositio 6.8. *Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä monistolla M ja olkoon $p \in U$. Tällöin $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$ on kotangenttiavaruuden $T_p^* M$ kanta, joka on duaalinen tangenttiavaruuden $T_p M$ kannan¹ $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ kanssa.*

Proof. Määritelmän nojalla kaikille $1 \leq i, j \leq n = \dim M$ pätee

$$dx^i|_p \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p x^i = \delta_j^i. \quad (6.2)$$

Jos $\omega_p \in T_p^* M$, niin kaikille $1 \leq j \leq n$ pätee

$$\left(\sum_{i=1}^n (\omega_p \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p) dx^i|_p \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \omega_p \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Koska kotangenttivektorit ω_p ja $\sum_{i=1}^n (\omega_p \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p) dx^i|_p$ saavat samat arvot tangenttiavaruuden $T_p M$ kantavektoreilla, päättelemme

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \left(\omega_p \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) dx^i|_p.$$

Siis n koordinaattikovektoria virittää n -ulotteisen vektoriavaruuden $T_p^* M$, joten ne muodostavat kannan. $\square$

¹Muista Seuraus 3.10.

6.3 Kotangenttikimppu

Olkoon M sileä monisto. Moniston M *kotangenttikimppu* on

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$$

varustettuna sileän moniston rakenteella, joka määritellään alla. Kotangenttikimppun T^*M (*kantapiste*)*projektio* on kuvaus $\pi = \pi_M: T^*M \rightarrow M$, $\pi(\omega, p) = p$.

Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä n -monistolla M ja olkoon $p \in U$. Proposition 7.8 nojalla jokaisella $\omega_p \in T_p^*U \subset T^*U \subset T^*M$ pätee

$$\omega_p = \sum_{k=1}^n c_k(\omega) dx^k|_p \quad (6.3)$$

joillain kertoimilla $c_1(v), c_2(v), \dots, c_n(v) \in \mathbb{R}$. Olkoon $c: T^*U \rightarrow \mathbb{E}^n$ kuvaus, jonka komponentit ovat $c_1(v), c_2(v), \dots, c_n(v)$. Olkoon $\Phi_U^*: T^*U \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{E}^n$ kuvaus

$$\Phi_U^*(\omega_q) = (\phi(q), c(\omega)).$$

Valitaan joukkoon T^*U yksikäsitteisesti määritelty topologia, jolle Φ_U^* on homeomorfismi. Olkoon

$$\mathcal{B}^* = \{A \subset T^*M : A \subset T^*U \text{ on avoin jollain koordinaattiympäristöllä } U \subset M\}.$$

Valitaan joukkoon T^*M topologia, jonka kanta on $\mathcal{B}^*$ ja varustetaan T^*M kartastolla $\{(T^*U, \Phi_U^*) : (U, \phi) \text{ on sileä kartta}\}$.

Propositio 6.9. *Sileän moniston kotangenttikimppu on sileä monisto. Kantapisteprojektio on sileä kuvaus.*

Proof. Todistetaan kuten Propositio ?? . Harjoitustehtävä 7.4 □

Esimerkki 6.10. Jos monistolla M on globaali sileä kartta, niin T^*M on diffeomorfinen tuloavaruuden $M \times \mathbb{E}^n$ kanssa. Erityisesti $T^*\mathbb{E}^n$ on diffeomorfinen avaruuden $\mathbb{E}^{2n}$ kanssa.

6.4 Sileät 1-muodot

Olkoon M sileä monisto. Kuvaus $\omega: M \rightarrow T^*M$, jolle $\pi \circ \omega = \text{id}_M$, on *1-muoto* eli *kovektorikenttä* eli kotangenttikimppun T^*M (*globaali*) *leikkaus*.^a

Olkoon ^b

$$\mathfrak{X}^*(M) = \{\omega: M \rightarrow T^*M : \omega \text{ on sileä 1-muoto}\}.$$

^aEnglanniksi *section*.

^bJoissain lähteissä käytetään sileiden 1-muotojen avaruudelle merkintää $\Omega^1(M)$.

Käytämme merkintää

$$\omega_p = \omega(p).$$

Monistolla M määritelty 1-muoto ω määrittelee kuvauksen moniston M vektorikenttien avaruudelta funktioiden avaruuteen luonnollisesti pisteittäisen toiminnan kautta.

Jos $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ ja $X \in \mathfrak{X}(M)$, niin

$$(\omega X)(p) = \omega_p X_p.$$

Luvussa 7.2 määritelty sileän funktion pisteittäinen differentiaali määrää 1-muodon.

Olkoon M sileä monisto. Funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ differentiaali df on kuvaus $df: M \rightarrow T^*M$, $p \mapsto df_p$.

Esimerkki 6.11. Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta, jonka komponentit ovat $x^1, x^2, \dots, x^n$. Koordinaattimuodot $dx^1, \dots, dx^n$ ovat sileitä 1-muotoja joukossa U , sillä niiden esitys luonnollisessa kartassa Φ^*_U on

$$\Phi^*_U \circ dx^k \circ \phi^{-1}(y) = (y, \mathbf{e}_k).$$

Kovektorikenttien yhteenlasku ja vakiolla kertominen määritellään pisteittäin: Jos ω ja α ovat 1-muotoja ja $\lambda \in \mathbb{R}$, asetetaan

$$(\omega + \alpha)_p = \omega_p + \alpha_p \quad \text{ja} \quad (\lambda\omega)_p = \lambda\omega_p,$$

missä kotangenttivektorien yhteenlasku ja reaalityyluvulla kertominen suoritetaan vektoriavaruuden T_p^*M laskutoimituksilla kaikilla $p \in M$.

Seuraavat differentiaalioinaisuudet ovat käyttökelpoisia:

Propositio 6.12. Olkoon M sileä monisto ja olkoot $f, g \in \mathfrak{F}(M)$. Tällöin

(1) $d(af + bg) = a df + b dg$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) $d(fg) = f dg + g df$.

(3) jos $g(p) \neq 0$ kaikilla $p \in M$, niin

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}.$$

Proof. (1) Olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tällöin

$$d(af + bg)X = X(af + bg) = aXf + bXg = a df X + b dg X.$$

Loput väitteet todistetaan Harjoitustehtävässä 7.8. □

(Sileän) 1-muodon kertominen (sileällä) funktiolla määritellään pisteittäin: Jos $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ ja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, asetetaan

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p \tag{6.4}$$

kaikilla $p \in M$.

Lemma 6.13. *Olkkoon M on sileä monisto ja olkkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Tällöin*

$$\omega(fX) = f\omega X$$

kaikille $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja kaikille $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proof. Koska ω_p on lineaarikuvaus jokaisella $p \in M$, saamme

$$\omega(fX)(p) = \omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p X_p = (f\omega)_p X_p. \quad \square$$

Jos $U \subset M$ on avoin koordinaattiympäristö, niin yhtälön (7.3) nojalla mikä tahansa 1-muoto $\omega: U \rightarrow T^*U$ voidaan ilmaista koordinaattimuotojen avulla: On funktiot $c_1, c_2, \dots, c_n: U \rightarrow \mathbb{E}^1$, joille

$$\omega = \sum_{k=1}^n c_k dx^k. \quad (6.5)$$

Propositio 6.14. *Olkkoon M sileä monisto ja olkkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M . Olkkoon $\omega: M \rightarrow T^*M$ 1-muoto. Tällöin ω on sileä 1-muoto joukossa U , jos ja vain jos sen kerroinfunktiot esityksessä (7.5) ovat sileitä.*

Proof. Kovektorikentän ω esitys luonnollisissa koordinaateissa on $\tilde{\omega}(y) = (y, c(y))$, joten ω on sileä, jos ja vain jos kerroinfunktiot $c_1, \dots, c_n$ ovat sileitä. $\square$

Lemma 6.15. *Olkkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkkoon (U, x) sileä kartta. Tällöin*

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k. \quad (6.6)$$

Proof. Olkkoon

$$X = \sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \in \mathfrak{X}(M).$$

Tällöin linearisuuden ja Lemman 7.13 nojalla

$$df X = \sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Toisaalta yhtälön (7.2) nojalla

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \right) X &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \right) \left(\sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial f}{\partial x^j} \delta_k^j = \sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial f}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad \square$$

Lemman 7.15 nojalla sileän funktion differentiaali vastaa differentiaalilaskennasta tuttua *gradienttia*.

Seuraus 6.16. *Sileän funktion differentiaali on sileä 1-muoto.*

Proof. Seuraa Proposition 7.14 nojalla Lemmasta 7.15. $\square$

Propositio 6.17. *Olkoon M sileä monisto. Olkoon $\omega: M \rightarrow T^*M$ 1-muoto. Tällöin $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, jos ja vain jos $\omega X \in \mathfrak{F}(M)$ kaikilla $X \in \mathfrak{X}(M)$.²*

Proof. Olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ ja olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Olkoon (U, ϕ) sileä kartta. Propositoiden ?? ja 7.14 nojalla on funktiot $c_1^\omega, \dots, c_n^\omega, c_X^1, \dots, c_X^n \in \mathfrak{F}(U)$, joille

$$\omega = \sum_{i=1}^n c_i^\omega dx^i \quad \text{ja} \quad X = \sum_{j=1}^n c_X^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Tällöin

$$(\omega X)(q) = \left(\sum_{i=1}^n c_i^\omega dx^i \right) \left(\sum_{j=1}^n c_X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1}^n c_i^\omega c_X^j dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^n c_i^\omega c_X^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n c_i^\omega c_X^i,$$

joten ωX on sileä sileiden funktioiden äärellisenä summana.

Olkoon $\omega: M \rightarrow T^*M$ kuvaus, jolle $\pi \circ \omega = \text{id}_M$. Oletetaan, että ωX on sileä kaikille $X \in \mathfrak{X}(M)$. Olkoon (U, ϕ) sileä kartta. Proposition 7.8 nojalla on funktiot $c_1^\omega, \dots, c_n^\omega: M \rightarrow \mathbb{E}^1$ siten, että

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n c_i^\omega dx^i.$$

Olkoon $p \in U$. Koordinaattivektorikentät $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ voidaan tösäsyfunktioilla kertomalla jatkaa sileiksi vektorikentiksi $Z_1, \dots, Z_n \in \mathfrak{X}(M)$, joille $Z_i|_V = \frac{\partial}{\partial x^i}|_V$ jollain pisteen p avoimella ympäristöllä $V \subset U$ kaikille $1 \leq i \leq n$. Oletuksen mukaan funktiot ωZ_i ovat sileitä, joten joukossa V näemme, että

$$\omega Z_i = \left(\sum_{k=1}^n c_k^\omega dx^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = c_i^\omega$$

on sileä jokaisella $1 \leq k \leq n$. Proposition 7.14 nojalla ω on sileä. □

Seurauksen 7.16 toinen todistus. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tällöin määritelmän ja Proposition ?? nojalla näemme, että $df X = Xf \in \mathfrak{F}(M)$. Proposition 7.17 nojalla $df \in \mathfrak{X}^*(M)$. □

6.5 Sileän 1-muodon alkukuva

Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $p \in M$. Sileän kuvauksen $F: M \rightarrow N$ differentiaalin dF_p duaalikuvaus $(dF_p)^*: T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$,

$$(dF^* \omega_{F(p)})v = \omega(dF_p v),$$

on kuvauksen F kodifferentiaali pisteessä $F(p)$.

Jos F on upotus, niin kodifferentiaalit $(dF_p)^*$ määräävä kuvauksen $F^*: T^*N \rightarrow T^*M$. Yleisessä tapauksessa pisteittäiset kodifferentiaalit eivät määrää kuvausta kotangenttiavaruuksien välillä mutta niiden avulla voidaan muodostaa moniston N vektorikentille alkukuvat:

²Vertaa Propositioon ??.

Jos $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$, niin yhtälöllä

$$(F^*\omega)_p = (dF_p)^*\omega_{F(p)} \quad (6.7)$$

määritelty 1-muoto $F^*\omega$ on sileän 1-muodon ω alkukuva^a kuvauksella F .

^aEnglanniksi *pull-back*.

Jos $F: M \rightarrow N$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$ ja $X \in \mathfrak{X}(M)$, niin

$$(F^*\omega)X = \omega(dFX). \quad (6.8)$$

Monissa lähteissä differentiaalia dF merkitään F_* . Tällöin yhtälö (7.8) saa muodon

$$(F^*\omega)X = \omega(F_*X).$$

Propositio 6.18. Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F: M \rightarrow N$ sileä kuvaus. Olkoot $\omega, \tau \in \mathfrak{X}^*(N)$ ja $f \in \mathfrak{F}(N)$. Tällöin

$$(1) F^*(\omega + \tau) = F^*(\omega) + F^*(\tau).$$

$$(2) F^*(f\omega) = (f \circ F) F^*\omega \text{ ja}$$

$$(3) F^*df = d(f \circ F).$$

Proof. (1) Harjoitustehtävä.

(2) Määritelmän nojalla ja koska dF_p^* on lineaarikuvaus, saamme

$$F^*(f\omega)_p = (dF_p)^*(f\omega)_{F(p)} = (dF_p)^*(f(F(p))\omega_{F(p)}) = f(F(p))dF_p^*(\omega_{F(p)}) = f \circ F(p) (F^*\omega)_p.$$

(3) Olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tällöin

$$(F^*df)_p X_p = df_{F(p)}(dF_p X_p) = (dF_p X_p) f = X_p(f \circ F)$$

ja toisaalta

$$d(f \circ F)_p X_p = X_p(f \circ F).$$

□

Yleisesti määritellään

$$F^*f = f \circ F$$

kaikille $f \in \mathfrak{F}(N)$, jos $F: M \rightarrow N$ on sileä kuvaus. Tällä merkinnällä Propositio 7.18 saadaan muotoon

$$F^*df = d(F^*f)$$

kaikille $f \in \mathfrak{F}(N)$. Siis differentiaalioperaatio kommutoi alkukuvan kanssa.

Propositio 6.19. Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F: M \rightarrow N$ sileä kuvaus. Tällöin $F^*\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ kaikille $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$.

Proof. Olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M ja olkoon (V, ψ) sileä kartta monistolla N siten, että $F(U) \subset V$. Olkoot $(x^1, \dots, x^m)$ ja $(y^1, \dots, y^n)$ kuvausten ϕ ja ψ komponentit. Proposition 7.14 nojalla on sileät funktiot $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{F}(V)$, joille $\omega|_V = \sum_{k=1}^n a_k dy^k$.

Joukossa U pätee Proposition 7.18 kohtien (2) ja (3) ja Lemman 7.15 nojalla, koska $y^k \circ F = F^k \in \mathfrak{F}(M)$, pätee

$$\begin{aligned} F^* \omega &= F^* \left(\sum_{k=1}^n a_k dy^k \right) = \sum_{k=1}^n a_k \circ F F^* dy^k = \sum_{k=1}^n a_k \circ F d(y^k \circ F) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \circ F \frac{\partial F^k}{\partial x^j} dx^j. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Funktio $a_k \circ F$ ja $y^k \circ F$ ovat sileitä, joten väite seuraa Proposition 7.14 nojalla. $\square$

Propositio 6.20. Olkoot $F_1: M_1 \rightarrow M_2$ ja $F_2: M_2 \rightarrow M_3$ sileitä kuvauksia ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M_3)$. Tällöin

$$(F_2 \circ F_1)^* \omega = F_1^* (F_2^* \omega).$$

Proof. Harjoitustehtävä 7.11 $\square$

6.6 Sileän 1-muodon rajoittuma alimonistolle

Olkoon S sileän moniston M säännöllinen alimonisto ja olkoon $i: S \rightarrow M$ inklusiokuvaus. Moniston S tangenttiavaruus $T_p S$ pisteessä $p \in S$ samastetaan avaruuden $T_p M$ lineaarisen aliavaruuden $di_p(T_p S)$ kanssa.³ Jokainen moniston M sileä 1-muoto $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ määrää sileän 1-muodon $i^* \omega$ monistolla S :

$$(i^* \omega)_p v = \omega_p(di_p v) = \omega_p v$$

kaikille $v \in T_p S$.

Esimerkki 6.21. Olkoon S sileän moniston M säännöllinen alimonisto. Oletetaan, että $s = \dim S < \dim M = n$ ja käytetään pisteessä $p \in S \subset M$ viipalekarttaa (U, x) , jossa $x(S) = x(U) \cap \mathbb{E}^s \times \{(0, 0, \dots, 0)\}$. Tällöin jokaiselle $s + 1 \leq k \leq n$ pätee Proposition 7.18(3) nojalla

$$i^*(dx^k) = d(x^k \circ i) = d0 = 0.$$

6.7 Laskelmia koordinaateissa

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoot (U, ϕ) ja (V, ψ) sileitä karttoja pisteessä p . Luvussa 3.3 osoitimme, että kartan (U, ϕ) koordinaattitangenttivektorit saadaan kartan (V, ψ) koordinaattitangenttivektoreista lausekkeella

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p. \quad (6.10)$$

³Katso luku 6.4.

Jos

$$v = \sum_{i=1}^n v_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n v_y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p,$$

niin yhtälön (7.10) nojalla

$$v = \sum_{i=1}^n v_x^i \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_x^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \right) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

Siis

$$v_y^j = \sum_{i=1}^n v_x^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)). \quad (6.11)$$

Yhtälö (7.9) antaa tapauksessa $F = \text{id}$ muunnoskaavan

$$dy^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) dx^i. \quad (6.12)$$

Tämä yhtälö seuraa myös koordinaattivektorien ja koordinaattikovektorien duaalisuudesta Harjoitustehtävän 7.3 nojalla.

