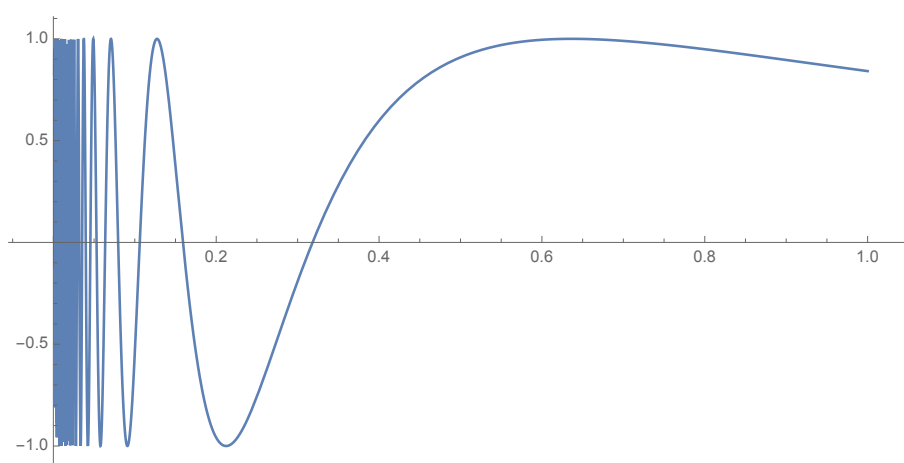

Metriset avaruudet ja Topologia



JOUNI PARKKONEN
LUENTOJA JYVÄSKYLÄN YLIOPISTOSSA
SYKSYLLÄ 2017

Sisältö

I	Metriset avaruudet	5
1	Metriset avaruudet	7
1.1	Määritelmä ja esimerkkejä	7
1.2	Normiavaruus	9
1.3	Isometria	11
2	Pallot, avoimet joukot ja suljetut joukot.	15
2.1	Pallot	15
2.2	Avoimet ja suljetut joukot	17
2.3	Sisus, reuna ja sulkeuma	18
2.4	Lokaalit ominaisuudet	20
3	Jatkuvat kuvaukset	23
3.1	Jatkuvuus	23
3.2	Jatkuvat kuvaukset normiavaruuteen	25
4	Ekvivalentit metriikat ja homeomorfismit	27
4.1	Homeomorfismi	27
4.2	Ekvivalentit normit	29
4.3	Tuloavaruudet	29
5	Jonot, täydelliset metriset avaruudet	33
5.1	Suppenevat jonot ja Cauchyn jonot	33
5.2	Jonot ja jatkuvat kuvaukset	35
5.3	Täydellinen metrinen avaruus	36
5.4	Banachin kiintopistelause	38
5.5	Kuvauksen raja-arvo	42
5.6	Osajonot	42
6	Kompaktius	45
6.1	Kompaktit joukot	45
6.2	Kompaktit joukot ja jatkuvat kuvaukset	48
6.3	Kompaktit joukot euklidisessa avaruudessa	49

7	Yhtenäisyys	53
7.1	Yhtenäiset joukot	53
7.2	Yhtenäiset joukot avaruudessa $\mathbb{E}^1$	54
7.3	Polkuyhtenäisyys	55
7.4	Relatiivitopologiaa	57
II	Topologia	59
8	Topologiset avaruudet	61
8.1	Topologia, avoimet ja suljetut joukot	61
8.2	Hausdorffin avaruudet	63
8.3	Topologioiden vertailua	63
8.4	Jatkuvat kuvaukset	64
8.5	Jonot	65
9	Joukkojen topologisia ominaisuuksia	69
9.1	Sisus, reuna ja sulkeuma	69
9.2	Sulkeuma ja jonot	71
9.3	Tiheät joukot ja separoituvuus	72
9.4	Bairen avaruudet	73
10	Kompaktit avaruudet	77
10.1	Kompaktit joukot	77
10.2	Kompaktit Hausdorffin avaruudet	79
10.3	Kompaktius ja jonokompaktius	80
10.4	Yhden pisteen kompaktointi	81
11	(Ko)indusoidut topologiat	85
11.1	Relatiivitopologia ja lähtötopologia	85
11.2	Tekijätopologia ja maalitopologia	86
11.3	Kuvausperheen maalitopologia	89
12	Kanta ja esikanta	93
12.1	Topologian kanta	93
12.2	Kompaktin suppenemisen topologia	95
12.3	Topologian esikanta	96
13	Tulotopologia	99
13.1	Yleinen tulojoukko ja tulotopologia	99
13.2	Kuvausperheen lähtötopologia	102
13.3	Tihonovin lause	103
	Kirjallisuutta	107

Lukijalle

Nämä ovat muistiinpanoni metrinen avaruuksien (Osa I) ja topologian (Osa II) kursseille syyslukukaudella 2017.

