

Ryhmät ja geometria

Harjoitus 3, 10.10.2012

1. Olkoon G äärellinen ryhmä, joka toimii äärellisellä joukolla X . Olkoon $x \in X$ ja $F: Gx \rightarrow G/\text{Stab}_G(x)$ kuvaus

$$F(gx) = g \text{Stab}_G(x).$$

- (a) Osoita, että kuvaus F on hyvin määritelty bijektio.
- (b) Osoita, että

$$\#G = \#\text{Stab}_G(x)\#(Gx)$$

kaikille $x \in X$.

2. Osoita, että ryhmällä $\text{SO}(3)$ on diedriryhmän D_n kanssa isomorfinen aliryhmä jokaisella $n \geq 3$.

Ratkaise tämä tehtävä käyttämättä kompleksista lineaarialgebraa. Kohdan (c) voi tehdä hieman samaan tapaan kuin luennolla tarkasteltiin ryhmää $\text{O}(2)$.

3. Olkoon $A \in \text{O}(3)$. Osoita, että

- (a) matriisin A ainoat mahdolliset reaaliset ominaisarvot ovat -1 ja 1 .
- (b) 1 tai -1 on matriisin $A \in \text{O}(3)$ ominaisarvo.
- (c) On matriisi $A_0 \in \text{O}(2)$ siten, että A on konjugaatti ryhmässä $\text{O}(3)$ blokkidagonaalimatriisin $\text{diag}(A_0, 1) = \begin{pmatrix} A_0 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix}$ kanssa.

Tämän tehtäväpaperin takasivulla on pieni tietopaketti kompleksisesta lineaarialgebrasta. Ratkaise tehtävät 4 ja 5 sen avulla.

4. Olkoon $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ reaalisen $n \times n$ -matriisin A kompleksinen ominaisarvo. Olkoon v ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Osoita, että

- (a) avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit $\text{Re } v$ ja $\text{Im } v$ virittävät 2-ulotteisen reaalisen aliavaruuden.
- (b) vektorit $\text{Re } v$ ja $\text{Im } v$ kuvautuvat näin:

$$A \text{Re } v = \alpha \text{Re } v - \beta \text{Im } v$$

ja

$$A \text{Im } v = \beta \text{Re } v + \alpha \text{Im } v.$$

5. Olkoon $A \in \text{O}(3)$.

- (a) Osoita, että matriisin A kaikki ominaisarvot ovat kompleksitason yksikköympyrällä.
- (b) Todista tehtävän 3 kohta (c) kompleksisen lineaarialgebran avulla.

²Vihje: Olkoon $\tilde{S} \in \text{SO}(3)$ kierto kulman π verran x_1 -akselin ympäri. Mikä on tämän kuvauksen rajoittuma tasoon $\{x \in \mathbb{E}^3 : x_3 = 0\}$.

PIENI TIETOPAKETTI KOMPLEKSISESTA LINEAARIALGEBRASTA

Kompleksisen vektoriavaruuden aksioomat ovat samat kuin reaalisisä tapauksessa, mutta vektoreille on määritetty kompleksiluvulla kertominen ja kaikki ominaisuudet, joissa reaalisisä tapauksessa esiintyy $\mathbb{R}$ vaaditaan kompleksiluvuille. Esimerkiksi

- Kompleksisessä vektoriavaruudessa V $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ kaikille $\alpha \in \mathbb{C}$ ja kaikille $u, v \in V$.
- Kuvaus $L: V \rightarrow V$ on (kompleksinen) lineaarikuvaus, tai kompleksilineaarinen kuvaus, jos $L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$ kaikille $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja kaikille $u, v \in V$.
- Lineaarikuvaukset ja matriisit vastaavat toisiaan, kun kannat on valittu kuten reaalisisä tapauksessa
- Vektori $v \in V - \{0\}$ on lineaarikuvauksen $L: V \rightarrow V$ ominaisvektori ominaisarvolla $\lambda \in \mathbb{C}$, jos $Lv = \lambda v$.
- Neliömatrisin ominaisarvot ovat sen karakteristisen polynomin juuret. Algebran peruslauseen mukaan jokaisella $n \times n$ -matriisilla on kertaluku huomioiden n ominaisarvoa. Neliömatrisin ominaisarvojen tulo antaa sen determinantin.
- Lineaarinen riippuvuus ja siis myös aliavaruuden dimensio määritellään myös kompleksilukujen avulla: Vektorit u_i , $i \in I$ ovat lineaarisesti riippuvia, jos kaikille äärellisille summille pätee

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k u_{i_k} = 0$$

vain, jos $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

$\mathbb{C}^n$ on kompleksinen vektoriavaruus, jonka (kompleksinen) dimensio on n . Sen standardikanta, joka koostuu vektoreista $e_1, \dots, e_n$, missä e_k on vektori, jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on $1 \in \mathbb{C}$ paikalla k , on selvästi lineaarisesti riippumaton. Kompleksisessä vektoriavaruudessa $\mathbb{C}^n$ määritellään vektorien reaali- ja imaginaariosa komponenteittain kuvauksina $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: Jos $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, niin

$$\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n),$$

$$\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$$

ja kompleksikonjugaatti määritellään komponenteittain

$$\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$