Sileän 1-muodon kertoimien muuntumisen saa helposti yhtälön (7.10) avulla: Jos

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_x^i dx^i = \sum_{j=1}^n \omega_y^j dy^j,$$

niin

$$\begin{aligned} \omega_x^i(p) &= \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \omega \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \omega_y^j(p). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Yhtälöiden (7.10) ja (7.13) mukaan kovektorien komponentit muuntuvat kartanvaihdoissa samalla säännöllä kuin koordinaatti(tangentti)vektorit. Sen vuoksi kovektoreita on ollut tapana kutsua *kovarianteiksi vektoreiksi* ja vastaavasti tangenttivektoreita *kontravarianteiksi vektoreiksi*. Tämä on vakiintunut terminologia vaikka se on ristiriidassa kategoriateorian samojen sanojen käytön kanssa.

Esimerkki 6.22. Olkoot (r, θ) napakoordinaatit sileän moniston $\mathbb{E}^2$ avoimessa osajoukossa $\mathbb{E}^2 - [\text{openleft}] - \infty \times \{0\}$ kuten Esimerkissä 3.11. Kun kartanvaihdoissa tarkastellaan 1-muodon lausekkeen muuntumista, lasketaan identtisen kuvauksen kodifferentiaalilla. Tällöin

$$dx^1 = \frac{\partial x^1}{\partial r} dr + -\frac{\partial x^1}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

ja

$$dx^2 = \frac{\partial x^2}{\partial r} dr + -\frac{\partial x^2}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{x^1 dx^2 - x^2 dx^1}{\|x\|^2} &= \frac{r \cos \theta (r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr) - r \sin \theta (-r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr)}{r^2} \\ &= \frac{r^2 d\theta}{r^2} = d\theta. \end{aligned}$$

Harjoitustehtäviä

6.1. Todista Lemma 7.1

6.2. Todista Lemma 7.4. Tarkasta myös, että duaalikuvaus on hyvin määritelty.

6.3. Olkoon $L: V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Olkoon $(v_1, \dots, v_n)$ vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $(w_1, \dots, w_m)$ vektoriavaruuden W kanta. Olkoot $(\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n)$ ja $(\bar{w}^1, \dots, \bar{w}^m)$ duaaliavaruuksien V^* ja W^* kannat, jotka ovat duaalisia kannoille $(v_1, \dots, v_n)$ ja $(w_1, \dots, w_m)$. Olkoon (a_j^i) lineaarikuvauksen L matriisi kantojen $(v_1, \dots, v_n)$ ja $(w_1, \dots, w_m)$ suhteen. Siis kaikille $1 \leq j \leq n$ pätee

$$Lv_j = \sum_{i=1}^m a_j^i w_i.$$

Osoita, että⁴

$$L^* \bar{w}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i \bar{v}_j.$$

6.4. Todista Propositio 7.9.

Olkoon K on kommutatiivinen rengas. Epätyhjä osajoukko $\mathcal{I} \subset K$ on *ideaali*, jos

- $(\mathcal{I}, +)$ on additiivisen ryhmän $(K, +)$ aliryhmä ja
- $xa \in \mathcal{I}$ kaikilla $x \in R$ ja $a \in \mathcal{I}$.

Jos $\mathcal{I}, \mathcal{I}' \subset K$ ovat ideaaleja, niiden *tulo* on ideaali

$$\mathcal{I} \mathcal{I}' = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i b_i : a_i \in \mathcal{I}, b_i \in \mathcal{I}', m \in \mathbb{N} \right\}.$$

6.5. Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon

$$\mathcal{I}_p = \{f \in \mathfrak{F}(M) : f(p) = 0\}.$$

Osoita, että $\mathcal{I}_p$ on renkaan $\mathfrak{F}(M)$ ideaali.

Olkoon $\Phi: \mathfrak{F}(M) \rightarrow T_p^* M$, $\Phi(f) = df_p$. Osoita, että⁵ $\ker \Phi = (\mathcal{I}_p)^2$ ja $\Phi(\mathcal{I}_p) = T_p^* M$, joten Φ määrää vektoriavaruuksien isomorfismin $\mathcal{I}_p / (\mathcal{I}_p)^2 \cong T_p^* M$.

6.6. Olkoot $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^2 - \{0\})$,

$$X_x = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \text{ja} \quad Y_x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Etsi $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^2 - \{0\})$, jolle $\omega(X) = 1$ ja $\omega(Y) = 0$.

6.7. Olkoon M sileä monisto, olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkoon $g \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^1)$. Osoita, että sileille 1-muodoille pätee

$$d(g \circ f) = \left(\frac{d}{dt} g\right) \circ f \, df.$$

⁴Tehtävän lyhyt muotoilu on: Osoita, että lineaarikuvauksen transpoosin matriisi on lineaarikuvauksen matriisin transpoosi.

⁵Kaytä Taylorin lausetta jäännöstermillä, [?, Thm. C.15].

6.8. Todista Proposition 7.12 kohdat (2) ja (3).

6.9. Todista Propositio 7.18(1).

6.10. Tässä tehtävässä x ja y ovat euklidisten avaruuksien kanoniset koordinaatit.

(1) Olkoon $\exp: \mathbb{E}^1 \rightarrow [\text{open}]0\infty$, $\exp(x) = e^x$. Olkoon $\omega = \frac{dy}{y}$. Määritä $\exp^* \omega$.

(2) Olkoon $F: \{x \in \mathbb{E}^2 : \|x\| < 1\} \rightarrow \mathbb{E}^3 - \{0\}$,

$$F(x) = (x^1, x^2, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^3 - \{0\})$,

$$\omega = (1 - (y^1)^2 - (y^2)^2)dy^3.$$

Määritä $F^* \omega$.

(3) Määritä sileän 1-muodon $F^* \omega_2$ lauseke tason yksikkökiekon napakoordinaateissa.

6.11. Todista Propositio 7.20.

6.12. Olkoon M sileä monisto ja olkoon S funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ säännöllinen tasavarpinta. Osoita, että df määrää 1-muodon $0 \in \mathfrak{X}^*(S)$ alimonistolla S .

6.13. Olkoon $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^1$, $f(x) = \|x\|^2$ ja olkoon $F = \mathcal{S}^{-1}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ stereograafisen projektion käänteiskuvaus.⁶ Laske $F^* df$ ja $d(f \circ F)$.⁷

6.14. Olkoon $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ Laske df kanonisessa kartassa ja napakoordinaateissa.

⁶Katso Esimerkki 1.12(3).

⁷Proposition 7.18(3) nojalla laskuista pitäisi tulla sama tulos.

Chapter 7

Multilineaarialgebraa

Tässä luvussa käsittelemme multilineaarialgebraa reaalisisissa vektoriavaruuksissa. Tarkastelemme erityisesti alternoivia ja symmetrisiä tensoreita, joista etenkin alternoivat tensorit ovat keskeisessä osassa kurssin loppupuolella.

7.1 Vektoriavaruuden tensorit

Olkoot $V_1, V_2, \dots, V_m$ ja W vektoriavaruuksia. Kuvaus $L: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \rightarrow W$ on *multilineaarikuvaus*, jos kuvaus $v \mapsto L(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v, v_{k+1}, \dots, v_m)$ on lineaarikuvaus kaikilla kiinnitetyillä $v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq m$, $i \neq k$.

Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoot $r, s \in \mathbb{N}$. Multilineaarikuvaus $A: (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{R}$ on vektoriavaruuden V (r, s) -*tensori*. Vektoriavaruuden V (r, s) -*tensorien vektoriavaruus* on

$$T^{(r,s)}(V) = \left\{ A: (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{R} \text{ multilineaarikuvaus} \right\}.$$

Esimerkki 7.1. (1) Lineaarikuvaukset ovat multilineaarikuvauksia.

(2) Reaalisen vektoriavaruuden V sisätulo on bilineaarikuvaus, siis multilineaarikuvaus. Se on $(0, 2)$ -tensori.

(3) Olkoon V äärellisulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Proposition 7.5 nojalla jokainen vektori $v \in V$ määrää lineaarikuvauksen $\xi(v) \in V^{**}$, $\xi(v)\omega = \omega v$, joten *evaluaatiokuvaus* $E: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E(\omega, v) = \omega v,$$

on $(1, 1)$ -tensori.

(4) Olkoon V n -ulotteinen vektoriavaruus. Kuvaus $\det: V^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\det(v_1, \dots, v_n) = \det(v_j^i)_{i,j=1}^n$$

on multilineaarikuvaus, $(0, n)$ -tensori.

(5) Ristitulo $\cdot \times \cdot: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$u \times v = (u^2 v^3 - u^3 v^2, u^3 v^1 - u^1 v^3, u^1 v^2 - u^2 v^1),$$

on bilineaarikuvaus.

Jatkossa samastamme äärellisulotteiset vektoriavaruuksien V ja V^{**} ja ajattelemme tarvittaessa vektoria $v \in V$ avaruuden V^{**} alkiona ilman eri mainintaa tai merkintää.

Tensorien muodostaminen lineaarikuvauksista ei ole vaikeaa.

Olkoot $V_1, \dots, V_m$ vektoriavaruuksia. Lineaarikuvausten $L_k \in V_k^*$ tensoritulo on kuvaus $L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_m: V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_m(v_1, \dots, v_m) = L_1(v_1) L_2(v_2) \dots L_m(v_m).$$

Lemma 7.2. *Reaaliarvoisten lineaarikuvausten tensoritulo on multilineaarikuvaus.* □

Proof. Harjoitustehtävä 8.1. □

Esimerkki 7.3. Olkoon V vektoriavaruus. Jos $v_1, \dots, v_r \in V$ ja $\omega^1, \dots, \omega^s \in V^*$, niin $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s \in T^{(r,s)}(V)$.

Propositio 7.4. *Olkoon V n -ulotteinen reaalin vektoriavaruus. Tällöin $T^{(r,s)}(V)$ on n^{r+s} -ulotteinen vektoriavaruus.*

Proof. Harjoitustehtävässä 8.3 tarkastetaan, että (r, s) -tensorit muodostavat vektoriavaruuksien, joten osoitettavaksi jää avaruuden dimensio. Olkoon $(E_1, \dots, E_n)$ avaruuden V kanta ja olkoon $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ avaruuden V^* kanta, joka on duaalinen kannalle $(E_1, \dots, E_n)$. Osoitamme, että vektorit $E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s}$, $1 \leq i_k, j_l \leq n$, muodostavat avaruuden $T^{(r,s)}(V)$ kannan.

Olkoot $\theta^1, \dots, \theta^r \in V^*$ ja $w_1, \dots, w_s \in V$. Tällöin $\theta^i = \sum_{j_i=1}^n \theta_{j_i}^i \varepsilon^{j_i}$ ja $w_k = \sum_{\ell_k=1}^n w_k^{\ell_k} E_{\ell_k}$ joillain kertoimilla $\theta_{j_i}^i, w_k^{\ell_k} \in \mathbb{R}$. Olkoon $A \in T^{(r,s)}(V)$. Tällöin multilineaarisuudesta seuraa

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, v_1, \dots, v_s) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r, \\ \ell_1, \dots, \ell_s=1}}^n \theta_{j_1}^1 \dots \theta_{j_r}^r w_1^{\ell_1} \dots w_s^{\ell_s} A(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_r}, E_{\ell_1}, \dots, E_{\ell_s}).$$

Toisaalta tensoritulon määritelmän, multilineaarisuuden ja duaalisuuden nojalla

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r, \\ \ell_1, \dots, \ell_s=1}}^n A(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_r}, E_{\ell_1}, \dots, E_{\ell_s}) E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_r} \otimes \varepsilon^{\ell_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{\ell_s} (\theta^1, \dots, \theta^r, v_1, \dots, v_s) \\ &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r, \\ \ell_1, \dots, \ell_s=1}}^n A(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_r}, E_{\ell_1}, \dots, E_{\ell_s}) \theta_{j_1}^1 \dots \theta_{j_r}^r w_1^{\ell_1} \dots w_s^{\ell_s}. \end{aligned}$$

Siis

$$A = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r, \\ \ell_1, \dots, \ell_s=1}}^n A(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_r}, E_{\ell_1}, \dots, E_{\ell_s}) E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_r} \otimes \varepsilon^{\ell_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{\ell_s},$$

joten tensorit $E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}$, $1 \leq i_k, j_\ell \leq n$, virittävät avaruuden $T^{(r,s)}(V)$.

Tensorien $E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}$ lineaarinen riippumattomuus seuraa tarkastelemalla, miten ne kuvaavat alkioit $(\varepsilon^{k_1}, \dots, \varepsilon^{k_r}, E_{\ell_1}, \dots, E_{\ell_s})$. $\square$

Esimerkki 7.5. Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ standardisisätulo on $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^i$:¹

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^i \right) (x, y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i = (x | y).$$

Vastaavalla tavalla voidaan määritellä vektoriavaruuden V tensorien tensoritulo. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi määrittelemme kahden tensorin tensoritulon, jota iteroimalla saadaan useamman tensorin tensoritulot.

Olkoon V vektoriavaruus. Tensorien $A_1 \in T^{(r_1, s_1)}(V)$ ja $A_2 \in T^{(r_2, s_2)}(V)$ *tensoritulo* on $A_1 \otimes A_2: (V^*)^{r_1+r_2} \times V^{s_1+s_2} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (A_1 \otimes A_2)(\omega^1, \dots, \omega^{r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) \\ = A_1(\omega^1, \dots, \omega^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) A_2(\omega^{r_1+1}, \dots, \omega^{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}). \end{aligned}$$

Lemma 7.6. Olkoon V vektoriavaruus. Olkoot $A_1, A_2 \in T^{(r_1, s_1)}(V)$, $B_1, B_2 \in T^{(r_2, s_2)}(V)$ ja $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2) \otimes (b_1 B_1 + b_2 B_2) = a_1 b_1 A_1 \otimes B_1 + a_1 b_2 A_1 \otimes B_2 + a_2 b_1 A_2 \otimes B_1 + a_2 b_2 A_2 \otimes B_2.$$

Proof. Harjoitustehtävä 8.5. $\square$

Tensoritulon määritelmästä seuraa välittömästi hyödyllinen laskusääntö: Jos $A_1, \dots, A_n$ ovat tensoreita ja $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, niin

$$a_1 A_1 \otimes a_2 A_2 \otimes \cdots \otimes a_n A_n = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n. \quad (7.1)$$

7.2 Symmetriset ja alternoivat tensorit

Jokainen permutaatio $\sigma \in S_n$ voidaan kirjoittaa vaihtojen² tulona

$$\sigma = (i_1 j_1)(i_2 j_2) \cdots (i_m j_m),$$

missä $1 \leq i_k, j_k \leq n$ kaikilla $1 \leq k \leq m$. Permutaation $\sigma \in S_n$ *merkki* on ryhmähomomorfismi $\text{sign}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$,

$$\text{sign}((i_1 j_1)(i_2 j_2) \cdots (i_m j_m)) = (-1)^m.$$

Olkoon V vektoriavaruus. Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$ ja olkoon $\sigma \in S_k$ permutaatio. Määritellään tensori $\sigma \cdot A$ asettamalla

$$(\sigma \cdot A)(v_1, \dots, v_k) = A(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

kaikille $v_1, \dots, v_k \in V$.

¹Esimerkki 7.3(1).

²Vaihtoja kutsutaan usein transpositioiksi. Permutaatioita käsitellään ryhmäteorian kurssilla, katso esimerkiksi [?].

Lemma 7.7. Jos $A \in T^{(0,s)}(V)$ ja $\sigma, \tau \in S_k$, niin $\tau \cdot (\sigma \cdot A) = (\tau\sigma) \cdot A$

Proof. Käyttämällä laskussa merkintöjä $w_1 = v_{\sigma(1)}, \dots, w_k = v_{\sigma(k)}$ saamme kaikille $v_1, \dots, v_k \in V$

$$\begin{aligned} (\tau \cdot (\sigma \cdot A))(v_1, v_2, \dots, v_s) &= \sigma \cdot A(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) \\ &= \sigma \cdot A(w_1, \dots, w_k) \\ &= A(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(k)}) \\ &= A(v_{\tau(\sigma(1))}, \dots, v_{\tau(\sigma(k))}) \\ &= A(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)}) = (\tau\sigma) \cdot A(v_1, \dots, v_k). \quad \square \end{aligned}$$

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $k \geq 1$. Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$. Jos $\sigma \cdot A = A$ kaikille permutaatioille $\sigma \in S_k$, niin A on *symmetrinen* tensori. Vektoriavaruuden V *symmetristen tensorien avaruus* on^a

$$S^k(V) = \{ \alpha \in T^{(0,k)}(V) : \sigma \cdot \alpha = \alpha \}.$$

^aLee [?] käyttää merkintää $\Sigma(V)$ tälle avaruudelle.

Esimerkki 7.8. Sisätulo on symmetrinen $(0, 2)$ -tensori.

Propositio 7.9. Äärellisulotteisen vektoriavaruden V $(0, k)$ -tensori on symmetrinen, jos ja vain jos $\tau \cdot A = A$ jokaiselle vaihdolle $\tau \in S_k$.

Proof. Harjoitustehtävä 8.6. □

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $k \geq 1$. Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$. Jos $\sigma \cdot A = \text{sign}(\sigma)A$ kaikille permutaatioille $\sigma \in S_k$, niin A on *alternoiva* tensori.^a Alternoiva $(0, k)$ -tensori on k -kovektori ja *multikovektori*. Vektoriavaruuden V k -kovektorien avaruus on

$$A^k(V) = \{ \alpha \in T^{(0,k)}(V) : \sigma \cdot \alpha = \text{sign}(\sigma)\alpha \}.$$

Määritellään lisäksi $A^0(V) = \mathbb{R}$.

^aAlternoivaa tensoria voi kutsua myös *antisymmetriseksi tensoriksi*.