Metrinen avaruuksien kurssi on nimensä mukaisesti johdatus metrinen avaruuksien teoriaan. Peruskäsitteiden (metriikka, jatkuvuus jne.) jälkeen tutustumme täydellisiin, kompakteihin ja yhtenäisiin metrisiin avaruuksiin.

Topologian kurssilla tarkastelemme samoja kysymyksiä kuin Osassa I mutta nyt tarkasteltavassa avaruudessa ei välttämättä ole määritelty etäisyysfunktioita. Sen sijaan tarkasteltavissa avaruuksissa on avoimien joukkojen kokoelma, jota kutsutaan topologiaksi. Topologian kurssilla todistetaan joitakin edistyneempiä metrinen avaruuksien tuloksia kuten Bairen lause ja Arzelà ja Ascoli lause. Topologian kurssin huipentumana tarkastelemme yleisten tuloavaruuksien topologiaa ja todistamme Tihonovin lauseen, jonka mukaan kompaktien avaruuksien tulo on kompakti.

Hyviä lähteitä itseopiskeluun ovat esimerkiksi [Väi2], [Pit] [SV], [Väi1].

Kansikuva: Topologin sinikäyrä on yhtenäinen mutta ei polkuyhtenäinen.

Merkintöjä

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioiden lukumäärä.
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.
- $A \sqcup B$ on joukkojen A ja B **erillinen yhdiste**. Merkintä tarkoittaa joukkoa $A \cup B$ lisätiedolla, että $A \cap B = \emptyset$.
- $\mathcal{F}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}$ kaikkien kuvausten $f : X \rightarrow Y$ joukko.
- $\text{raj}(X, \mathbb{R})$ rajoitettujen funktioiden $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ avaruus.
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A, \text{ jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.
- $A \subsetneq B$ joukko A on joukon B aito osajoukko: $A \subset B$ ja $A \neq B$.
- $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{jos } m = n \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$.

Uusien käsitteiden **määritelmät** on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Osa I

Metriset avaruudet

Luku 1

Metriset avaruudet

1.1 Määritelmä ja esimerkkejä

Metriikka eli etäisyysfunktio on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määrämällä avaruuden $\mathbb{R}^n$ euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d_{\mathbb{E}}(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on.

Olkoon $X \neq \emptyset$.^a Kuvaus $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ on **etäisyysfunktio** eli **metriikka** joukossa X , jos sillä on seuraavat ominaisuudet

- (1) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in X$ (symmetrisyys), ja
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X, d) on **metrinen avaruus**.

^aVäisälä sallii tässä myös tyhjän joukon ja mikäpä siinä.

Esimerkki 1.1. Euklidinen metrinen avaruus

$$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{E}}).$$

Metriikan $d_{\mathbb{E}}$ positiivisuus ja symmetrisyys ovat selviä määrittelevän lausekkeen perusteella. Kolmioepäyhtälö lienee todistettu aiemmilla kursseilla ja seuraa myöhemmin osoitettavasta Propositioista 1.7.

Esimerkki 1.2 (Diskreetti metriikka). Olkoon X epätyhjä joukko. **Diskreetti metriikka** δ joukossa X määritellään asettamalla

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \neq b \\ 0, & \text{jos } a = b. \end{cases}$$

Pari (X, d) on **diskreetti metrinen avaruus**. Metriikan ominaisuudet (1) ja (2) ovat selviä. Tarkastellaan kolmioepäyhtälöä tapauksessa, jossa x, y ja z ovat kaikki eri pisteitä. Tällöin

$$\delta(x, y) = 1 \leq 2 = 1 + 1 = \delta(x, z) + \delta(z, y).$$

On helppo tarkastaa, että jos joukossa $\{x, y, z\} \subset X$ on korkeintaan kolme pistettä, kolmioepäyhtälössä pätee yhtäsuuruus.

