

Ryhmät ja geometria
Harjoitus 6, 24.10.2012

1. Olkoon $t > 0$ ja olkoon

$$G_t = \{T_{(ta, b/t)} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Varustetaan tekijäavaruus $G_t \backslash \mathbb{E}^2$ tekijämetriikalla.

- (a) Millaisia joukkoja ovat metrisen avaruuden $G_t \backslash \mathbb{E}^2$ r -säteiset pallot, kun $r > 0$?
- (b) Osoita, että tekijäavaruudet $G_t \backslash \mathbb{E}^2$ ja $G_s \backslash \mathbb{E}^2$ eivät ole isometrisia, kun $s \neq t$.

2. Olkoot $v_1, v_2 \in \mathbb{M}^{1,n}$. Osoita, että

- (a) kaksi ajanluonteista vektoria ei voi olla keskenään ortogonaalisia
- (b) jos v_1 on valonluonteinen ja v_2 on ajanluonteinen, niin $\langle v_1 | v_2 \rangle \neq 0$.
- (c) jos v_1 ja v_2 ovat valonluonteisia ja $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$, niin ne virittävät 1-ulotteisen aliavaruuden.

3. Osoita, että Minkowskin avaruuden ortogonaaliryhmä toimii transitiivisesti valokartiolla ja yksivaippaisella hyperboloidilla.

4. Osoita, että jokainen Minkowskin avaruuden $\mathbb{M}^{1,n}$ hypertaso on jonkin vektorin $w \in \mathcal{H}_-^n \cup \mathcal{H}_+^n \cup \mathcal{L}^n$ ortogonaalikomplementti.

5. Osoita, että parabolisen affiinin tason leikkaus valokartion kanssa on paraabeli.