Tällä kurssilla emme käsittele symmetrisiä tai alternoivia $(k, 0)$ -tensoreita vaan keskitymme yleisemmin esiintyviin $(0, k)$ -tensoreihin. Sekatensoreille ei yleensä yritetäkään määritellä symmetrisyyden tai antisymmetrisyyden käsitettä.

Esimerkki 7.10. (1) Olkoon $\det: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)}^1 v_{\sigma(2)}^2 \cdots v_{\sigma(n)}^n,$$

missä $v_j = \sum_{k=1}^n v_j^k \mathbf{e}_k$ kaikille $1 \leq j \leq n$. Harjoitustehtävässä 8.13 osoitetaan, että $\det$ on alternoiva $(0, n)$ -tensori.

(2) $A^1(V) = S^1(V) = T^{(0,1)}(V) = V^*$, koska ryhmässä $S_1 = \{\text{id}\}$ ei ole parittomia permutaatioita.

Lemma 7.11. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja olkoon $k \geq 2$. Tällöin*

$$A^k(V) \cap S^k(V) = \{0\}.$$

Proof. Olkoon $\alpha \in A^k(V) \cap S^k(V)$. Tällöin kaikille $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ symmetrisyyden ja antisymmetrisyyden nojalla pätee

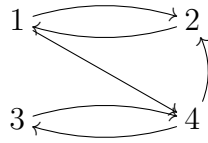
$$\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k) = (12) \cdot \alpha(v_1, v_2, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k).$$

joten $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$. □

Propositio 7.12. *Olkoon A äärellisulotteisen vektoriavaruuden V $(0, k)$ -tensori. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (1) A on alternoiva.
- (2) $\tau \cdot A = -A$ jokaiselle vaihdolle $\tau \in S_k$.
- (3) Jos $v_1, \dots, v_k \in V$ ovat lineaarisesti riippuvia, niin $A(v_1, \dots, v_k) = 0$.
- (4) Jos $v_1, \dots, v_k \in V$ ja $v_i = v_j$ joillain $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, niin $A(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Proof. Todistamme eri kohtien väliset yhteydet seuraavan kaavion mukaan:



Ehto (2) seuraa triviaalisti ehdosta (1). Se, että ehto (2) seuraa ehdosta (1), seuraa Lemmasta 8.7 ja siitä, että vaihdot virittävät permutaatioiden ryhmät, yksityiskohtainen todistus tehdään Harjoitustehtävässä 8.6.

Jos A on alternoiva ja $v_i = v_j$ kuten kohdassa (4), niin

$$A(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(ij)A(v_1, \dots, v_k) = -A(v_1, \dots, v_k),$$

joten $A(v_1, \dots, v_k) = 0$. Siis ehto (4) seuraa ehdosta (1). Samoin ehto (4) seuraa triviaalisti ehdosta (3).

Oletetaan sitten, että ehto (4) on voimassa. Olkoot $1 \leq i, j \leq k$ siten, että $i \neq j$. Ehdosta (4) seuraa bilineaarisuutta käyttämällä, että

$$\begin{aligned} 0 &= A(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) \\ &= A(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) + A(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &\quad + A(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + A(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= A(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + A(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\ &= (A + (ij) \cdot A)(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Siis ehto (2) seuraa ehdosta (4).

Oletetaan edelleen, että ehto (4) on voimassa. Jos vektorit $v_1, \dots, v_k \in V$ ovat lineaarisesti riippuvia, niin jokin niistä voidaan esittää toisten lineaarikombinaationa, Voimme olettaa, että $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} v_j$. Tällöin ehdosta (4) seuraa.

$$A(v_1, \dots, v_k) = A(v_1, \dots, v_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} v_j) = \sum_{j=1}^{k-1} A(v_1, \dots, v_{k-1}, v_j) = 0$$

Siis ehto (3) seuraa ehdosta (4) ja kaikkien ehtojen yhtäpitävyys on todistettu. □

Multilineaarisuus ja Proposition 8.12 ehto (4) ovat k -ulotteisen tilavuuden ominaisuuksia, joten alernoivaa $(0, k)$ -tensoria voidaan ajatella k -ulotteisen *merkillisen tilavuuden* mittarina.³ Tunnetusti $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ on vektorien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{E}^n$ virittämän n -ulotteisen suuntaissärmiön n -ulotteinen tilavuus euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$.

7.3 Symmetointi ja alernointi

Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Kuvaus $\text{Sym}: T^{(0,m)}(V) \rightarrow T^{(0,m)}(V)$,

$$\text{Sym } A = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \sigma \cdot A$$

on *symmetointi*. Kuvaus $\text{Alt}: T^{(0,m)}(V) \rightarrow T^{(0,m)}(V)$,

$$\text{Alt } A = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sign}(\sigma) \sigma \cdot A$$

on *alernointi*.

Esimerkki 7.13. (1) $S_2 = \{\text{id}, (12)\}$. Jokaiselle $\omega \in T^{(0,2)}(V)$ pätee

$$\begin{aligned} \text{Sym } \omega &= \frac{1}{2}(\omega + (12) \cdot \omega), \\ \text{Alt } \omega &= \frac{1}{2}(\omega + \text{sign}(12) (12) \cdot \omega), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \text{Sym } \omega(v_1, v_2) &= \frac{1}{2}(\omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_1)), \\ \text{Alt } \omega(v_1, v_2) &= \frac{1}{2}(\omega(v_1, v_2) - \omega(v_2, v_1)). \end{aligned}$$

Erityisesti pätee $\omega = \text{Sym } \omega + \text{Alt } \omega$. Harjoitustehtävässä 8.9 ja yleisemmin Esimerkissä 8.29 näemme, että vastaava väite ei päde korkeammissa dimensioissa.

(2) $S_3 = \{\text{id}, (12), (13), (23), (123) = (12)(23), (132) = (13)(23)\}$. Siis

$$\begin{aligned} \text{Sym}(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3) &= \frac{1}{6}(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2 \\ &\quad + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3) &= \frac{1}{6}(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 - \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3 - \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2 \\ &\quad - \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2). \end{aligned}$$

³Merkillinen tilavuus voi olla myös negatiivinen.

Propositio 7.14. (1) *Alt ja Sym ovat lineaarikuvauksia.*

(2) *Alt $A \in A^k(V)$ ja $\text{Sym } A \in \text{Sym}^k(V)$ kaikilla $A \in T^{(0,k)}(V)$.*

(3) *Olkoon $\alpha \in T^{(0,k)}(V)$. Tällöin $\text{Sym } \alpha = \alpha$, jos ja vain jos $\alpha \in S^k(V)$.*

(4) *Olkoon $\alpha \in T^{(0,k)}(V)$. Tällöin $\text{Alt } \alpha = \alpha$, jos ja vain jos $\alpha \in A^k(V)$.*

Proof. Kohdat (1), (3) ja (4) tehdään Harjoitustehtävässä 8.7.

(2) Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$ ja olkoon $\tau \in S_k$. Tällöin Lemman 8.7 nojalla

$$\tau \cdot \text{Sym } A = \tau \cdot \left(\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \sigma \cdot A \right) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} (\tau \sigma) \cdot A = \text{Sym}(A),$$

koska vasen siirto alkiolla τ on permutaatioiden joukon bijektio itselleen. Vastaavasti

$$\begin{aligned} \tau \cdot \text{Alt } A &= \tau \cdot \left(\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sign}(\sigma) \sigma \cdot A \right) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sign}(\sigma) (\tau \sigma) \cdot A \\ &= \text{sign}(\tau) \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sign}(\tau \sigma) (\tau \sigma) \cdot A = \text{sign}(\tau) \text{Alt}(A), \end{aligned}$$

koska sign on homomorfismi. □

Seuraus 7.15. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Tällöin $S^k(V)$ ja $A^k(V)$ ovat vektoriavaruuksia. Lisäksi*

$$S^k(V) = \text{Sym}(T^{(0,k)}(V))$$

ja

$$A^k(V) = \text{Alt}(T^{(0,k)}(V)).$$

Jos $k \geq 2$, niin $\text{Sym}(A^k(V)) = \{0\} = \text{Alt}(S^k(V))$.

Proof. Harjoitustehtävä 8.8. □

7.4 Ulkoista algebraa

Alternoivat tensorit ovat tärkeitä tällä kurssilla. Tässä luvussa määrittelemme ulkoisen tulon, joka antaa laskutoimituksen vektoriavaruuden kaikkien multikovektorien avaruuteen.⁴

Olkoot $k, \ell \geq 1$. Alternoivien tensorien $\omega \in A^k(V)$ ja $\eta \in A^\ell(V)$ *ulkoinen tulo*^a eli *väkäitulo*^b on

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \in A^{k+\ell}(V).$$

Lisäksi reaalityyluvulle $c \in \mathbb{R}$ määritellään

$$c \wedge \omega = c\omega.$$

^aexternal product

^bwedge product

⁴Katso luku 8.6.

Esimerkki 7.16. Olkoot $\omega, \eta \in A^1(V)$. Tällöin

$$\omega \wedge \eta = \frac{2}{1} \frac{1}{2} (\omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega) = (\omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega).$$

Erityisesti $\omega \wedge \omega = 0$.

Propositio 7.17. (1) Olkoot $\omega \in A^k(V)$, $\alpha, \beta \in A^\ell(V)$ ja olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\omega \wedge (a\alpha + b\beta) = a\omega \wedge \alpha + b\omega \wedge \beta$$

ja

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \omega = a\alpha \wedge \omega + b\beta \wedge \omega.$$

(2) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$ kaikille $\alpha \in A^k(V)$ ja $\beta \in A^\ell(V)$.

Proof. (1) Väite seuraa tensoritulon bilineaarisuudesta, Lemma 8.6.

(2) Olkoon $\sigma = (1\ 2 \cdots k + \ell)$. Huomataan ensin, että

$$\alpha \otimes \beta(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = (\sigma^k \cdot (\beta \otimes \alpha))(v_1, \dots, v_{k+\ell}).$$

Syklin σ merkki on $(-1)^{k+\ell+1}$, joten $\text{sign}(\sigma^k) = (-1)^{k(k+\ell+1)} = (-1)^{k\ell}$. Siis

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \text{Alt}(\sigma^k \cdot (\beta \otimes \alpha)) \\ &= \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\tau \in S_{k+\ell}} \text{sign}(\tau) \tau \cdot (\sigma^k \cdot (\beta \otimes \alpha)) \\ &= \frac{1}{k! \ell!} \text{sign}(\sigma^k) \sum_{\tau \in S_{k+\ell}} \text{sign}(\tau \sigma^k) (\tau \sigma^k) \cdot (\beta \otimes \alpha) \\ &= \frac{1}{k! \ell!} (-1)^{k\ell} \sum_{\tau \in S_{k+\ell}} \text{sign}(\tau) \tau \cdot (\beta \otimes \alpha) \\ &= (-1)^{k\ell} \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \text{Alt}(\beta \otimes \alpha) = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha. \end{aligned}$$

Viides yhtäsuuruus seuraa siitä, että oikea siirto permutaatiolla σ^k on ryhmän $S_{++\ell}$ bijektio itselleen $\square$

Seuraus 7.18. Jos $A \in T^{(0,k)}$ ja k on pariton, niin $A \wedge A = 0$. $\square$

Lemma 7.19. Olkoot $S \in T^{(0,k)}(V)$ ja $T \in T^{(0,\ell)}(V)$. Tällöin

$$\text{Alt}(\text{Alt } S \otimes T) = \text{Alt}(S \otimes T) = \text{Alt}(S \otimes \text{Alt } T).$$

Proof. Todistamme väitteen ensimmäisen yhtälön. Olkoon

$$G = \{\sigma \in S_{k+\ell} : \sigma(k+j) = k+j \text{ kaikilla } 1 \leq j \leq \ell\} < S_{k+\ell}.$$

Määritelmän ja Lemman 8.7 nojalla

$$\begin{aligned}
\text{Alt}(\text{Alt } S \otimes T) &= \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \text{sign}(\sigma) \sigma \cdot (\text{Alt } S \otimes T) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \text{sign}(\sigma) \sigma \cdot \left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \text{sign}(\tau) \tau \cdot S \otimes T \right) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)! k!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \text{sign}(\sigma) \sigma \cdot \left(\sum_{\tau \in S_k} \text{sign}(\tau) \tau \cdot (S \otimes T) \right) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)! k!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \sum_{\tau \in G} \text{sign}(\sigma) \sigma \cdot \left(\text{sign}(\tau) \tau \cdot (S \otimes T) \right) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)! k!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \sum_{\tau \in G} \text{sign}(\sigma\tau) \sigma\tau \cdot (S \otimes T) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \text{sign}(\sigma) \sigma \cdot (S \otimes T) = \text{Alt}(S \otimes T),
\end{aligned}$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa käytämme sitä, että oikea siirto permutaatiolla $\tau \in G$ on ryhmän $S_{k+\ell}$ bijektio itselleen. Siis tarkasteltavassa kaksinkertaisessa summassa lasketaan $k! = \#G = \#S_k$ kertaa summa yli ryhmän $S_{k+\ell}$.

Väitteen jälkimmäinen yhtälö todistetaan samaan tapaan. $\square$

Propositio 7.20. Jos $\omega \in A^k(V)$, $\alpha \in A^\ell(V)$ ja $\beta \in A^m(V)$, niin

$$(\omega \wedge \alpha) \wedge \beta = \frac{(k+\ell+m)!}{k! \ell! m!} \text{Alt}(\omega \otimes \alpha \otimes \beta) = \omega \wedge (\alpha \wedge \beta).$$

Proof. Määritelmien ja Lemman 8.19 nojalla

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \alpha) \wedge \beta &= \frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)! m!} \text{Alt}((\omega \wedge \alpha) \otimes \beta) \\
&= \frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)! m!} \text{Alt}\left(\frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \alpha) \otimes \beta\right) \\
&= \frac{(k+\ell+m)!}{k! \ell! m!} \text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \alpha) \otimes \beta) = \frac{(k+\ell+m)!}{k! \ell! m!} \text{Alt}(\omega \otimes \alpha \otimes \beta).
\end{aligned}$$

Yhtälö $\omega \wedge (\alpha \wedge \beta) = \text{Alt}(\omega \otimes \alpha \otimes \beta)$ todistetaan samalla tavalla. $\square$

Propositio 8.20 nojalla ulkoisen tulon merkintä $\omega \wedge \alpha \wedge \beta$ on yksiselitteinen ja voimme jättää sulut merkitsemättä tällaisissa lausekkeissa.

Seuraus 7.21. Olkoot $\omega^1, \dots, \omega^k \in A^1(V)$. Jos $\omega^i = \omega^j$ joillain indekseillä $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, niin $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$.

Proof. Harjoitustehtävä 8.11 $\square$

Seuraus 7.22. Olkoon V n -ulotteinen vektoriavaruus. Kovektorit $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \neq 0$.

Proof. Harjoitustehtävä 8.12 $\square$

Propositio 7.23. Jos $\omega^1, \dots, \omega^k \in T^{(0,1)}(V)$ ja $v_1, \dots, v_k \in V$, niin

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\omega^i v_j)_{i,j=1}^k.$$

Proof. Ulkoisen tulon ja determinantin määritelmistä saamme yhtälöketjun

$$\begin{aligned} & \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, v_2, \dots, v_k) \\ &= k! \operatorname{Alt}(\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \dots \otimes \omega^k)(v_1, v_2, \dots, v_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma) (\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \dots \otimes \omega^k)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma) \omega^1 v_{\sigma(1)} \omega^2 v_{\sigma(2)} \dots \omega^k v_{\sigma(k)} = \det(\omega^i v_j)_{i,j=1}^k. \end{aligned} \quad \square$$

7.5 Alternoivien tensorien kanta

Propositio 7.24. Olkoon V n -ulotteinen vektoriavaruus ja olkoon $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ duaaliavaruuden V^* kanta. Tällöin k -kovektorien joukko

$$\mathcal{A}_k = \left\{ \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \right\}$$

muodostaa avaruuden $A_k(V)$ kannan.

Proof. Proposition 8.4 todistuksessa näimme, että tensorit $\omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \dots \otimes \omega^{i_k}$ virittävät avaruuden $T^{(0,k)}(V)$. Proposition 8.14 nojalla Alt on lineaarikuvaus ja $A^k(V) = \operatorname{Alt}(A^k(V)) = \operatorname{Alt}(T^{(0,k)}(V))$, joten k -kovektorit

$$\operatorname{Alt}(\omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \dots \otimes \omega^{i_k}) = \frac{1}{k!} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k},$$

$1 \leq i_j \leq n$ kaikilla $1 \leq j \leq k$ virittävät avaruuden $A_k(V)$.

Jos $\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$, niin Proposition 8.17(2) nojalla

$$\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} = \pm \omega^{j_1} \wedge \omega^{j_2} \wedge \dots \wedge \omega^{j_k}$$

ja $\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} = 0$, jos $i_r = i_s$ joillain $1 \leq r < s \leq n$. Siis joukko $\mathcal{A}_k$ virittää avaruuden $A^k(V)$.

Olkoon $(v_1, \dots, v_k)$ avaruuden V kanta, joka on duaalinen kannan $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ kanssa. Oletetaan, että

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} = 0.$$

Olkoot $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Tällöin Proposition 8.23 nojalla

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 i_2 \dots i_k} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \right)(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}) \\ &= a_{j_1 j_2 \dots j_k} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}) \\ &= a_{j_1 j_2 \dots j_k} \det(\omega^i v_{j_b})_{a,b=1}^k = a_{j_1 j_2 \dots j_k} \det(\delta_{j_b}^i)_{a,b=1}^k = a_{j_1 j_2 \dots j_k}. \end{aligned}$$

Joukko $\mathcal{A}$ on lineaarisesti riippumaton, koska kaikki kertoimet summassa ovat nollija. $\square$

Seuraus 7.25. Jos V on n -ulotteinen vektoriavaruus, niin $A^k(V)$ on $\binom{n}{k}$ -ulotteinen vektoriavaruus. $\square$

Seuraus 7.26. Jos $\omega \in A^n(\mathbb{R}^n)$, niin $\omega = c \det$ jollain $c \in \mathbb{R}$.