Esimerkki 1.3 (Ranskan rautatieavaruus). Lauseke¹

$$d_{\text{SNCF}}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & , \text{ kun } x \text{ ja } y \text{ ovat lineaarisesti riippuvia} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrittää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$. Avaruutta $(\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$ kutsutaan **Ranskan rautatieavaruuksiksi**. Tässä origo ajatellaan Pariisiksi ja kaikki radat ovat Pariisista maakuntiin johtavia säteitä. Jos kaupungit eivät ole samalla säteellä, niiden välillä voi matkustaa junalla vain Pariisin kautta.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. On helppo tarkastaa, että jos $A \subset X$, ei ole tyhjä joukko, niin $(A, d|_{A \times A})$ on metrinen avaruus.

Näin määriteltäjä joukon A metriikkaa sanotaan metrisen avaruuden X **indusoimaksi** metriikaksi joukossa A .

Käytämme indusoidulle metriikalle usein samaa merkintää kuin ympäröivän avaruuden X metriikalle.

Esimerkki 1.4 ($\mathbb{S}^n$). Euklidisen avaruuden yksikköpallo on

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}.$$

Koska S^{n-1} on epätyhjä joukko, sille voidaan määritellä diskreetti metriikka. Koska S^{n-1} on ympäröivän euklidisen avaruuden epätyhjä osajoukko, sillä on euklidisen avaruuden indusoima metriikka, jossa kahden ympyrän pisteen etäisyys on niitä yhdistävän jängteen euklidinen pituus. Esimerkissä 1.3 käsitellyn metriikan rajoittuma joukkoon S^2 on diskreetti metriikka 2δ .

Neljäs metriikka, joka on usein luonnollisin, on

kulmametriikka,

$$\angle(x, y) = \arccos(x|y),$$

missä $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

¹SNCF, Société nationale des chemins de fer français, on Ranskan valtion rautatieyhtiö.

Osoitetaan ympyrän tapauksessa, että tämä todella on metriikka. Ainoa seikka, joka vaatii tarkastuksen on kolmioepäyhtälö. Olkoot $A, B, C \in S^1$. Olkoot $a = \arccos(B|C)$, $b = \arccos(A|C)$ ja $c = \arccos(A|B)$. Olkoon $u \in S^1$, $u \perp C$. Nyt $A = C \cos b \pm u \sin b$ ja $B = C \cos a \pm u \sin a$, joten

$$\cos c = (A|B) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b \geq \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b).$$

Koska $\cos$ on vähenevä funktio välillä $[0, \pi]$, saadaan kolmioepäyhtälö. Korkeammassa ulottuvuudessa todistus on oleellisesti sama mutta tällöin pisteet A, B ja C eivät välttämättä ole samalla ympyrällä, joten vektori u pitää korvata kahdella vektorin $C \in \mathbb{E}^n$ ortogonaalikomplementin alkiolla. Käytämme yleensä kulmametriikkaa pallonpinnalla ja otamme käyttöön merkintäsopimuksen

$$\mathbb{S}^1 = (S^1, \angle).$$

Esimerkki 1.5. Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) tuloavaruudessa $X \times Y$ on erilaisia ”luonnollisia” metriikoita: Jokaiselle $p \geq 1$ määritellään metriikka

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p}.$$

Lisäksi maksimimetriikka

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

on myös usein käyttökelpoinen. Harjoitustehtävissä 1.8 ja 1.9 tarkastellaan tapaukset d_1 ja $d_{\max}$. Muihin tapauksiin palataan ainakin funktionaalianalyysissä.

1.2 Normiavaruus

Olkoon V $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus. Funktio $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty[$ on **normi**, jos

- (1) $\|x\| = 0$, jos ja vain jos $x = 0$.
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in V$.
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikille $x, y \in V$.

Normi määrittelee metriikan luonnollisella tavalla:

Propositio 1.6. *Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Lauseke*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

määrittelee metriikan avaruudessa X . Metriikka d toteuttaa

$$d(x + v, y + v) = d(x, y)$$

kaikille $x, y, v \in V$.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa suoraan normin määritelmästä. Toinen väite saadaan laskulla

$$d(x+v, y+v) = \|x+v - (y+v)\| = \|x-y\| = d(x, y). \quad \square$$

Olkoon V $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus. Kuvaus $(\cdot|\cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ on **sisätulo**, jos

- (1) $(v|v) \geq 0$ kaikille $v \in V$ ja $(v|v) = 0$, jos ja vain jos $v = 0$,
- (2) kuvaus $v \mapsto (v, v_0)$ on lineaarikuvaus kaikille $v_0 \in V$,
- (3) $(v|w) = (w|v)$ kaikille $v, w \in V$.

