

Ryhmät ja geometria

Harjoitus 1, 26.9.2012

1. Osoita, että metrisen avaruuden X isometriat muodostavat ryhmän, kun laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen.

Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ affiini hypertaso on joukko

$$H = H(P, u) = P + u^\perp = \{P + v : (v|u) = 0\},$$

missä $P, u \in \mathbb{E}^n$ ja $\|u\| = 1$. Heijastus hypertasossa $H = H(P, u)$ on kuvaus $r_H: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$,

$$r_H(x) = x - 2(x - P|u)u.$$

2. Olkoon r heijastus euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ affiinissa hypertasossa H . Osoita, että

- (a) jos $0 \in H$, niin r on ortogonaalinen lineaarikuvaus.
- (b) $r(x) = A(x) + b$, missä A on ortogonaalinen lineaarikuvaus ja $b \in \mathbb{R}^n$.
- (c) heijastus hypertasossa on hyvin määritelty: (P, u) ja (Q, v) määräävät saman hypertason, jos ja vain jos ne määräävät saman heijastuksen.

3. Olkoon H affiini hypertaso euklidisessä avaruudessa $\mathbb{R}^n$, ja olkoon r_H vastaava heijastus. Osoita, että

- (a) $r_H \circ r_H$ on identtinen kuvaus.
- (b) r_H on isometria.
- (c) H on kuvauksen r_H kiintopisteiden joukko.

Olkoon H ryhmän G aliryhmä ja N ryhmän G normaali aliryhmä siten, että

$$G = NH = \{nh : n \in N \text{ ja } h \in H\}.$$

Jos N on normaali ja $N \cap H = \{\text{id}\}$, sanotaan, että G on ryhmien N ja H puolisuora tulo, jolloin käytetään merkintää $G = N \rtimes H$.

4. Olkoon

$$E(n) = \{x \mapsto Ax + b : A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Osoita, että $E(n)$ on ryhmän $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ aliryhmä. Osoita, että

$$T(n) = \{x \mapsto x + b : b \in \mathbb{R}^n\}$$

on Euklidisen ryhmän $E(n)$ normaali aliryhmä. Osoita, että $E(n)$ on *translaatioryhmän* $T(n)$ ja ortogonaaliryhmän $O(n)$ puolisuora tulo.

5. Olkoon $H(0, u)$ euklidisen tason suora, joka muodostaa kulman $\frac{\phi}{2}$ positiivisen x_1 -akselin kanssa kuten kuvassa. Olkoon r euklidisen tason heijastus suorassa $H(0, u)$. Määritä kuvauksen r matriisi standardikannassa.

⁴Huomautus: Koska $T(n)$ on selvästi isomorfinen additiivisen ryhmän $\mathbb{R}^n$ kanssa, sanotaan, että $E(n)$ on isomorfinen ryhmien $\mathbb{R}^n$ ja $O(n)$ puolisuoran tulon kanssa.