Proof. Vektoriavaruus $A^n(\mathbb{R}^n)$ on 1-ulotteinen Seurauksen 8.25 nojalla, joten n -kovektori $\det \in A^n(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ virittää sen. $\square$

Käytämme seuraavaa tulosta luvussa 10 sileiden n -muotojen alkukuvien tarkastelussa, katso Lause 10.12.

Propositio 7.27. Olkoon $(v_1, \dots, v_n)$ vektoriavaruuden V kanta, olkoon $A = (a_i^j)$ reaallinen $n \times n$ -matriisi ja olkoot $w_i = \sum_{j=1}^n a_i^j v_j$, kaikilla $1 \leq i \leq n$. Olkoon $\omega \in A^n(\mathbb{R}^n)$. Tällöin

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det A \omega(v_1, \dots, v_n).$$

Proof. Kuvaus $\eta: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\eta(u_1, \dots, u_n) = \omega\left(\sum_{j=1}^n u_1^j v_j, \dots, \sum_{j=1}^n u_n^j v_j\right).$$

on alternoiva n -tensori. Seurauksen 8.26 nojalla $\eta = c \det$ jollain $c \in \mathbb{R}$. Vakio c voidaan määrittää laskemalla muodon ω arvo sopivasti valituilla vektoreilla. Huomaamme, että

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \eta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = c \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = c, \quad (7.2)$$

väite seuraa valitsemalla $u_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ jokaisella $1 \leq i \leq n$. Yhtälön (8.2) nojalla

$$\begin{aligned} \omega(w_1, \dots, w_n) &= \omega\left(\sum_{j=1}^n a_1^j v_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_n^j v_j\right) = \eta(a_1, \dots, a_n) \\ &= c \det A = \omega(v_1, \dots, v_n) \det A. \end{aligned} \quad \square$$

Emme tarvitse seuraavaa tulosta tällä kurssilla.

Lause 7.28. Jos V on n -ulotteinen vektoriavaruus, niin $\dim S^k(V) = \binom{n+k-1}{k}$.

Proof. Todistuksessa tarvittavat kombinatoriset ainekset esitetään esimerkiksi lähteessä [?, luku 1.2]. $\square$

Esimerkki 7.29. Proposition 8.4, Seurauksen 8.25 ja Lauseen 8.28 nojalla

$$\dim T^{(0,3)}(\mathbb{E}^3) = 3^3 = 27 > 21 = \dim \text{Sym}^3(\mathbb{E}^3) + \dim \text{Alt}^3(\mathbb{E}^3).$$

Siis on kovariantteja 3-tensoreita, jotka eivät ole symmetristen ja alternoivien tensorien summia. Harjoitustehtävässä 8.9 osoitetaan, että $\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 \in T^{(0,3)}(\mathbb{E}^3)$ on esimerkki tällaisesta tensorista.

7.6 Grassmannin algebra $A(V)$

Seuraus 7.30. Olkoon V n -ulotteinen vektoriavaruus. Jos $k > n$, niin $A^k(V) = \{0\}$. $\square$

Äärellisulotteisen vektoriavaruuden V ulkoinen algebra eli Grassmannin algebra on

$$A(V) = \Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} A^k(V),$$

jossa kertolasku on ulkoinen tulo $\wedge$.

Jos $a \in A^k(V) \subset A(V)$, niin muodon a aste on k .

Vektoriavaruuksien suora summa $\bigoplus_{k=0}^n A^k(V)$ on vektoriavaruus $A^0(V) \times \cdots \times A^n(V)$. Merkintää käytetään, koska algebran $A(V)$ alkiot on tapana kirjoittaa summana muodoista, joiden asteet eivät välttämättä ole samoja, esimerkiksi $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \in A(\mathbb{R}^3)$.

Seuraus 7.31. Olkoon V ja olkoon $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ duaaliavaruuden V^* kanta. Tällöin k -kovektorien joukko $\bigcup_{k=0}^n \mathcal{A}_k$ muodostaa avaruuden $A(V)$ kannan. $\square$

Seuraus 7.32. (1) Ulkoinen tulo on Grassmannin algebran assosiatiivinen laskutoimitus, joka on distributiivinen yhteenlaskun suhteen.

(2) $A^k(V) \wedge A^\ell(V) \subset A^{k+\ell}(V)$, missä $A^{k+\ell}(V) = \{0\} \subset A(V)$, jos $k + \ell > \dim V$.⁵

Proof. Seuraa Propositioista 8.17 ja 8.20. $\square$

Lemma 7.33. Jos $\dim V = n$, niin $\dim A(V) = 2^n$.

Proof. Seurauksen 8.25 ja tunnetun binomikertoimien yhteenlaskutuloksen nojalla

$$\dim A(V) = \sum_{k=0}^n \dim A^k(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \quad \square$$

Harjoitustehtäviä

7.1. Todista Lemma 8.2.

7.2. Esitä Esimerkin 8.1(3) evaluaatiotensori $E \in T^{(1,1)}(\mathbb{R}^n)$,

$$E(\omega, v) = \omega v,$$

vektoreiden ja lineaaristen 1-muotojen tensoritulon avulla.

7.3. Osoita, että $T^{(r,s)}(V)$ on vektoriavaruus.

7.4. Osoita, että tensorit $\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$, $1 \leq i, j \leq 3$ virittävät avaruuden $T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$. Käy läpi Proposition 8.4 laskut yksityiskohtaisesti.

7.5. Todista Lemma 8.6.

⁵Algebra $A(V)$ on *astealgebra*, englanniksi *graded algebra*.

7.6. Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$. Osoita, että

- (1) A on symmetrinen, jos ja vain jos $\tau \cdot A = A$ jokaiselle vaihdolle $\tau \in S_k$ ja
- (2) A on alternoiva, jos ja vain jos $\tau \cdot A = -A$ jokaiselle vaihdolle $\tau \in S_k$.

7.7. Todista Proposition 8.14 kohdat (1), (3) ja (4).

7.8. Todista Seuraus 8.15.

7.9. Osoita, että tensori $\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 \in T^{(0,3)}(\mathbb{E}^3)$ ei ole symmetrisen ja antisymmetrisen tensorin summa.

7.10. Anna esimerkki 2-kovektorista $\omega \in A(\mathbb{R}^4)$, jolle $\omega \wedge \omega \neq 0$.

7.11. Todista Seuraus 8.21.

7.12. Todista Seuraus 8.22.

7.13. Osoita, että Esimerkissä 8.10 määritelty determinantti $\det$ on alternoiva $(0,k)$ -tensori. Osoita, että

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) v_1^{\sigma(1)} v_2^{\sigma(2)} \dots v_n^{\sigma(n)}.$$

Chapter 8

Tensorikimput ja tensorikentät

Tässä luvussa tarkastelemme tensorikenttiä, jotka yleistävät vektorikentän ja 1-muodon käsitteet sileän moniston M tangenttiavaruuksien $T_p M$, $p \in M$, multilineaarikuvauksien tilanteeseen. Osoitamme myös, että tensorikenttien avaruus samastuu luonnollisella tavalla vektorikenttien $\mathfrak{F}(M)$ -modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorien $\mathfrak{F}(M)$ -modulin kanssa.

8.1 Tensorikimput ja tensorikentät

Seuraava määritelmä yleistää tangentti- ja kotangenttikimput määritelmät.

Olkoon M sileä monisto. Moniston M (r, s) -*tensorikimppu* on^a

$$T^{(r,s)}M = \bigsqcup_{p \in M} T^{(r,s)}(T_p M)$$

varustettuna sileän moniston rakenteella, joka määritellään kuten tangentti- ja kotangenttikimpuille käyttämällä jokaisessa moniston M sileässä kartassa (U, ϕ) Proposition 8.4 antamaa avaruuden $T^{(r,s)}(T_p M)$ kantaa, kun $E_i = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ ja $\varepsilon^i = dx_p^i$ jokaiselle $p \in U$.

Tensorikimput $T^{(r,s)}M$ (*kantapisteprojektio*) on kuvaus $\pi = \pi_M: T^{(r,s)}M \rightarrow M$, $\pi(A_p) = p$ kaikille $A_p \in T^{(r,s)}(T_p M)$.

^aLee [?] käyttää tensorikimpuille merkintää $T^{(r,s)}(TM)$ ja erilaisia merkintöjä ko- ja kontravarianttien tensorien kimpuille.

Propositio 8.1. *Sileän moniston tensorikimput ovat sileitä monistoja. Kantapisteprojektiot ovat sileitä kuvauksia.*

Proof. Todistetaan kuten Propositio ??.

□

Esimerkki 8.2. $T^{(1,0)}M = TM$ ja $T^{(0,1)}M = T^*M$.

Olkoon M sileä monisto. Kuvaus $A: M \rightarrow T^{(r,s)}M$, jolle $\pi \circ A = \text{id}_M$, on *tensorikenttä* tai tensorikimput $T^{(r,s)}M$ (*globaali*) *leikkaus*.

Olkoon

$$\Gamma(T^{(r,s)}M) = \{A: M \rightarrow T^{(r,s)}M : A \text{ on sileä}\}.$$

Käytämme merkintää

$$A_p = A(p).$$

Olkoon M sileä monisto. Tensorikenttien $A, B \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ *summa* on $A + B \in T^{(r,s)}M$, jolle

$$(A + B)_p = A_p + B_p.$$

Jos $f \in \mathfrak{F}(M)$, niin $fA \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ on tensori

$$(fA)_p = f(p)A_p.$$

Tensorikenttien $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ ja $B \in \Gamma(T^{(t,u)}M)$ *tensoritulo* on $A \otimes B \in T^{(r+t,s+u)}M$, jolle

$$(A \otimes B)_p = A_p \otimes B_p.$$

Proposition 8.4 nojalla jokainen tensorikenttä $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ voidaan kirjoittaa lokaaleissa koordinaateissa muodossa

$$A_p = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r, \\ \ell_1, \dots, \ell_s=1}}^n A_{\ell_1, \dots, \ell_s}^{j_1, \dots, j_r}(p) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \Big|_p \otimes dx_p^{\ell_1} \otimes \dots \otimes dx_p^{\ell_s}. \quad (8.1)$$

Propositio 8.3. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M . Olkoon $A: M \rightarrow T^{(r,s)}M$ kuvaus, jolle $\pi \circ \omega = \text{id}_M$. Tällöin A on sileä tensorikenttä joukossa U , jos ja vain jos sen kerroinfunktiot esityksessä (9.1) ovat sileitä.*

Proof. Todistetaan kuten Propositio ??.

□

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoot (U, x) ja (V, y) sileitä karttoja pisteessä p . Luvuissa 3.3 ja 7.7 osoitimme, että kartan (U, x) koordinaattivektorit ja -muodot saadaan kartan (V, y) koordinaattivektoreista ja -muodoista lausekkeilla

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (8.2)$$

ja

$$dx^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} dy^i. \quad (8.3)$$

Jos

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r, \\ \ell_1, \dots, \ell_s=1}}^n A_{\ell_1, \dots, \ell_s}^{j_1, \dots, j_r}(p) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \Big|_p \otimes dx_p^{\ell_1} \otimes \dots \otimes dx_p^{\ell_s} \\ &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r, \\ \ell_1, \dots, \ell_s=1}}^n \tilde{A}_{\ell_1, \dots, \ell_s}^{j_1, \dots, j_r}(p) \frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_r}} \Big|_p \otimes dy_p^{\ell_1} \otimes \dots \otimes dy_p^{\ell_s}, \end{aligned}$$

niin käyttämällä yhtälöitä (9.2) ja (9.3) ja tensoritulon multilineaarisuutta saadaan

$$\tilde{A}_{b_1, \dots, b_s}^{a_1, \dots, a_r} = \sum A_{\ell_1, \dots, \ell_s}^{j_1, \dots, j_r} \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{a_r}}{\partial x^{j_r}} \frac{\partial x^{\ell_1}}{\partial y^{b_1}} \cdots \frac{\partial x^{\ell_s}}{\partial y^{b_s}} \quad (8.4)$$

Klassisessa differentiaaligeometriassa ja Riemannin geometriassa (r, s) -tensori on jokaiseen lokaaliin koordinaattiin liittyvä n^{r+s} sileän funktion indeksoitu kokoelma, joka muuntuu kartanvaihdoissa yhtälön (9.4) mukaisesti.

Tensorikentällä $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ on r kontravarianttia ja s kovarianttia muuttujaa.

Jos A on $(0, s)$ -tensorikenttä, niin A on kovariantti s -tensorikenttä.

Jos A on $(r, 0)$ -tensorikenttä, niin A on kontravariantti r -tensorikenttä.

Jos A on (r, s) -tensorikenttä ja $r \neq 0 \neq s$, niin A on sekatenorikenttä.

Esimerkki 8.4. (1) Sileät vektorikentät ovat kontravariantteja 1-tensorikenttiä ja sileät 1-muodot ovat kovariantteja 1-tensorikenttiä:

$$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(T^{(1,0)}M) \quad \text{ja} \quad \mathfrak{X}^*(M) = \Gamma(T^{(0,1)}M).$$

(2) Lauseke $\sum_{k=1}^n dx^k \otimes dx^k$ on kovariantti 2-tensori sileällä monistolla $\mathbb{E}^n$.

8.2 Kovariantin tensorikentän alkukuva

Olkoot M_1 ja M_2 sileitä monistoja ja olkoon $A \in \Gamma(T^{(0,m)}(M_2))$. Olkoon $F: M_1 \rightarrow M_2$ sileä kuvaus. Kovariantin tensorikentän $A \in \text{alkukuva}^a$ on kuvaus $F^*A: M_1 \rightarrow T^{(0,k)}(M_1)$, jolle pätee

$$(F^*A)_p(v_1, \dots, v_k) = A(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k)$$

kaikille $v_1, \dots, v_k \in T_p M_1$ kaikille $p \in M_1$.

^aEnglanniksi *pullback*.

Kovariantin tensorin alkukuvan perusominaisuudet todistetaan samaan tapaan kuin 1-muotojen alkukuvalla tehtiin luvussa 7.5.

Propositio 8.5. *Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F: M \rightarrow N$ sileä kuvaus. Tällöin*

(1) $F^*(A + B) = F^*(A) + F^*(B)$ kaikilla $A, B \in \Gamma(T^{(0,k)}(N))$.

(2) $F^*(A \otimes B) = F^*(A) \otimes F^*(B)$ kaikilla $A \in \Gamma(T^{(0,k)}(N))$ ja $B \in \Gamma(T^{(0,m)}(N))$.

(3) $F^*(f A) = (f \circ F) F^*(A)$ kaikilla $A \in \Gamma(T^{(0,k)}(N))$ ja $f \in \mathfrak{F}(N)$.

Proof. Kohdat (1) ja (2) todistetaan Harjoitustehtävässä 9.1.

(3) Olkoon $p \in M$ ja olkoot $v_1, \dots, v_k \in T_p M$. Alkukuvan määritelmän nojalla ja koska $dF_p v_1, \dots, dF_p v_k \in T_{F(p)} N$,

$$\begin{aligned} (F^*(fB))_p(v_1, \dots, v_k) &= (fB)_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k) \\ &= f(F(p)) B_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k) \\ &= (f \circ F)(p) F^* B(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Propositio 8.6. *Olkoon M sileä monisto.*

(1) *Jos $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ ja $B \in \Gamma(T^{(t,u)}M)$, niin $A \otimes B \in \Gamma(T^{(r+t,s+u)}M)$.*

(2) *Olkoon $F: M \rightarrow N$ sileä kuvaus ja olkoon $A \in \Gamma(T^{(0,s)}(N))$. Tällöin $F^*A \in \Gamma(T^{(0,s)}(M))$*

Proof. (1) Harjoitustehtävä 9.2.

(2) Olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M ja olkoon (V, ψ) sileä kartta monistolla N siten, että $F(U) \subset V$. Olkoot $(x^1, \dots, x^m)$ ja $(y^1, \dots, y^n)$ kuvausten ϕ ja ψ komponentit. Proposition 9.3 nojalla on sileät funktiot $A_{\ell_1, \dots, \ell_s} \in \mathfrak{F}(V)$, joille

$$A = \sum_{\ell_1, \dots, \ell_s=1}^n A_{\ell_1, \dots, \ell_s} dy^{\ell_1} \otimes \dots \otimes dy^{\ell_s}.$$

Joukossa U pätee Proposition 9.5 nojalla

$$\begin{aligned} F^*A &= F^*\left(\sum_{\ell_1, \dots, \ell_s=1}^n A_{\ell_1, \dots, \ell_s} dy^{\ell_1} \otimes \dots \otimes dy^{\ell_s}\right) \\ &= \sum_{\ell_1, \dots, \ell_s=1}^n A_{\ell_1, \dots, \ell_s} \circ F \, F^* dy^{\ell_1} \otimes \dots \otimes F^* dy^{\ell_s} \\ &= \sum_{\ell_1, \dots, \ell_s=1}^n A_{\ell_1, \dots, \ell_s} \circ F \, d(y^{\ell_1} \circ F) \otimes \dots \otimes d(y^{\ell_s} \circ F). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Funktio $A_{\ell_1, \dots, \ell_s} \circ F$ ja $y^k \circ F$ ovat sileitä, joten väite seuraa Seurauksen 7.16 ja Proposition 9.3 nojalla. $\square$

Yhtälössä (9.5) esiintyvät differentiaalit voi tarvittaessa vielä avata Lemman 7.15 avulla kuten 1-muodoille tehtiin yhtälössä (7.9).