Pari $(V, (\cdot|\cdot))$ on **sisätuloavaruus**.

Propositio 1.7. *Olkoon $(V, (\cdot|\cdot))$ sisätuloavaruus. Sisätulo määrää normin asettamalla*

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Todistus. Positiivisuus on selvä. Lisäksi kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x | \lambda x) = \lambda^2 (x | x) = \|x\|^2.$$

Kolmioepäyhtälö seuraa lineaarialgebrassa todistettavasta Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöstä: Kaikille $x, y \in V$ pätee ²

$$|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Tämän epäyhtälön avulla saamme

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y | x+y) = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned} \quad \square$$

Esimerkki 1.8. Euklidinen normi

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

on normi Proposition 1.7 nojalla.

Muita tärkeitä normeja avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ovat

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

²Jos $x, y \in V - \{0\}$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin

$$0 \leq (x + \lambda y | x + \lambda y) = (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + \lambda^2(y|y) = (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y).$$

Valitsemalla $\lambda = -\frac{(x|y)}{(y|y)}$ saadaan $0 \leq (x|x) - 2\frac{(x|y)}{(y|y)}(x|y) + \frac{(x|y)^2}{(y|y)^2}(y|y) = (x|x) - \frac{(x|y)^2}{(y|y)}$, mistä siistimällä saadaan haluttu epäyhtälö. Jos $(x|y) = \pm\|x\|\|y\|$, niin $(\frac{x}{\|x\|} \mp \frac{y}{\|y\|} | \frac{x}{\|x\|} \mp \frac{y}{\|y\|}) = 0$, joten $y = \pm\frac{\|y\|}{\|x\|}x$.

ja yleisemmin

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$$

kun $1 \leq p < \infty$. Normin ominaisuudet (0) ja (1) ovat selviä mutta kolmioepäyhtälöä varten tarvitaan hieman työtä. Tapauksen $1 < p < \infty$ todistus esitetään funktionaalianalyysin kurssilla.

Esimerkki 1.9. Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon

$$\text{raj}(X, \mathbb{R}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

joukossa X määriteltyjen rajoitettujen $\mathbb{R}$ -arvoisten funktioiden joukko. Avaruuden $\mathbb{E}^1$ kolmioepäyhtälön nojalla $\text{raj}(X, \mathbb{R})$ on kaikkien funktioiden vektoriavaruuden $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ vektorialiavaruus, joten se on vektoriavaruus. Harjoitustehtävässä 1.12 osoitamme, että funktio $\|\cdot\|_\infty: \text{raj}(X, \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty[$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \quad (1.1)$$

on normi.

Erikoistapaus rajoitettujen funktioiden avaruudesta on rajoitettujen reaalilukujonojen avaruus

$$\ell^\infty = \{\omega \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega(n)| < \infty\}.$$

Lauseke

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega(n)|$$

on normi vektoriavaruudessa ℓ^∞ .

Esimerkki 1.10. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Analyysin kursseilla on osoitettu, että kaikki jatkuvat funktiot $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ ovat rajoitettuja. Koska jatkuvien funktioiden summat ja reaaliluvulla kerrotut jatkuvat funktiot ovat jatkuvia, $C^0(I, \mathbb{R})$ on avaruuden $\text{raj}(I, \mathbb{R})$ aliavaruus. Siksi jatkuvien funktioiden vektoriavaruus $C^0(I, \mathbb{R})$ varustetaan usein normilla $\|\cdot\|_\infty$. Palaamme tähän esimerkkiin luvussa 5.3.

Propositio 1.11. *Jono $f_k \in C^0(I, \mathbb{R})$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, jos ja vain jos $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.13. □

1.3 Isometria

Olko (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on **isometrinen upotus**, jos kaikille $x, y \in X_1$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) = d_1(x, y).$$

Jos isometrinen upotus on bijektio, niin se on **isometria**. Jos on isometria $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$, niin metriset avaruudet (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) ovat **isometriset**.

