

Ryhmät ja geometria
Harjoitus 5, 24.10.2012

1. Olkoon H affiini hypertaso avaruudessa $\mathbb{E}^n$ siten, että $0 \notin H$. Osoita, että on $h \in \mathbb{E}^n - \{0\}$, jolle pätee

$$H = \{x \in \mathbb{E}^n : (x|h) = 1\}.$$

Osoita, että

$$H^+ = \{x \in \mathbb{E}^n : (x|h) \geq 1\}$$

on hypertason H määräämä puoliavaruus, joka ei sisällä origoa.

2. Olkoon $G < \text{Isom } \mathbb{E}^n$. Osoita, että siitä, että yhden pisteen $x \in \mathbb{E}^n$ rata on diskreetti ja suljettu ja $\text{Stab}_G x$ on äärellinen seuraa, että G on epäjatkuva ryhmä.

3. Osoita, että ryhmä $G < \text{Isom } \mathbb{E}^n$ on epäjatkuva, jos sillä on perusalue.

Olkoon

$$\mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right] = \left\{a + b\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}.$$

Tarkastellaan seuraavissa tehtävissä ryhmien $\mathbb{Z}^2$ ja $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]$ toimintaa siirroilla euklidisessa tasossa. (Samastetaan $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{E}^2$ tavanomaiseen tapaan.)

4. Piirrä kuva joukosta $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right] \subset \mathbb{C}$ ja osoita, että tulkittuna ryhmän $\text{Isom } \mathbb{E}^2$ aliryhmäksi $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]$ on epäjatkuva ryhmä. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]$ Dirichlet'n monikulmio $D(0)$.

5. Ryhmän $\Gamma < \text{Isom } \mathbb{E}^n$ toiminta avaruudessa $\mathbb{E}^n$ määrää ekvivalenssirelaation $\sim_\Gamma$ asettamalla kaikille $x, y \in \mathbb{E}^n$ $x \sim y$, jos ja vain jos $\Gamma x = \Gamma y$.

(a) Osoita, että $\sim_\Gamma$ on ekvivalenssirelaatio.

(b) Miten epäjatkuvan ryhmän $\mathbb{Z}^2$ määräämä ekvivalenssirelaatio samastaa ryhmän $\mathbb{Z}^2$ Dirichlet'n monikulmion $D(0)$ reunalla olevat pisteet?

(c) Miten epäjatkuvan ryhmän $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]$ määräämä ekvivalenssirelaatio samastaa ryhmän $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]$ Dirichlet'n monikulmion $D(0)$ reunalla olevat pisteet?