Propositio 8.7. *Olkoot $F_1: M_1 \rightarrow M_2$ ja $F_2: M_2 \rightarrow M_3$ sileitä kuvauksia ja olkoon B sileä kovariantti tensorikenttä monistolla M_3 . Tällöin*

$$(F_2 \circ F_1)^* B = F_1^*(F_2^* B).$$

Proof. Harjoitustehtävä 9.13 $\square$

Olkoon $S \subset M$ sileän moniston M upotettu alimonisto ja olkoon $i: S \rightarrow M$ inklusiokuvaus. Kovariantin tensorin $A \in \Gamma(T^{(0,k)}(M))$ rajoittuma alimonistolle S on i^*A ,

$$(i^*A)_p(v_1, \dots, v_k) = A_p(di(v_1), \dots, di(v_k)) = A_p(v_1, \dots, v_k)$$

kaikille $v_1, \dots, v_k \in T_p S$ kaikilla $p \in S$.

8.3 Riemannin metriikka

Olkoon M sileä monisto. Symmetrinen kovariantti 2-tensorikenttä $g \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$ on *positiividefiniitti*, jos g_p on positiividefiniitti jokaisella $p \in M$.

Symmetrinen positiividefiniitti kovariantti 2-tensorikenttä g monistolla M on *Riemannin metriikka* eli *metrinen tensori*. Pari (M, g) on *Riemannin monisto*.

Riemannin metriikka kirjoitetaan lokaaleissa koordinaateissa usein ilman tensoritulon merkkiä

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Muodollisesti

$$dx^i dx^j = \text{Sym}(dx^i \otimes dx^j) = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$$

on $(0,1)$ -tensorikenttien dx^i ja dx^j *symmetrinen tulo*.¹

Esimerkki 8.8. Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ luonnollinen Riemannin metriikka on kanonisissa koordinaateissa

$$g_{\mathbb{E}} = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

Näissä koordinaateissa $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.

(2) Riemannin metriikka

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$$

ylemmässä *puoliavaruudessa* $\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$ määrää *hyperbolisen avaruuden*

$$\mathbb{H}^n = \left(\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}, g_{\mathbb{H}} \right),$$

tai tarkemmin *hyperbolisen avaruuden puoliavaruusmallin*.

(3) Olkoon (M, g) Riemannin monisto ja olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$, $f > 0$. Tällöin (M, fg) on Riemannin monisto, joka on saatu Riemannin monistosta (M, g) *metriikan konformisella muunnoksella*. Kohdan (2) hyperbolinen metriikka saadaan kertomalla euklidinen Riemannin metriikka funktiolla $f \in \mathfrak{F}(\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\})$, $f(x) = (x^n)^{-2}$.

Propositio 8.9. *Olkoon S sileä monisto ja olkoon (M, g) Riemannin monisto. Olkoon $F: S \rightarrow M$ immersio. Tällöin F^*g on Riemannin metriikka.*

Proof. Harjoitustehtävä 9.3. □

Esimerkki 8.10. Propositionissa 6.9 osoitimme, että upotetun alimoniston inkluusiokuvaus on upotus, erityisesti siis se on immersio. Esimerkiksi Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^{n+1}$ Riemannin metriikan rajoittuma monistolle $\mathbb{S}^n$ määrää Riemannin metriikan sileällä monistolla $\mathbb{S}^n$. Tämä on pallonpinnan $\mathbb{S}^n$ *tavallinen Riemannin metriikka* tai *pyöreä Riemannin metriikka*.

Lause 8.11. *Jokaisella sileällä monistolla on Riemannin metriikka.*

Proof. Whitneyyn upotuslauseen² nojalla jokainen sileä monisto voidaan upottaa sileäksi alimonistoksi euklidiseen avaruuteen. Väite seuraa Whitneyyn upotuslauseesta ja Propositionista 9.9. □

¹Symmetrinen tulo on luvussa 8.4 määritellyn ulkoisen tulon vastine symmetristen tensorien ja tensorikenttien tilanteessa.

²Lause 6.16

Esimerkki 8.12. Euklidisen tason Riemannin metriikan lauseke napakoordinaateissa saadaan Esimerkin 3.11, yhtälön (9.5) ja Lemman 7.15 avulla

$$\begin{aligned} g &= dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 = d(r \cos \theta) \otimes d(r \cos \theta) + d(r \sin \theta) \otimes d(r \sin \theta) \\ &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \otimes (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + (\sin \theta dr + r \sin \theta d\theta) \otimes (\sin \theta dr + r \sin \theta d\theta) \\ &= dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta = dr^2 + r^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

8.4 Modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorit

Tensorit voidaan määritellä myös $\mathfrak{F}(M)$ -modulille $\mathfrak{X}(M)$ laajentamalla määritelmä rengaskertoimisten modulien lineaarialgebran käsitteillä samaan tapaan kuin vektorikentille tehtiin Luvussa ??.

Propositio 8.13. Jos M on sileä monisto, niin $\mathfrak{X}^*(M)$ on reaalin vektoriavaruus ja $\mathfrak{F}(M)$ -moduli.

Proof. Harjoitustehtävä 9.7. □

Olkoon K kommutativinen rentas ja olkoot M_1 ja M_2 K -moduleja. Kuvaus $L: M_1 \rightarrow M_2$ on K -lineaarikuvaus, jos

$$L(am + bn) = aL(m) + bL(n)$$

kaikille $a, b \in K$ ja kaikille $m, n \in M_1$.

Lemman 7.13 mukaan jokainen sileä 1-muoto $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ määrää $\mathfrak{F}(M)$ -lineaarisen kuvauksen $X \mapsto \omega X$ modulilta $\mathfrak{X}(M)$ renkaaseen $\mathfrak{F}(M)$.

Olkoot V ja W R -moduleja. Kuvaus $L: V \rightarrow W$ on R -lineaarikuvaus, jos

$$L(ru + sv) = rL(u) + sL(v)$$

kaikille $r, s \in R$ ja $u, v \in V$.

Olkoot $V_1, \dots, V_n$ ja W R -moduleja. Kuvaus $A: \prod V_i \rightarrow W$ on R -multilineaarinen, jos kuvaus

$$v \mapsto A(v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v, v_{s+1}, \dots, v_n)$$

on lineaarinen kaikille $1 \leq s \leq n$ ja kaikille $v_i \in V_i, i \neq s$.

R -modulin V duaali V^* on R -lineaarikuvausten $L: V \rightarrow R$ R -moduli.

Jos $A: (V^*)^r \times V^s \rightarrow R$ on R -multilineaarikuvaus, niin se on (r, s) -tensori modulilla V .

Proposition ?? nojalla $\mathfrak{X}(M)$ on $\mathfrak{F}(M)$ -moduli.

Propositio 8.14. Olkoon M sileä monisto. Vektorikenttien modulin $\mathfrak{X}(M)$ (r, s) -tensorit muodostavat $\mathfrak{F}(M)$ -modulin $\mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$.

Proof. Harjoitustehtävä 9.8. □

Kun osoitetaan kuvaus $A: (\mathfrak{X}^*(M))^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensoriksi, tulee näyttää, että A on $\mathfrak{F}(M)$ -lineaarinen jokaisessa muuttujassaan. Yleensä käyttäytyminen yhteenlaskun suhteen on selvää, joten tarkastettavaksi jää vain *voidaanko funktiot siirtää oletetusta tensorista ulos* eli päteekö esimerkiksi kuvaukselle $B: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$

$$B(f_1 X_1, f_2 X_2) = f_1 f_2 B(X_1, X_2)$$

kaikille $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(M)$ ja kaikille $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Esimerkki 8.15. (1) Lemman 7.13 nojalla sileät 1-muodot ovat modulin $\mathfrak{X}(M)$ kovariantteja 1-tensoreita. Duaalisuudesta seuraa, että sileä vektorikenttä määrää kontravariantin 1-tensorin.

(2) Evaluaatiokuvaus $E: \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$, joka määritellään asettamalla

$$E(\omega, X) = \omega(X)$$

on vektorikenttien modulin $(1, 1)$ -tensori, sillä kaikille $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ ja $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ pätee Lemman 7.13 nojalla

$$E(f\omega, gX) = f\omega(gX) = fg\omega X$$

(3) Olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Kuvaus $B: \mathfrak{X}(M)^2 \rightarrow \mathfrak{F}(M)$, joka määritellään asettamalla $B(V, W) = V\omega(W)$ ei ole modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensori. Tarkastellaan jälkimmäistä muuttujaa. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$. Tällöin muodon ω $\mathfrak{F}(M)$ -lineaarisuuden ja Leibnitzin säännön nojalla

$$X\omega(fY) = X(f\omega Y) = (Xf)\omega Y + fX\omega Y.$$

Funktio $(Xf)\omega Y$ ei kuitenkaan yleensä ole nollafunktio, joten B ei ole tensori.

8.5 Modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorin arvo pisteessä

Tässä luvussa osoitamme, että modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorit vastaavat luonnollisella tavalla moniston M tensorikenttiä.

Lemma 8.16. *Olkoon $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$. Jos p on 1-muodon θ^i tai vektorikentän X_j nollakohta jollain $1 \leq i \leq r$ tai $1 \leq j \leq s$, niin $A(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^r, X_1, X_2, \dots, X_s)(p) = 0$.*

Proof. Tarkastellaan tilannetta, jossa A on $(1, 1)$ -tensori, yleisessä tapauksessa ei ole mitään oleellisesti erilaista.³

Olkoon $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ ja olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Olkoon $p \in M$ ja olkoon $(U, x) \ni p$ lokaali koordinaatti. Yhtälön (??) nojalla on funktiot $X_i \in \mathfrak{F}(U)$, joille $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ympäristössä U . Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ sileä töyssyfunktio pisteessä p . Tällöin saadaan luonnollisella tavalla määriteltä $fX^i \in \mathfrak{F}(M)$ ja $f \frac{\partial}{\partial x^1} \in \mathfrak{X}(M)$ ⁴. Käyttämällä tensorin A $\mathfrak{F}(M)$ -lineaarisuutta muuttujan X suhteen saadaan

$$f^2 A(\theta, X) = A(\theta, f^2 X) = A\left(\theta, \sum_i fX^i f \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = \sum_i fX^i A\left(\theta, f \frac{\partial}{\partial x^1}\right).$$

Jos $X^i(p) = 0$ kaikilla i , niin yhtälössä oikealla oleva summa on 0, joten $A(\theta, X)(p) = 0$. Tapaus, jossa p on 1-muodon nollakohta käsitellään samaan tapaan. $\square$

³Katso yleisen tapauksen todistus esimerkiksi lähteestä [?, Lemma 12.24].

⁴Töyssyfunktio f otetaan tässäkin käyttöön, jotta koordinaattien avulla saatu vektorikentän lauseke laajenee koko monistolle.

Propositio 8.17. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$. Olkoot θ^i, ω^i , $1 \leq i \leq r$, 1-muotoja ja olkoot X_j, Y_j , $1 \leq j \leq s$, vektorikenttiä siten, että $\theta^i|_p = \omega^i|_p$ ja $X_j|_p = Y_j|_p$ kaikilla $1 \leq i \leq r$ ja $1 \leq j \leq s$. Tällöin*

$$A(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^r, X_1, X_2, \dots, X_s) = A(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r, X_1, X_2, \dots, X_s).$$

Proof. Kun A on $(1,1)$ -tensori, saadaan multilinearisuuden ja Lemman 9.16 nojalla

$$A(\theta, X)(p) - A(\omega, Y)(p) = A(\theta - \omega, X)(p) + A(\omega, X - Y)(p) = 0 + 0 = 0.$$

Yleinen tapaus todistetaan samaan tapaan. □

Proposition 9.17 nojalla jokainen modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensori $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ määrää kuvauksen $A_p: (T_p M)^r \times (T_p^* M)^s \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla jokaiselle $X_{1,p}, \dots, X_{r,p} \in T_p M$ ja $\omega_p^1, \dots, \omega_p^s \in T_p^* M$

$$A_p(X_{1,p}, \dots, X_{r,p}, \omega_p^1, \dots, \omega_p^s) = A(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s),$$

missä $X_k \in \mathfrak{X}(M)$ ja $\omega^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ siten, että $X_k(p) = X_{k,p}$ ja $\omega^j(p) = \omega_p^j$ kaikilla $1 \leq k \leq r$ ja $1 \leq j \leq s$. On helppo tarkastaa, että $A_p \in T^{(r,s)}(T_p M)$. Tensori $A_p \in T^{(r,s)}(T_p M)$ on tensorin $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ arvo pisteessä p .

Kuvaus $p \mapsto A_p$ määrää tensorikentän. Tämän havainnon avulla saadaan tulos, joka osoittaa, että modulien avulla määritelty tensorien käsite on todellakin sama kuin tensorikimput leikkausten avulla annettu määritelmä.

Seuraus 8.18. *Jokainen tensori $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ määrää kanonisesti yksikäsitteisen sileän tensorikentän $A \in \Gamma(T^{(r,s)} M)$. Jokainen sileä tensorikenttä $A \in \Gamma(T^{(r,s)} M)$ määrää kanonisesti yksikäsitteisen tensorin $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)} M$.*

Proof. Harjoitustehtävä 9.12. □

Seurauksen 9.18 nojalla sileän moniston tensorikentät ja $\mathfrak{F}(M)$ -modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorit samastetaan jatkossa ja merkinnällä $\mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ voidaan viitata kumpaan tahansa.

Propositio 8.19. (1) $\mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^{(0,1)}(M) = \mathfrak{X}(M)^*$.

(2) $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^{(1,0)}(M)$. □

8.6 Yleistetyt tensorit

Jos $A: \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ on $\mathfrak{F}(M)$ -multilineaarikuvaus, niin sen avulla muodostettu kuvaus $\bar{A}: \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M)$,

$$\bar{A}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_s) = \theta A(X_1, X_2, \dots, X_s)$$

on $(1, s)$ -tensorikenttä. Tämän yhteyden perusteella kuvausta A voidaan kutsua *yleistetyksi tensorikentäksi*.

Esimerkki 8.20. Kaikki tällä kurssilla tarkasteltavat vektorikenttien keskeiset operaatiot eivät määrää tensorikenttiä edes tässä yleistetyssä mielessä. Tangenttivektoreiden $X_p, Y_p \in T_p M$ Lien tulo määritellään asettamalla

$$[X_p, Y_p]h = X_p Y_p h - Y_p X_p h$$

kaikille $h \in \mathfrak{F}(M)$. Se määrää kuvauksen $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, joka ei ole tensorikenttä yleistetyssä mielessä: Jos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ja $g \in \mathfrak{F}(M)$, niin

$$[X, gY] = g[X, Y] + (Xg)Y,$$

joten kuvaus ei ole $\mathfrak{F}(M)$ -bilineaarinen.⁵

Harjoitustehtäviä

8.1. Todista Proposition 9.5 kohdat (1) ja (2).

8.2. Todista Proposition 9.6 kohta (1).

8.3. Todista Proposition 9.9.

8.4. Olkoon g sileän moniston $\mathbb{S}^2$ tavallinen Riemannin metriikka, jonka euklidisen avaruuden Riemannin metriikka määrää alimonistolle $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$. Määritä $(\mathcal{S}^{-1})^*g$.

8.5. Määritä Riemannin moniston $\mathbb{S}^2$ tavallisen Riemannin metriikan lauseke pallokoordinaateissa.⁶

8.6. Kuvaus $F: B^n(0, 1) \rightarrow \mathbb{H}^n$,⁷

$$F(x) = -\mathbf{e}_n + 2 \frac{x + \mathbf{e}_n}{\|x + \mathbf{e}_n\|^2}$$

on diffeomorfismi.⁸ Määritä $F^*g_{\mathbb{H}}$. Halutessasi voit rajoittua tapaukseen $n = 2$.

8.7. Todista Proposition 9.13.

8.8. Todista Proposition 9.14.

8.9. Todista Proposition 9.17 väite (1, 2)-tensoreille.

8.10. 1-muodon $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ ulkoinen derivaatta $d\theta$ määritellään asettamalla

$$d\theta(X, Y) = X\theta Y - Y\theta X - \theta[X, Y]$$

kaikille $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Osoita, että $d\theta$ on kovariantti 2-tensorikenttä.

8.11. Määritä tensorikentän $E: \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$,

$$E(\omega, X) = \omega(X)$$

esitys lokaaleissa koordinaateissa.

⁵Katso Harjoitustehtävät ??-??.

⁶Katso Harjoitustehtävä 3.5. Nyt $r = 1$.

⁷Katso määritelmät Esimerkistä 9.8.

⁸Kuvaus F saadaan rajoittamalla yksikköpalloon inversio pallonpinnassa, jonka keskipiste on $-\mathbf{e}_n$ ja säde on $\sqrt{2}$.

8.12. Todista Seuraus 9.18.⁹

8.13. Todista Propositio 9.7

⁹Katso Propositio 7.17.

Chapter 9

Sileät differentiaali­muodot

Tässä luvussa siirrymme tarkastelemaan sileitä tensorikenttiä, joiden arvot ovat alternoivia $(0, k)$ -tensoreita. Määrittelemme differentiaali­muotojen ulkoisen derivaatan ja osoitamme, että jokaisella sileällä monistolla on yksikäsitteinen ulkoinen derivaatta. Luvun lopuksi tarkastelemme lyhyesti suljettuja ja eksakteja muotoja.