Lemma 1.12. *Isometrinen upotus on injektio.*

Todistus. Kahden eri pisteen etäisyys ei ole 0. Jos ne kuvautuvat samaksi pisteeksi, niin kuvapisteen etäisyys on 0, joten kuvaus ei ole isometria. $\square$

Lemma 1.13. Jos $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ ja $G: (X_2, d_2) \rightarrow (X_3, d_3)$ ovat isometrisia upotuksia, niin $G \circ F$ on isometrinen upotus. Isometrioiden yhdistetty kuvaus on isometria. Isometrian käänteiskuvaus on isometria.

Todistus. Harjoitustehtävä 1.14 $\square$

Esimerkki 1.14. Olkoon $b \in \mathbb{R}^n$. Kuvaus $t_b: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, $t_b(x) = x + b$ on isometria. Olkoon $k \leq n$. Kuvaus $u: \mathbb{E}^k \rightarrow \mathbb{E}^n$, $u(y) = b + (y, 0)$ on isometrinen upotus.

Esimerkki 1.15. Muistamme lineaarialgebrasta, että $n \times n$ -matriisi A on **ortogonaalinen**, jos sen sarakkeet muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaalien kannan. Ortogonaalinen $n \times n$ -matriisi A toteuttaa yhtälön

$$(Ax \mid Ay) = (x \mid y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se määrää isometrian $x \mapsto Ax$ metrisissä avaruuksissa $\mathbb{E}^n$ ja $\mathbb{S}^{n-1}$. Jos nimittäin $x, y \in \mathbb{E}^n$, niin käyttämällä lineaarisuutta, normin määritelmää ja matriisin A ortogonaalisuutta saadaan

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{E}}(Ax, Ay)^2 &= \|Ax - Ay\|^2 = \|A(x - y)\|^2 = (A(x - y) \mid A(x - y)) \\ &= (x - y \mid x - y) = \|x - y\|^2 = d(x, y)^2. \end{aligned}$$

Koska metriikka ei saa negatiivisia arvoja, väite seuraa tästä. Jos taas $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, niin

$$\angle(Ax, Ay) = \arccos(Ax \mid Ay) = \arccos(x \mid y) = \angle(x, y).$$

Esimerkki 1.16. Olkoon $\exp: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ kuvaus

$$\exp(s) = (\cos s, \sin s).$$

Selvästi $\exp$ on surjektio. Lisäksi kaikille $s, t \in \mathbb{E}^1$, joille $|s - t| \leq \pi$ pätee

$$\begin{aligned} \angle(\exp(s), \exp(t)) &= \arccos((\cos s, \sin s) \mid (\cos t, \sin t)) \\ &= \arccos(\cos s \cos t + \sin s \sin t) \\ &= \arccos \cos(s - t) = \arccos(|s - t|) = |s - t|. \end{aligned}$$

Siis kuvauksen $\exp$ rajoittuma jokaiselle välille, jonka pituus on korkeintaan π , on isometria. Jos taas $\pi < |s - t| < 2\pi$, niin $\arccos \cos(|s - t|) = 2\pi - |s - t|$, joten pidemmällä välillä kuvaus ei ole isometria. Kuvauksia, jotka ovat isometrioita jokaisen pisteen lähelle rajoitettuna, sanotaan **lokaaleiksi isometrioiksi**. Palaamme täsmälliseen määritelmään luvussa 2.

Harjoitustehtäviä

1.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita, että kaikille $x, y, z \in X$ pätee

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

1.2. Osoita, että lauseke

$$d_{\text{SNCF}}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & , \text{ kun } x \text{ ja } y \text{ ovat lineaarisesti riippuvia ja} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrittää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$.

1.3. Osoita, että lauseke

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ kun } x = y \text{ ja} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrittää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$.

1.4. Olkoon E epätyhjä äärellinen joukko. Joukon E **potenssijoukko** on sen osajoukkojen muodostama joukko

$$\mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}.$$

Joukkojen **symmetrinen erotus** määritellään asettamalla

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Osoita, että

$$d(A, B) = \#(A \triangle B)$$

on metriikka potenssijoukossa.³ Osoita, että $\#(A - B)$ ei ole metriikka potenssijoukossa.

