

Ryhmät ja geometria

Harjoitus 4, 17.10.2012

1. Tarkastellaan (kolmiulotteista) kuutiota

$$K_3 = \{x \in \mathbb{E}^3 : |x_1|, |x_2|, |x_3| \leq 1\}.$$

- (a) Kuvaile kaikki kuution 24 kiertosymmetriaa.
- (b) Osoita, että K_3 on säännöllinen monitahokas.
- (c) Millaisia ovat loput 24 symmetriaa?

2. Standardi d -simpleksi on

$$\Sigma_d = \left\{x \in \mathbb{E}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} x_i = 1, x_j \geq 0 \text{ kaikilla } i \in \{1, 2, \dots, d+1\}\right\}.$$

Osoita, että

- (a) simpleksin Σ_d lippujen joukko vastaa luonnollisella tavalla euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^{d-1}$ ortonormaalien standardikannan $e_1, \dots, e_{d+1}$ vektorien permutaatioiden joukkoa.
- (b) Σ_d on säännöllinen polytoppi.

Avaruuden $\mathbb{E}^n$ polytopin Q *duaali* on

$$Q^* = \{x \in \mathbb{E}^n : (x|y) \leq 1 \text{ kaikille } y \in Q\}.$$

Pistejoukon $A \subset \mathbb{E}^n$ *konvekssi verho* on

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}.$$

3. Olkoon $P \subset \mathbb{E}^n$ polytoppi. Osoita, että P on kärkiensä konvekssi verho.

4. Osoita, että neliön K_2 duaali on neliö ja kuution K_3 duaali on oktaedri.

Jos monitahokkaalla on se ominaisuus, että sen jokaisella taholla on a sivua ja jokainen kärki kuuluu b tahoon (ja b sivuun), niin monitahokkaan *Schläflin symboli* on $\{a, b\}$.

5. Osoita, että mahdolliset Schläflin symbolit ovat $\{\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}\}$ ja $\{5, 3\}$.