9.1 Sileät k -muodot

Olkoon M sileä n -monisto ja olkoon $k \geq 0$. Sileä tensorikenttä $\omega \in \Gamma(T^{(0,k)}M) = \mathfrak{T}^{(0,k)}(M)$ on *sileä k -muoto*, jos $\omega_p \in A^k(T_p M)$ jokaisella $p \in M$. Tällöin luku k on k -muodon ω *aste*. Kaikki k -muodot ovat *differentiaali­muotoja*. Sileän moniston M *sileiden k -muotojen avaruus* on $\Omega^k(M) \subset \Gamma(T^{(0,k)}M) = \mathfrak{T}^{(0,k)}(M)$, kun $k \geq 1$ ja $\Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$. Kaikkien *sileiden differentiaali­muotojen avaruus* on^a

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M).$$

Differentiaali­muotojen $\alpha, \omega \in \Omega(M)$ *ulkoinen tulo*^b $\alpha \wedge \omega$ määritellään pisteittäin

$$(\alpha \wedge \omega)_p = \alpha_p \wedge \omega_p.$$

^aLee [?, Ch. 14] käyttää tälle avaruudelle merkintää $\Omega^*(M)$.

^bKatso luku 8.4.

Funktion $f \in \mathfrak{F}(M) = \Omega^0(M)$ ja k -muodon $\omega \in \Omega^k(M)$ ulkoinen tulo on luvun 8.4 määritelmien mukaisesti sama kuin muodon kertominen funktiolla

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f = f\omega.$$

Lemma 9.1. *Olkoon M sileä monisto. Tällöin $\Omega^k(M) = \{0\}$ kaikille $k > \dim M$.*

Proof. Väite seuraa määritelmästä ja Seurauksesta 8.30 nojalla. $\square$

Sileiden differentiaali­muotojen avaruus $\Omega(M)$ on vektori­avaruu­ ja astealgebra, jonka kertolasku on sileiden muotojen väkätulo $\wedge$ samoilla sopimuksilla kuin Grassmannin algebroissa $A(T_p M)$, $p \in M$.

Sileiden differentiaali­muotojen perusominaisuudet seuraavat suoraviivaisesti yhtäältä alternoivien muotojen ja toisaalta sileiden tensorikenttien perusominaisuuksista.

Propositio 9.2. *Olkoon M sileä monisto ja olkoot $k, \ell \in \mathbb{N}$.*

(1) *Olkoot $\omega \in \Omega^k(M)$, $\alpha, \beta \in \Omega^\ell(M)$ ja olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\omega \wedge (a\alpha + b\beta) = a\omega \wedge \alpha + b\omega \wedge \beta$$

ja

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \omega = a\alpha \wedge \omega + b\beta \wedge \omega.$$

(2) *$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$ kaikille $\alpha \in \Omega^k(M)$ ja $\beta \in \Omega^\ell(M)$.*

Proof. Seuraa Propositiosta 8.17. $\square$

Olkoon (U, x) sileä kartta sileällä monistolla M ja olkoon $A: M \rightarrow T^{(0,k)}M$ kuvaus,¹ jolle $A_p \in A^k(T_p M)$ jokaisella $p \in M$ ja $\pi \circ \omega = \text{id}_M$. Proposition 8.24 nojalla on funktiot $A_{i_1 i_2 \dots i_k}: U \rightarrow \mathbb{R}$, joille

$$A = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} A_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (9.1)$$

Propositio 9.3. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M . Olkoon $A: M \rightarrow T^{(0,k)}M$ kuvaus, jolle $A_p \in A^k(T_p M)$ jokaisella $p \in M$ ja $\pi \circ \omega = \text{id}_M$. Tällöin A on sileä k -muoto joukossa U , jos ja vain jos sen kerroinfunktiot esityksessä (10.1) ovat sileitä.*

Proof. Seuraa Propositiosta 9.3. $\square$

Propositio 9.4. *Olkoon $F: M \rightarrow N$ sileä kuvaus.*

(1) *Jos $\alpha \in \Omega^k(N)$, niin $F^* \alpha \in \Omega^k(M)$.*

(2) *Jos lisäksi $\omega \in \Omega^\ell(N)$, niin $F^*(\alpha \wedge \omega) = F^* \alpha \wedge F^* \omega$.*

Proof. Harjoitustehtävä 10.1 $\square$

Differentiaali­muotojen esittämisessä on joskus kätevä käyttää *multi-indeksimerkintää*: Jos $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, niin sovimme, että $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Tällöin, jos ω on k -muoto, tulkitsemme

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

¹Tässä emme oleta, että A on sileä.

9.2 Ulkoinen derivaatta

Lineaarikuvausten perhe $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, $k \in \mathbb{N}$, on *ulkoinen derivaatta*,^a jos

(1) Kaikille $\omega \in \Omega^k(M)$ ja $\tau \in \Omega^\ell(M)$ pätee

$$d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau,$$

(2) $d \circ d = 0$ ja

(3) $df \in \Omega^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ on funktion f differentiaali kaikille $f \in \Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

^aEnglanniksi *exterior derivative* tai *exterior differentiation*.

Sen osoittaminen, että jokaisella sileällä monistolla on ulkoinen derivaatta, on hieman työlästä. Aloitamme tarkastelemalla tilannetta koordinaattiympäristössä.

Propositio 9.5. *Olkoon (U, ϕ) sileä kartta n -ulotteisella sileällä monistolla M . Lauseke*

$$d\left(\sum_J \omega_J dx^J\right) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^J = \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J \quad (9.2)$$

määrittelee ulkoisen derivaatan avoimessa joukossa U .

Proof. Kuvauksen d lineaarisuus seuraa Propositioista 7.12 ja 10.2 ja määritelmän kohta (3) on suoraan määritelmä funktioiden tapauksessa.

(1) Lineaarisuuden nojalla riittää todistaa väite muodoille $\omega = f dx^I$ ja $\tau = g dx^J$. Lausekkeen (10.2), Proposition 7.12(2), jälleen lausekkeen (10.2) ja Proposition 10.2(2) nojalla

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tau) &= d(fg dx^I \wedge dx^J) = d(fg) dx^I \wedge dx^J \\ &= gdf \wedge dx^I \wedge dx^J + fdg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge dg \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau. \end{aligned}$$

(2) Lineaarisuuden nojalla riittää osoittaa väite differentiaalimuodoille $\omega = f dx^I$. Lausekkeen (10.2) ja Lemman 7.15 nojalla

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(df \wedge dx^I) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I\right) \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i\right) \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Ulkoisen tulon antisymmetrisyyden² nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i &= \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} dx^i \wedge dx^i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i &= 0, \end{aligned}$$

joten $d(d\omega) = 0 \wedge dx^I = 0$. □

²Propositio 10.2(2).

Propositio 9.6. *Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä monistolla M . Jos $\mathbf{D}$ on ulkoinen derivaatta joukossa U , niin*

$$\mathbf{D}\left(\sum \omega_J dx^J\right) = \sum d\omega_J \wedge dx^J$$

Proof. Olkoon $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$. Ulkoisen derivaatan lineaarisuuden ja ominaisuuden (1) nojalla

$$\mathbf{D}\omega = \mathbf{D}\sum_I \omega_I dx^I = \sum_I \mathbf{D}(\omega_I dx^I) = \sum_I \mathbf{D}\omega_I \wedge dx^I + \sum_I \omega_I \mathbf{D}dx^I.$$

Ominaisuuden (3) nojalla $dx^I = \mathbf{D}x^I$, joten

$$\mathbf{D}\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I + \sum_I \omega_I \mathbf{D}dx^I.$$

Väitteen todistamiseksi riittää siis osoittaa, että $\mathbf{D}(\mathbf{D}x^I) = 0$. Osoitetaan tämä induktiolla asteen suhteen. Oletuksen (2) nojalla $\mathbf{D}\mathbf{D}x^j = 0$ kaikilla $1 \leq j \leq n$. Oletetaan, että väite pätee $(k-1)$ -muodoille. Tällöin ulkoisen derivaatan ominaisuuksien (3) ja (2) ja induktiooletuksen nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{D}x^{i_1} \wedge \mathbf{D}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{D}x^{i_k}) \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{D}x^{i_1}) \wedge (\mathbf{D}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{D}x^{i_k}) - \mathbf{D}x^{i_1} \wedge \mathbf{D}(\mathbf{D}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{D}x^{i_k}) \\ &= 0 \wedge \mathbf{D}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{D}x^{i_k} - \mathbf{D}x^{i_1} \wedge 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Lause 9.7. *Sileällä monistolla M on yksikäsitteinen ulkoinen derivaatta.*

Proof. Proposition 10.5 nojalla moniston M jokaisessa kartassa voidaan määritellä ulkoinen derivaatta. Olkoot (U, x) ja (V, y) karttoja pisteessä $p \in M$. Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$. Tällöin on sileät funktiot ω_I^U ja ω_J^V , joille

$$\omega = \sum_I \omega_I^U dx^I = \sum_J \omega_J^V dx^J$$

pisteen p avoimessa karttaympäristössä $U \cap V$. Olkoon $\mathbf{D}$ ulkoinen derivaatta joukossa $U \cap V$. Propositioden 10.5 ja 10.6 nojalla

$$\sum_I d\omega_I^U dx^I = D\omega = \sum_J d\omega_J^V dx^J.$$

Yksikäsitteisyys todistetaan kuten Propositiossa 10.6. □

Esimerkki 9.8. Propositioden 10.5 ja 10.6 nojalla monistolla $\mathbb{E}^3$ on yksikäsitteinen ulkoinen derivaatta. Differentiaali­muodon $\omega \in \Omega^k(\mathbb{E}^3)$ ulkoinen derivaatta $d\omega$ voi olla nollasta poikkeava, kun $k \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Olkoon $f \in \Omega^0(\mathbb{E}^3) = \mathfrak{F}(\mathbb{E}^3)$. Lemmassa 7.15 näimme, että

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3.$$

(2) Olkoon $\omega \in \Omega^1(\mathbb{E}^3)$. Tällöin $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$, joten

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{k=1}^3 d\omega_k \wedge dx^k = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^k \\ &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 \\ &\quad + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \end{aligned}$$

(3) Olkoon $\omega \in \Omega^2(\mathbb{E}^3)$. Tällöin $\omega = \omega_3 dx^1 \wedge dx^2 + \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1$, joten

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\ &= \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Kohdan (1) perusteella funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^3)$ ulkoinen derivaatta vastaa funktion gradienttia ∇f . Kohtien (2) ja (3) laskujen perusteella 2-muodon $\omega \in \Omega^2(\mathbb{E}^3)$ ulkoinen derivaatta vastaa vektorifunktion $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3): \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ *roottoria*³

$$\nabla \times \underline{\omega} = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3}, \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} \right)$$

ja 3-muodon ω ulkoinen derivaatta vastaa vektoriarvoisen kuvauksen $\underline{\omega}$ *divergenssiä*

$$\operatorname{div} \underline{\omega} = \nabla \cdot \omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3}.$$

Tämä yhteys toimii motivaationa ulkoisen derivaatan määritelmälle.

Seuraus 9.9. $F: M \rightarrow N$ sileä kuvaus. Olkoon $\omega \in \Omega^k(N)$. Tällöin

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Proof. Funktioille väite on Propositio 7.18(3). Olkoon $k \geq 1$ ja olkoon $\omega \in \Omega^k(N)$. Tarkastellaan yleistä tapausta lokaaleissa koordinaateissa. Olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M ja olkoon (V, ψ) sileä kartta monistolla N siten, että $F(U) \subset V$. Olkoot $(x^1, \dots, x^m)$ ja $(y^1, \dots, y^n)$ kuvausten ϕ ja ψ komponentit. Tällöin on sileät funktiot $\omega_I \in \mathfrak{F}(V)$, joille

$$\omega = \sum_I \omega_I dy^I.$$

Propositio 10.4(2) nojalla $F^*\omega = \sum_I F^*\omega_I F^*dy^I$, joten ulkoisen derivaatan lausekkeen (10.2) nojalla

$$dF^*\omega = \sum_I dF^*\omega_I \wedge F^*dy^I.$$

Toisaalta ulkoisen derivaatan lausekkeen (10.2), Propositio 10.4(2) ja Propositio 7.18(3) nojalla

$$F^*d\omega = F^*\left(\sum_I d\omega_I \wedge dy^I\right) = \sum_I F^*d\omega_I \wedge F^*dy^I = \sum_I dF^*\omega_I \wedge F^*dy^I,$$

joten väite on todistettu. □

³Englanniksi *curl*.

Seuraus 9.10. Olkoon M sileä monisto ja olkoon $U \subset M$ avoin. Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$. Tällöin $d(\omega|_U) = (d\omega)|_U$.

Proof. Olkoon $i: U \rightarrow M$ inklusio. Seurauksen 10.9 nojalla

$$d(\omega|_U) = d(i^*\omega) = i^*d\omega = (d\omega)|_U. \quad \square$$

Esimerkki 9.11. (1) Seurauksen 10.9 ja Proposition 10.4 nojalla sileän 2-muodon $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{E}^2)$ lauseke napakoordinaateissa on

$$\begin{aligned} \omega &= d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta d\theta + r \cos \theta d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr = r dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

(2) Olkoon $\omega \in \Omega^1(\mathbb{E}^2)$, $\omega = x^1 dx^2 - x^2 dx^1$. Esimerkin 7.22 laskut osoittavat, että napakoordinaateissa $\omega = r^2 d\theta$. Ulkoiset derivaatat ovat

$$\begin{aligned} d\omega &= dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^1 = 2dx^1 \wedge dx^2 \\ &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = 2r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

kuten pitääkin.

Lause 9.12. Olkoot M ja N sileitä n -monistoja ja olkoon $F: M \rightarrow N$ sileä. Olkoon (U, x) sileä kartta pisteessä $p \in M$ ja olkoon (V, y) sileä kartta pisteessä $F(p) \in N$. Olkoon $g \in \mathfrak{F}(V)$. Tällöin

$$F^*(g dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = g \circ F \det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{i,j=1}^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Proof. Proposition 7.18, alkukuvan määritelmän, yhtälön (3.2) ja Proposition 8.23 nojalla

$$\begin{aligned} &F^*(g dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right) \\ &= g \circ F(p) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \Big|_{F(p)} \left(dF_p \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, dF_p \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right) \\ &= g \circ F(p) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \Big|_{F(p)} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^1}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^n}(p) \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \\ &= g \circ F(p) \det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right)_{i,j=1}^n \\ &= g \circ F(p) \det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right)_{i,j=1}^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right). \end{aligned}$$

Koska $A^n(T_p M)$ on 1-ulotteinen, tästä seuraa väite pisteessä p . $\square$

Seuraus 9.13. Olkoon M sileä n -monisto. Olkoot (U, x) ja (V, y) sileitä karttoja pisteessä $p \in M$. Tällöin

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{i,j=1}^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad \square$$

9.3 Suljetut ja eksaktit muodot

Tässä luvussa tutustume lyhyesti de Rhamin kohomologiaryhmään, joka on algebrallisen topologian tärkeä käsite.

Olkoon M sileä monisto. Muoto $\omega \in \Omega^k(M)$ on *suljettu muoto*, jos $d\omega = 0$ ja *eksakti muoto*, jos $\omega = d\eta$ jollain $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.
Olkoot $Z^k(M)$ suljettujen k -muotojen avaruus ja $B^k(M)$ eksaktien k -muotojen avaruus.

Lemma 9.14. *Kaikki n -ulotteisen sileän moniston M sileät n -muodot ovat suljettuja.*

Proof. Jos $\omega \in \Omega^n(M)$, niin $d\omega \in \Omega^{n+1}(M) = \{0\}$. □

Lemma 9.15. *Olkoon M sileä monisto.*

(1) *Eksaktit muodot ovat suljettuja.*

(2) *$Z^k(M)$ ja $B^k(M)$ ovat vektoriavaruuksien $\Omega^k(M)$ aliavaruuksia.*

Proof. (1) Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$ eksakti. Tällöin $\omega = d\eta$ jollain $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$. Ulkoisen derivaatan määritelmän nojalla $d\omega = dd\eta = 0$, joten ω on suljettu.

(2) Seuraa siitä, että d on lineaarikuvauksia ja $Z^k(M) = \ker(d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$ ja $B^k(M) = d(\Omega^{k-1}(M))$. □

Seuraus 9.16. *Olkoon $F: M \rightarrow N$ sileä kuvaus. Tällöin*

(1) *Jos $\omega \in Z^k(N)$, niin $F^*\omega \in Z^k(M)$.*

(2) *Jos $\omega \in B^k(N)$, niin $F^*\omega \in B^k(M)$.*

Proof. Seuraa Propositioista 10.9. □

Vektoriavaruus V on määritelmänsä nojalla additiivinen ryhmä, jonka laskutoimitus on vektorien yhteenlasku. Jokainen vektoriavaruus $H \subset V$ on ryhmän $(V, +)$ aliryhmä ja koska vektorien yhteenlasku on kommutatiivinen, H on normaali aliryhmä ja voidaan muodostaa tekijäryhmä V/H . Itse asiassa ryhmällä V/H on myös reaalisen vektoriavaruuksien rakenne.

Sileän moniston M k :s de Rhamin kohomologiaryhmä on

$$H_{dR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

Seuraus 9.17. *Jos F on diffeomorfismi, niin kohomologiaryhmät $H_{dR}^k(M)$ ja $H_{dR}^k(N)$ ovat isomorfisia.*

Proof. Harjoitustehtävä 10.6. □

Lause 9.18. $H_{dR}^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ kaikille $n, p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$.

