

Ryhmät ja geometria

Harjoitus 2, 3.10.2012

1. Todista euklidisen avaruuden sinilause

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

2. Osoita, että seuraava yhtälö pätee:

$$\{x \in \mathbb{E}^n : d(x, p) = d(x, q)\} = \frac{p+q}{2} + (p-q)^\perp.$$

3. Olkoot $p, q \in \mathbb{S}^n$, $p \neq q$. Osoita, että pallogeometrian bisektori

$$\text{bis}(p, q) = \{x \in \mathbb{E}^n : d(x, p) = d(x, q)\}$$

on pallogeometrian hypertaso.

4. Osoita, että jokainen pallonkuoren $\mathbb{S}^n$ k -taso on isometrinen pallonkuoren $\mathbb{S}^k$ kanssa.

Olkoon G ryhmä, joka toimii metrisessä avaruudessa X isometrioilla. Pisteen $x \in X$ *stabiloiija* on

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G : gx = x\}.$$

Ryhmän R aliryhmät A ja B ovat konjugaatteja, jos on $r \in R$, jolle

$$\{rar^{-1} : a \in A\} = B.$$

5. Oletetaan, että G toimii transitiivisesti: Kaikilla $x, y \in X$ on $g \in G$, jolle $gx = y$. Osoita, että $\text{Stab}_G(x)$ ja $\text{Stab}_G(y)$ ovat konjugaatteja aliryhmiä kaikilla $x, y \in X$.
6. Osoita, että $\text{Stab}_{\text{Isom}(\mathbb{S}^n)}(v)$ on isomorfinen ryhmän $O(n)$ kanssa jokaiselle $v \in \mathbb{S}^n$.