Proof. Katso [?, Cor. 17.16]. □

Lemma 9.19. *Olkoon M kompakti monisto. Olkoon $\omega \in \Omega^1(M)$ 1-muoto, jolla ei ole nollakohtia. Tällöin ω ei ole eksakti muoto.*

Proof. Harjoitustehtävä 10.7. □

Esimerkki 9.20. Esimerkissä 7.22 tarkastellun 1-muodon

$$d\theta = \frac{x^1 dx^2 - x^2 dx^1}{\|x\|^2} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^2 - \{0\}) = \Omega^1(\mathbb{E}^2 - \{0\})$$

rajoittuma ympyrälle $\mathbb{S}^1$ on suljettu Lemman 10.14 nojalla. Lemman 10.19 nojalla se ei ole eksakti. Siis $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \neq \{0\}$. Itse asiassa esimerkiksi kirjan [?] luvussa 17 osoitetaan, että $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$.

Harjoitustehtäviä

9.1. Todista Propositio 10.4.

9.2. Määritä muodon $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ lauseke pallokoordinaateissa.⁴

9.3. Olkoon $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1$ 4-ulotteinen *avarusaika*, jossa vektorin (x, t) ensimmäinen 3-ulotteinen komponentti x kuvaa *paikkaa* ja neljäs komponentti t *aikaa*. Olkoon $\mathbf{E}: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^3$ *sähkökenttä* ja olkoon $\mathbf{B}: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^3$ *magneettikenttä*. *Maxwellin yhtälöt* tyhjiössä, jossa ei ole varauksia eikä virtaa, ovat

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (9.3)$$

Näissä yhtälöissä roottori ja divergenssi muodostetaan tavanomaiseen tapaan osittaisderivaatoista paikkakoordinaattien suhteen. Maxwellin yhtälöt voidaan muotoilla ulkoisen derivaatan avulla, kun määritellään sähkökentän komponenttien avulla 1-muoto

$$E = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$$

ja magneettikentän komponenttien avulla 2-muoto

$$B = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

ja määritellään 2-muoto

$$F = E \wedge dt + B.$$

Yhtälö $dF = 0$ vastaa kahta Maxwellin yhtälöistä (10.3). Mitkä nämä yhtälöt ovat?

9.4. Osoita, että sileä 2-muoto

$$\omega = \frac{x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2}{\left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right)^{3/2}} \in \Omega^2(\mathbb{E}^3 - \{0\}).$$

on suljettu.

9.5. Olkoon M sileä monisto. Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$ eksakti muoto ja olkoon $\tau \in \Omega^\ell(M)$ suljettu muoto. Osoita, että $\omega \wedge \tau$ on eksakti muoto.

⁴Katso Harjoitustehtävä 3.5.

9.6. Todista Seuraus 10.17.

9.7. Todista Lemma 10.19.

9.8. (1) Osoita, että moniston $\mathbb{E}^3$ koordinaattimuotojen rajoittumat alimonistolle $\mathbb{S}^2$ toteuttavat yhtälön $x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 = 0$.⁵

(2) Olkoon $\omega = x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$. Osoita, että

$$\omega = \begin{cases} \frac{dx^2 \wedge dx^3}{x^1}, & \text{kun } x^1 \neq 0 \\ \frac{dx^3 \wedge dx^1}{x^2}, & \text{kun } x^2 \neq 0 \\ \frac{dx^1 \wedge dx^2}{x^3}, & \text{kun } x^3 \neq 0 \end{cases}$$

⁵Harjoitustehtävästä 7.12 voi olla hyötyä.

Chapter 10

Suunnistus ja integrointi monistoilla

Kurssin viimeisessä luvussa tarkastelemme sileiden 1-muotojen integraaleja polkujen yli ja sileiden n -muotojen integrointia n -ulotteisella sileällä monistolla. Käsittelemme myös lyhyesti moniston suunnistusta ja ykkösen ositusta, joita tarvitaan korkeimman asteen sileiden muotojen integraalin määrittelyssä.

10.1 Polkuintegraalit sileällä monistolla

Tässä luvussa osoitamme, että sileän 1-muodon integraali polun yli voidaan määritellä luonnollisella tavalla niin, että se ei riipu koordinaattien valinnasta. Integraali voitaisiin määritellä huomattavasti vähemmän säännöllisillekin 1-muodoille mutta yksinkertaisuuden vuoksi pitäydymme edelleen sileisiin muotoihin.

Sileän 1-muodon $\omega = f dt \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^1) = \Omega^1(\mathbb{E}^1)$ integraali välin ab , $a < b$, yli on

$$\int_{ab} \omega = \int_a^b f(t) dt.$$

Propositio 10.1. Olkoon $\omega = f dt \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^1)$ ja olkoon $h: cd \rightarrow ab$ kasvava diffeomorfismi. Tällöin

$$\int_{cd} h^* \omega = \int_{ab} \omega.$$

Proof. Olkoon s kanoninen koordinaatti välillä cd . Yhtälön (7.9) nojalla

$$(h^* \omega)_s = (f \circ h)(s) dh(s) = (f \circ h)(s) \frac{dh}{ds}(s) ds,$$

joten väite seuraa yhden muuttujan analyysin muuttujanvaihtolauseesta:

$$\int_{cd} h^* \omega = \int_{cd} (f \circ h)(s) \frac{dh}{ds}(s) ds = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t) dt = \int_{ab} \omega.$$

□

Alkukuvan määritelmän nojalla monistolla M määritellyn 1-muodon integraali sileän polun yli voidaan palauttaa reaalityöväylällä määritellyn muodon integrointiin. Näin saatava integraali ei riipu polun parametrisoinnista.

Olkoon $\gamma: ab \rightarrow M$ sileä polku^a ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Sileän 1-muodon ω integraali polun γ yli on

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{ab} \gamma^* \omega.$$

^a γ on jollain välin ab sisältävällä avoimella välillä määritellyn sileän polun rajoittuma välille ab .

Propositio 10.2. *Olkoon $\gamma: ab \rightarrow M$ sileä polku ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Olkoon $h: cd \rightarrow ab$ kasvava diffeomorfismi. Tällöin*

$$\int_{\gamma \circ h} \omega = \int_{\gamma} \omega.$$

Proof. Määritelmän ja Propositoiden 7.20 ja 11.1 nojalla

$$\int_{\gamma \circ h} \omega = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} (\gamma \circ h)^* \omega = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} h^* \gamma^* \omega = \int_a^b \gamma^* \omega. \quad \square$$

Propositio 10.3. *Olkoon $\gamma: ab \rightarrow M$ sileä polku ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Tällöin¹*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Proof. Olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$(\gamma^* \omega)_{t_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} = \omega_{\gamma(t_0)} (d\gamma)_{t_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} = \omega_{\gamma(t_0)} \dot{\gamma}(t_0) = \omega_{\gamma(t_0)} \dot{\gamma}(t_0) dt_{t_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t_0},$$

joten väite seuraa, koska $\frac{d}{dt} \Big|_{t_0}$ virittää tangenttiavaruuden $T_{t_0} \mathbb{E}^1$. $\square$

Esimerkki 10.4. Olkoon $\omega = \frac{x^1 dx^2 - x^2 dx^1}{\|x\|^2} = d\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^2 - \{0\})$ Esimerkeissä 7.22 ja 10.20 tarkasteltu sileä 1-muoto. Olkoon $\gamma: 02\pi \rightarrow \mathbb{E}^2$, $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Peittämällä monisto $\mathbb{E}^2 - \{0\}$ kahdella napakoordinaatilla saadaan

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Kanonisissa koordinaateissa polkuintegraalin määritelmän nojalla lasku on hieman pidempi mutta lopulta aivan sama:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (\cos t d(\sin t) - \sin t d(\cos t)) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Propositio 10.5. *Jos $\gamma: ab \rightarrow M$ sileä polku ja olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$, niin*

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

¹Muista, että $\dot{\gamma}(t)$ on polun γ nopeusvektori hetkellä t , katso luku 3.4.

Proof. Proposition 11.3, differentiaalin määritelmän, nopeusvektorin määritelmän ja jälleen differentiaalin määritelmän nojalla saamme

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \dot{\gamma}(t)f dt = \int_a^b d\gamma(t)\frac{d}{dt}f dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) dt,$$

josta väite seuraa analyysin peruslauseen nojalla. $\square$

Propositio 10.6. *Olkoon M sileä monisto. Jos 1-muoto $\omega \in \Omega^1(M)$ on eksakti, niin $\int_{\gamma} \omega = 0$ kaikille suljetuille sileille poluille $\gamma: I \rightarrow M$.*

Proof. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkoon $\gamma: 01 \rightarrow M$ suljettu polku. Proposition 11.5 nojalla

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0. \quad \square$$

Esimerkki 10.7. Esimerkeissä 7.22 ja 10.20 tarkasteltu muoto $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{E}^2 - \{0\})$ on suljettu, sillä

$$d\left(\frac{x^1 dx^2 - x^2 dx^1}{\|x\|^2}\right) = \frac{((x^2)^2 - (x^1)^2)dx^1 \wedge dx^2 + ((x^2)^2 - (x^1)^2)dx^2 \wedge dx^1}{\|x\|^4} = 0.$$

Olkoon $\gamma: 02\pi \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{E}^2 - \{0\}$ sileä suljettu polku $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Esimerkissä 11.4 laskimme integraalin $\int_{\gamma} d\theta = 2\pi \neq 0$. Proposition 11.6 nojalla muodot $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{E}^2 - \{0\})$ ja $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ eivät ole eksakteja. Siis monistojen $\mathbb{E}^2 - \{0\}$ ja $\mathbb{S}^1$ ensimmäinen de Rhamin kohomologiaryhmä² ei ole triviaali.

10.2 Korkeimman asteen muotojen integrointi euklidisessa avaruudessa

Olkoon $U \subset \mathbb{E}^n$. Olkoon $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega^n(U)$. Muodon ω integraali kompaktin joukon $B \subset U$ yli on

$$\int_B \omega = \int_B f dx^1 \cdots dx^n.$$

Propositio 10.8. *Olko $U, V \subset \mathbb{E}^n$ avoimia joukkoja ja olkoon $F: U \rightarrow V$ diffeomorfismi siten, että kuvauksen F Jacobin determinantin merkki $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ on vakio. Tällöin jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset V$ ja jokaiselle $\omega \in \Omega^n(U)$ pätee*

$$\int_{F^{-1}(K)} F^* \omega = \varepsilon \int_K \omega.$$

Proof. Olkoon $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Seurauksen 10.13 ja Lebesguen integraalin muuttujanvaihtokaavan nojalla

$$\begin{aligned} \int_{F^{-1}(K)} F^*(f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) &= \int_{F^{-1}(K)} f \circ F \det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{i,j=1}^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \varepsilon \int_{F^{-1}(K)} f \circ F \left| \det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{i,j=1}^n \right| dx^1 \cdots dx^n \\ &= \varepsilon \int_K f dx^1 \cdots dx^n = \int_K f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad \square \end{aligned}$$

²Katso luku 10.3.

Olkoot $U, V \subset \mathbb{E}^n$ avoimia joukkoja ja olkoon $F: U \rightarrow V$ diffeomorfismi. Kuvaus F säilyttää suunnistuksen, jos sen Jacobin determinantti on positiivinen.

Seuraus 10.9. *Olkoon M sileä monisto. Olkoot (U, ϕ) ja (V, ψ) karttoja, joille $\phi \circ \psi^{-1}$ on suunnistuksen säilyttävä, ja olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ siten, että $\text{supp } \omega \subset U \cap V$. Tällöin*

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega = \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^* \omega.$$

Proof. Propositoiden 11.8 ja 9.7 nojalla

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega = \int_{(\phi \circ \psi^{-1}) \circ \psi(V)} (\phi \circ \psi^{-1})^* (\phi^{-1})^* \omega = \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^* \omega. \quad \square$$

10.3 Suunnistus

Seuraus 11.9 antaa vihjeen siitä, miten korkeimman asteen muotojen integrointi sileällä monistolla saadaan määriteltyä karttojen valinnasta riippumattomalla tavalla.

Sileän moniston M sileä kartasto $\mathcal{U}$ on *suunnistettu kartasto*, jos sen kaikki kartanvaihtokuvaukset ovat suunnistuksen säilyttäviä. Jos monistolla M on suunnistettu kartasto, niin M on *suunnistuva monisto*.

Sileän moniston M maksimaalinen suunnistettu kartasto on *suunnistus*. Jos $\mathcal{U}$ on moniston M suunnistus, niin pari $(M, \mathcal{U})$ on *suunnistettu monisto*.

Jos $\mathcal{U}$ on moniston M suunnistus ja $(U, \phi) \in \mathcal{U}$, niin $(U, \phi) \in \mathcal{U}$ on *positiivisesti suunnistettu kartta*.

Propositio 10.10. *Jokainen suunnistettu kartasto sisältyy yksikäsitteiseen suunnistukseen.*

Proof. Todistetaan kuten Propositio 1.13. Harjoitustehtävä 11.3. $\square$

Olkoon M suunnistettu monisto. Olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ siten, että on positiivisesti suunnistettu kartta (U, ϕ) , jolle $\text{supp } \omega \subset U$. Muodon ω *integraali* on

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega.$$

Jos korkeimman asteen sileän muodon kantaja sisältyy yhteen koordinaattiympäristöön, niin sen integraalin määritelmä on riippumaton positiivisesti suunnistetun kartan valinnasta Seurauksen 11.9 nojalla.

Monet tällä kurssilla ja johdatuskurssilla käsitellyt sileät monistot ovat suunnistuvia.

Esimerkki 10.11. (1) Euklidisen avaruuden yhdestä kartasta koostuva kanoninen kartasto $\{(\mathbb{E}^n, \text{id})\}$ on suunnistettu kartasto, joten $\mathbb{E}^n$ on suunnistuva monisto.

(2) Harjoitustehtävässä 11.4 osoitetaan, että $\mathbb{S}^n$ on suunnistuva monisto.

(3) Säännöllinen tasa-arvohyperpinta³ on suunnistuva, katso [?, Prop. 15.21].

(4) Harjoitustehtävässä 11.6 osoitetaan, että n -torus $\mathbb{T}^n$ on suunnistuva.

(5) Projektiivinen avaruus $\mathbb{P}^n$ on suunnistuva, jos ja vain jos n on pariton. Katso Propositio 11.23.

³Katso luku 6.2.

Propositio 10.12. *Olkoon M sileä monisto. Tällöin monistot TM ja T^*M ovat suunnistuvia.*

Proof. Olkoot (U, ϕ) ja (V, ψ) sileitä karttoja monistolla M ja olkoot Φ ja Ψ luvussa ?? määritellyt kartat tangenttikimpulla TM . Yhtälön (??) nojalla kartanvaihdon $\Psi \circ \Phi^{-1}$ Jacobin determinantti toteuttaa

$$\begin{aligned} \det D(\Psi \circ \Phi^{-1})(y, w) &= \det \begin{pmatrix} D(\psi \circ \phi^{-1})(y) & * \\ 0 & D(\psi \circ \phi^{-1})(y) \end{pmatrix} \\ &= (\det D(\psi \circ \phi^{-1})(y))^2 > 0, \end{aligned}$$

koska derivaattamatriisi on lohkokolmionmatriisi ja kartanvaihto $\psi \circ \phi^{-1}$ on sileä diffeomorfismi.

Kotangenttikimpun tapaus käsitellään samaan tapaan, Harjoitustehtävä 11.8. $\square$

10.4 Ykkösen ositus

Laajennamme integraalin määritelmän sellaisillekin korkeimman asteen muodoille, joiden kantajat eivät välttämättä sisälly suunnistetun moniston yhteen koordinaattiympäristöön. Tässä luvussa todistettava Lause 11.15 on oleellinen apuväline n -muotojen integraalin määrittelyssä.

Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ sileän moniston M lokaalisti äärellinen avoin peite.^a Olkoon $\rho_\alpha \in \mathfrak{F}(M)$ siten, että $\rho_\alpha \geq 0$, $\text{supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$ kaikilla $\alpha \in A$ ja

$$\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha = 1.$$

Tällöin $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ kanssa yhteensopiva sileä ykkösen ositus.

^aMääritelmä on luvussa 1.3.

Ykkösen osituksen määritelmässä oleva summa $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(p)$ on äärellinen jokaisella $p \in M$, koska peite $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ on lokaalisti äärellinen.

Esimerkki 10.13. Olkoon $h_{a,b} \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^1)$ yhtälössä (??) määritelty sileä positiivinen funktio, jolle pätee $h_{a,b}|_{[\text{openleft}] - \infty a} = 0$ ja $h_{a,b}|_{[\text{openright}] b \infty} = 1$. Jos $a < b < c < d$, niin funktio $f_{a,b,c,d} \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^1)$,

$$\rho_{a,b,c,d}(t) = h_{a,b}(t) + h_{-d,-c}(-t),$$

on tönssyfunktio, jonka kantaja sisältyy väliin $[\text{open}]ad$. Kuvassa 11.13 esitetään kolmen tönssyfunktion avulla tehty ykkösen ositus välillä $[\text{open}] - 22$.

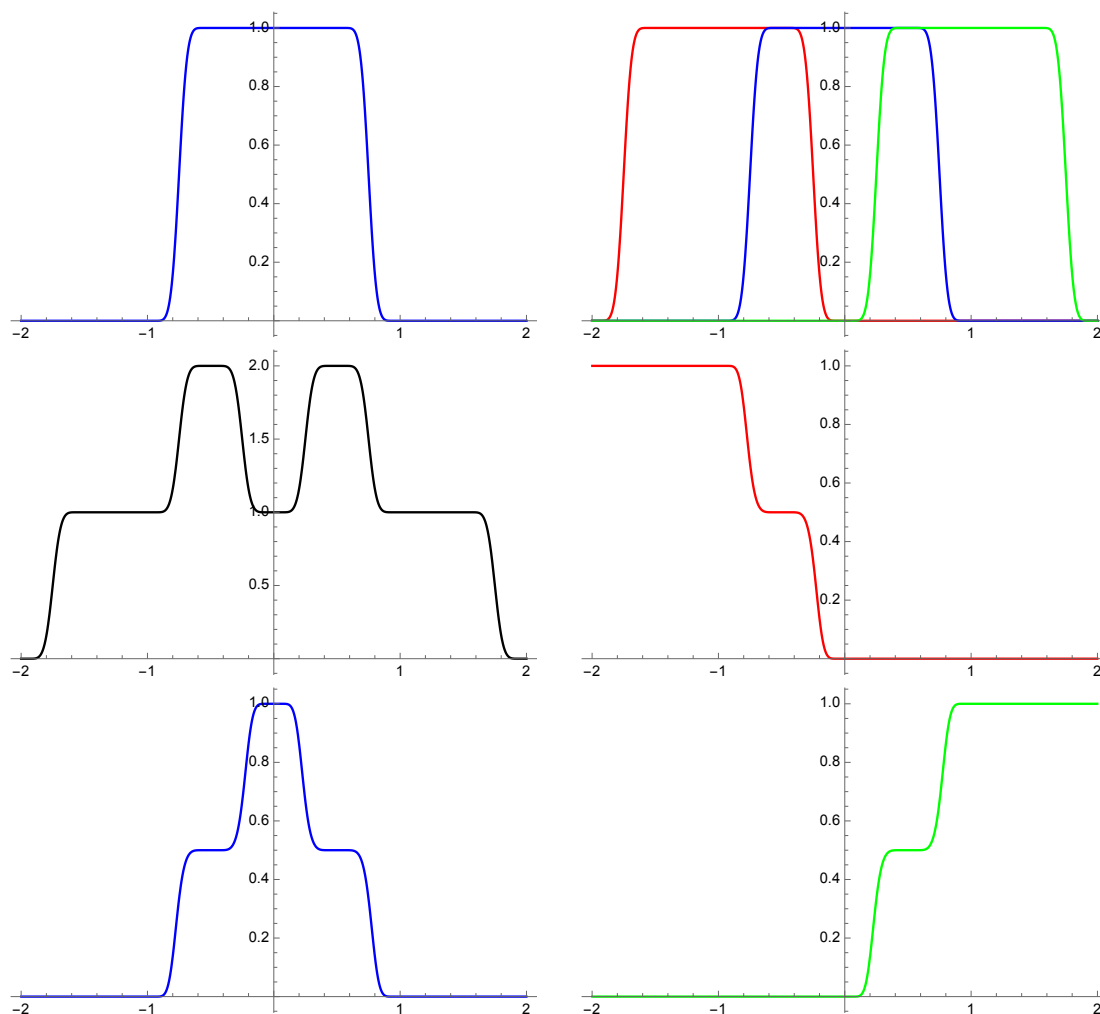


Figure 10.1 — Ylimmällä rivillä vasemmalla tőssyfunktio $\rho_{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1}$ ja oikealla kolme tőssyfunktiota, joiden kantajat peittävät avoimen välin $[open]-22$. Toisella rivillä vasemmalla kolmen tőssyfunktion summa ja sen jälkeen summafunktiolla skaalattujen tőssyfunktioiden kuvaajat.

Näimme luvussa 2.5 esimerkkejä sileistä positiivisista tőssyfunktioista, joiden kantajat sisältyvät tarkasteltaviin koordinaattiympäristöihin.

Olkoon M sileä monisto. Koordinaattipallo $B \subset M$ säännöllinen koordinaattipallo, jos on moniston M sileä kartta (U, ϕ) , jossa $B = \phi^{-1}(B(0, r))$ jollain $r > 0$ ja on $r' > r$ siten, että $B(0, r') \subset \phi(U)$.

Lemma 10.14. *Säännölliset koordinaattipallot muodostavat sileän moniston topologian kannan.*

Proof. Harjoitustehtävä 11.7. □

Lause 10.15. *Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ sileän moniston M peite koordinaattiympäristöillä. Tällöin on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ kanssa yhteensopiva ykkösen ositus.*

Proof. Lauseen 1.9 ja Lemman 11.14 nojalla on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ lokaalisti äärellinen hienonnus $(B_i)_{i \in I}$ siten, että joukot B_i ovat säännöllisiä koordinaattipalloja. Tällöin jokaisella $B_i \subset U_\alpha$ on suurempi koordinaattipallo $B'_i \subset U_\alpha$ siten, että palloilla B_i ja B'_i on sama keskipiste joukon U_α koordinaateissa. Olkoon ρ_i^0 sileä töyssyfunktio,⁴ jolle $\text{supp } \rho_i^0 = \overline{B_i}$. Sulkeumien kokoelma $(\overline{B_i})_{i \in I}$ on lokaalisti äärellinen,⁵ joten funktio $\rho = \sum_{i \in I} \rho_i^0$ on sileä. Lisäksi $\rho(p) > 0$ jokaisella $p \in M$, koska joukot B_i muodostavat peitteen. Olkoot $\rho_i = \frac{\rho_i^0}{\rho}$ kaikilla $i \in I$. Tällöin $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$. $\square$

10.5 Korkeimman asteen sileän muodon integraali

Jos $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ on ykkösen ositus sileällä n -ulotteisella monistolla M ja $\omega \in \Omega^n(M)$, niin

$$\omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \omega.$$

Määrittelemme muodon ω integraalin tämän yhtälön ohjaamana:

Olkoon M suunnistettu n -monisto ja olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ kompaktikantajainen sileä n -muoto. Olkoon $((U_\alpha, \phi_\alpha))_{\alpha \in A}$ äärellinen kokoelma positiivisesti suunnistettuja karttoja siten, että $\text{supp } \omega \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Olkoon $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ kanssa yhteensopiva sileä ykkösen ositus. Muodon ω *integraali* on

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha \in A} \int_M \rho_\alpha \omega. \quad (10.1)$$

Lause 10.16. *Olkoon M suunnistettu n -monisto ja olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ kompaktikantajainen muoto. Muodon ω integraali on riippumaton positiivisesti suunnistettujen karttojen ja niiden kanssa yhteensopivan ykkösen osituksen valinnasta.*

Proof. Olkoot $((U_\alpha, \phi_\alpha))_{\alpha \in A}$ ja $((V_\beta, \psi_\beta))_{\beta \in B}$ muodon ω kantajan peittäviä äärellisiä kokoelmia positiivisesti suunnistettuja karttoja ja olkoot $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ ja $(\chi_\beta)_{\beta \in B}$ näiden peitteiden kanssa yhteensopivia ykkösen osituksia. Tällöin

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in A} \int_M \rho_\alpha \omega &= \sum_{\alpha \in A} \int_M \left(\sum_{\beta \in B} \chi_\beta \right) \rho_\alpha \omega \\ &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} \int_M \chi_\beta \rho_\alpha \omega = \sum_{\beta \in B} \int_M \left(\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \right) \chi_\beta \omega = \sum_{\beta \in B} \int_M \chi_\beta \omega. \end{aligned}$$

Laskun keskimmäisen summan muodon $\chi_\beta \rho_\alpha \omega$ kantaja sisältyy koordinaattiympäristöön $U_\alpha \cap V_\beta$ jokaisella $\alpha \in A$ ja $\beta \in B$. Siis integraali $\int_M \chi_\beta \rho_\alpha \omega$ on riippumaton karttakuvauksen valinnasta. $\square$

Integraalin käsite voidaan laajentaa myös muodoille, joiden kantaja on rajoittamaton tai jotka ovat vähemmän säännöllisiä kuin avaruuden $\Omega^n(M)$ muodot. Integraalin laskeminen niin, että integraali jaetaan osiin ykkösen osituksen avulla ei ole käytännöllistä, koska

⁴Katso Lemma ??.

⁵Jos avoin joukko leikkaa toisen joukon sulkeumaa, se leikkaa myös itse joukkoa.

integroitavat lausekkeet ovat niin hankalia t yssyfunktioilla kertomisen vuoksi. Käytännössä laskut tehdään jakamalla monisto sopiviin erillisiin paloihin, joissa lasku tehdään ilman ykkösen ositusta. Se, että näin voi tehd  , perustellaan esimerkiksi Leen kirjassa, katso [?, Proposition 16.8].

Esimerkki 10.17. Olkoon⁶

$$\omega = x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{E}^3).$$

Pallokoordinaateissa⁷

$$x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2 = -\sin \theta_2 d\theta_1 \wedge d\theta_2$$

kun $-\pi < \theta_1 < \pi$ ja $0 < \theta_2 < \pi$. Napakoordinaattikuvauksen Jacobin determinantti on $-\sin \theta_2 < 0$, joten jättämällä huomioimatta pallon pinnan nollamittainen joukko, jossa napakoordinaatteja ei ole määritelty, saamme

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 = 4\pi.$$

Helppo lasku osoittaa, että

$$d\omega = 3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

joten

$$\int_{B(0,1)} d\omega = 3 \operatorname{vol}(B(0,1)) = 4\pi = \int_{\mathbb{S}^2} \omega. \quad (10.2)$$

Yhtälö (11.2) on erikoistapaus *Stokesin lauseesta*, katso [?, Theorem 16.11].

10.6 Suunnistusmuoto

Olkoon M sileä monisto. Jos $\omega \in \Omega^n(M)$ on sileä n -muoto, jolla ei ole nollakohtia, niin se on sileän moniston M *suunnistusmuoto*.^a

^aJoskus suunnistusmuotoa kutsutaan *tilavuusmuodoksi*.

Esimerkki 10.18. (1) $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ on sileän moniston $\mathbb{E}^n$ suunnistusmuoto.

(2) Olkoon $N = \sum_{k=1}^{n+1} x^k \frac{\partial}{\partial x^k} \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^{n+1})$ ja olkoon $\omega \in \Omega^{n+1}(\mathbb{E}^{n+1})$ kuten kohdassa (1). Asetetaan kaikille $v_1, v_2, \dots, v_n \in T_x(M) = p^\perp$ kaikilla $p \in \mathbb{S}^n$

$$\sigma_p(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega_p(N_p, v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Tällöin $\sigma \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ ja Proposition 8.23 nojalla

$$\sigma_p(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(N_p, v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0,$$

kun tangenttivektorit $v_1, v_2, \dots, v_n$ muodostavat avaruuden $T_p(\mathbb{S}^n)$ kannan. Siis σ on suunnistusmuoto.

⁶Itse asiassa ω on pallon pinnan $\mathbb{S}^2$ pyöreä Riemannin metriikkaa vastaava pinta-alamuoto, katso [?, sivu 388-].

⁷Katso Harjoitustehtävä 3.5.

Lause 10.19. *Sileä monisto M on suunnistuva, jos ja vain jos sillä on suunnistusmuoto.*

Proof. Olkoon M suunnistettu monisto. Olkoon $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ ykkösen ositus, jonka kantajat sisältyvät moniston M positiivisesti suunnistettuihin sileisiin karttoihin (U_α, x_α) , $\text{supp } \rho_\alpha \in U_\alpha$. Muoto

$$\omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$$

on hyvin määritelty, koska ykkösen ositus on lokaalisti äärellinen. Se on sileä, koska se on sileiden muotojen äärellinen summa. Oletuksen nojalla kaikkien kartanvaihtojen Jacobin determinantit ovat positiivisia, joten Seurauksen 10.13 nojalla jokaisessa kartassa (U_α, x_α) pätee $\omega = f dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$ positiivisella $f \in \mathfrak{F}(U_\alpha)$.

Oletetaan, että monistolla M on suunnistusmuoto. Harjoitustehtävässä 11.11 osoitetaan, että

$$\mathcal{U} = \{(U, \phi) \text{ kartta, jossa } \omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \text{ jollain } f > 0\}.$$

on suunnistus. □

Ykkösen osituksen avulla voidaan myös todistaa että jokaisella sileällä monistolla on Riemannin metriikka käyttämättä Whitneyyn upotuslausetta.

Lauseen 9.11 toinen todistus. Käytetään Lauseen 11.19 ykkösen ositusta. Olkoon $g_{\mathbb{E}}$ euklidinen Riemannin metriikka. On helppo tarkastaa, että

$$g = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha (x_\alpha^{-1})^* g_{\mathbb{E}}$$

on Riemannin metriikka. □

Lause 10.20. *Yhtenäisellä sileällä monistolla on 0 tai 2 suunnistusta.*

Proof. Olkoon M yhtenäinen sileä n -monisto. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$, $f > 0$ ja olkoon ω muoto, jolla ei ole nollakohtia. Lauseen 11.19 todistuksessa nähdään, että muodot ω ja $f\omega$ määräävät saman suunnistuksen. Jos taas $f < 0$, niin muodot ω ja $f\omega$ määräävät eri suunnistukset. Muita suunnistuksia ei ole, koska $\dim A^n(T_p(M)) = 1$ kaikilla $p \in M$. □

Propositio 10.21. *Olkoon $F: M \rightarrow N$ sileä lokaali diffeomorfismi. Olkoon ω suunnistusmuoto monistolla N . Tällöin $F^*\omega$ on suunnistusmuoto.*

Proof. Harjoitustehtävä 11.12. □

Jos M ja N ovat suunnistettuja monistoja ja $F: M \rightarrow N$ on sileä lokaali diffeomorfismi, niin F on suunnistuksen säilyttävä, jos sen Jacobin determinantti on positiivinen positiivisissa kartoissa.

Propositio 10.22. *Olkoon ω_M suunnistusmuoto monistolla M ja olkoon ω_N suunnistusmuoto monistolla N . Lokaali diffeomorfismi $F: M \rightarrow N$ on suunnistuksen säilyttävä, jos $F^*\omega_N = f\omega_M$ jollain positiivisella funktiolla $f \in \mathfrak{F}(M)$.*

Proof. Väite seuraa Lauseesta 10.12. □

Propositio 10.23. *Projektiivinen avaruus $\mathbb{P}^n$ on suunnistuva, jos ja vain jos n on pariton.*

Proof. Olkoon n parillinen. Oletetaan, että $\mathbb{P}^n$ on suunnistuva. Olkoon $\omega \in \Omega^n(\mathbb{P}^n)$ suunnistusmuoto. Olkoon $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ peitekuvaus kuten Esimerkissä 1.23. Proposition 11.21 nojalla $\pi^*\omega$ on suunnistusmuoto monistolla $\mathbb{S}^n$. Kuitenkin $\pi \circ (-\text{id}) = \pi$, joten $(-\text{id})^*\pi^*\omega = \pi^*\omega$. Tämä on mahdotonta, koska Harjoitustehtävän 11.5 nojalla $-\text{id}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ei ole suunnistuksen säilyttävä, kun n on parillinen.

Parittomat ulottuvuuden käsitellään Leen kirjan [?] esimerkissä 15.37. $\square$

Harjoitustehtäviä

10.1. (1) Olkoot

$$\begin{aligned}\omega &= dx^3 \in \Omega^1(\mathbb{S}^2), \\ \eta &= x^2x^3dx^1 + x^1x^3dx^2 + x^1x^2dx^3 \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)\end{aligned}$$

ja olkoon $\gamma: -11 \rightarrow \mathbb{S}^2$,

$$\gamma(t) = (\sqrt{1-t^2} \cos(t), \sqrt{1-t^2} \sin(t), t).$$

Määritä $\int_\gamma \omega$ ja $\int_\gamma \eta$.

10.2. Olkoon $V \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^2)$,

$$V(x) = (x^1)^2((x^1)^2 - 1) + (x^2)^2$$

ja olkoon $\gamma: 02\pi \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t) \cos(t)).$$

(1) Osoita, että $V(\gamma(t)) = 0$ kaikilla $t \in 02\pi$.

(2) Määritä $\int_\gamma dV$.⁸

(3) Olkoon

$$\omega = -2x^2dx^1 + (4(x^1)^2 - 2x^1)dx^2 \in \Omega^1(\mathbb{E}^2).$$

Laske $\int_\gamma \omega$.

10.3. Todista Propositio 11.10.

10.4. Anna esimerkki pallon pinnan $\mathbb{S}^n$ suunnistetusta kartastosta.⁹

10.5. (1) Osoita, että kuvaus $-\text{id}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ on suunnistuksen säilyttävä, jos ja vain jos n on parillinen.

(2) Osoita, että kuvaus $-\text{id}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ on suunnistuksen säilyttävä, jos ja vain jos n on pariton.¹⁰

10.6. Osoita, että n -torus $\mathbb{T}^n$ on suunnistuva.¹¹

⁸Harjoitustehtävästä 7.12 voi olla apua, mutta yksi kohta vaatii huolellisuutta.

⁹Esimerkissä 1.12 (3) tarkastellut stereograafiset projektiot pohjois- ja etelänavalta muodostavat kahdesta kartasta koostuvan sileän kartaston.

¹⁰Käytä tehtävän 11.4 suunnistettua kartastoa.

¹¹Katso Esimerkki 1.20.

10.7. Todista Lemma 11.14.

10.8. Olkoon M sileä monisto. Osoita, että sileä monisto T^*M on suunnistuva.

10.9. Olkoon $G: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ Esimerkissä 6.17(1) tarkasteltu 2-toruksen upotus avaruuteen $\mathbb{E}^3$. Laske

$$\int_{\mathbb{T}^2} G^*(x^3 dx^1 \wedge dx^2).$$

10.10. Määritä Esimerkin 11.18(2) muodon σ lauseke 2-muotojen $dx^i \wedge dx^j$ avulla, kun $n = 2$.

10.11. Osoita, että Lauseen 11.19 todistuksessa määritelty kokoelma $\mathcal{U}$ on suunnistus.

10.12. Todista Propositio 11.21.