1.5. Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon

$$K_n = \{f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

Osoita, että

$$d(f, g) = \#\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : f(k) \neq g(k)\}.$$

on metriikka joukossa K_n .⁴

1.6. Olkoon d metriikka avaruudella X , ja olkoon $\alpha \in]0, 1]$. Osoita, että lauseke

$$d^\alpha(x, y) = d(x, y)^\alpha$$

on myös metriikka.⁵

1.7. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta (X, d) ja luvusta $\alpha > 1$, jolle tehtävän 1.6 tapaan määritelty funktio d^α ei ole metriikka.

³Piirrä kolmen joukon leikkauksia kuvaava Venn-diagrammi. Osoita, että $(A \triangle C) \triangle (C \triangle B)$.

⁴Tämä liittyy itse asiassa tehtävään 1.4 läheisesti.

⁵Kannattaa ensin todistaa, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b pätee $a^\alpha + b^\alpha \geq (a + b)^\alpha$.

1.8. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

1.9. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

1.10. Osoita, että lauseke

$$\|x\|_1 = \|x_1\| + \|x_2\|$$

on normi avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

1.11. Osoita, että lauseke

$$\|x\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$$

on normi avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

1.12. Olkoon $X \neq \emptyset$. Osoita, että lauseke

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

on normi avaruudessa $\text{raj}(X, \mathbb{R})$.

1.13. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Osoita, että jono $f_k \in C^0(I, \mathbb{R})$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, jos ja vain jos $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$.⁶

1.14. Olkoot (X_1, d_1) , (X_2, d_2) ja (X_3, d_3) metrisiä avaruuksia ja olkoot $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ ja $G: (X_2, d_2) \rightarrow (X_3, d_3)$ isometrisiä upotuksia. Osoita, että $G \circ F$ on isometrinen upotus. Osoita, että F^{-1} ja $G \circ F$ ovat isometrioita, jos F ja G ovat isometrioita.

1.15. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, jossa on täsmälleen kolme pistettä. Osoita, että on isometrinen upotus $j: X \rightarrow \mathbb{E}^2$.

1.16. Esimerkissä 1.3 tarkasteltu metriikka d_{SNCF} voidaan määritellä samalla lausekkeella mihin tahansa avaruuteen $\mathbb{R}^n$, kun $n \geq 1$. Osoita, että avaruudet $(\mathbb{R}^n, d_{\text{SNCF}})$ ovat isometrisiä, kun $n \geq 2$.⁷

Olkoon d_1 normin $\|\cdot\|_1$ määrittämä metriikka vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$.

1.17. Olkoon

$$Y = \{0, (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Osoita, että ei ole isometristä upotusta $j: (Y, d_1) \rightarrow \mathbb{E}^n$ millään n .⁸

1.18. Määritä etäisyydet $d_\infty(0, (\frac{1}{2}, t))$ ja $d_\infty((1, 0), (\frac{1}{2}, t))$ kaikille $t \in \mathbb{R}$. Etsi muutamia isometrisiä upotuksia $j: ([0, 1], d_\mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, joille pätee $j(0) = 0$ ja $j(1) = (1, 0)$.

⁶Palauta mieleen kurssin JMA4/Sarjat ja approksimointi/Analyysi 3 asioita.

⁷Tässä tehtävässä voit käyttää ilman perusteluja tietoa, että joukkojen S^k ja S^n välillä on bijektio, kun $k, n \geq 1$.

⁸Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö auttaa.

Luku 2

Pallot, avoimet joukot ja suljetut joukot.

2.1 Pallot

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r > 0$. Joukko

$$B(x_0, r) = B_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

on r -säteinen avoin pallo ja

$$\overline{B}(x_0, r) = \overline{B}_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

on r -säteinen suljettu pallo. Avoimia palloja $B(x_0, r)$, $r > 0$, sanotaan pisteen $x_0 \in X$ palloympäristöiksi.

Esimerkki 2.1. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ yksikköpalloa eri metriikoissa:

$$B_{d_{\mathbb{E}}}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} = B_{d_{\text{SNCF}}}(0, 1).$$

Diskreetin metriikan tilanne on mielenkiintoinen: avoimille palloille pätee

$$B_{\delta}(0, 1) = \{0\} = B_{\delta}(0, r)$$

kaikilla $0 < r \leq 1$ ja

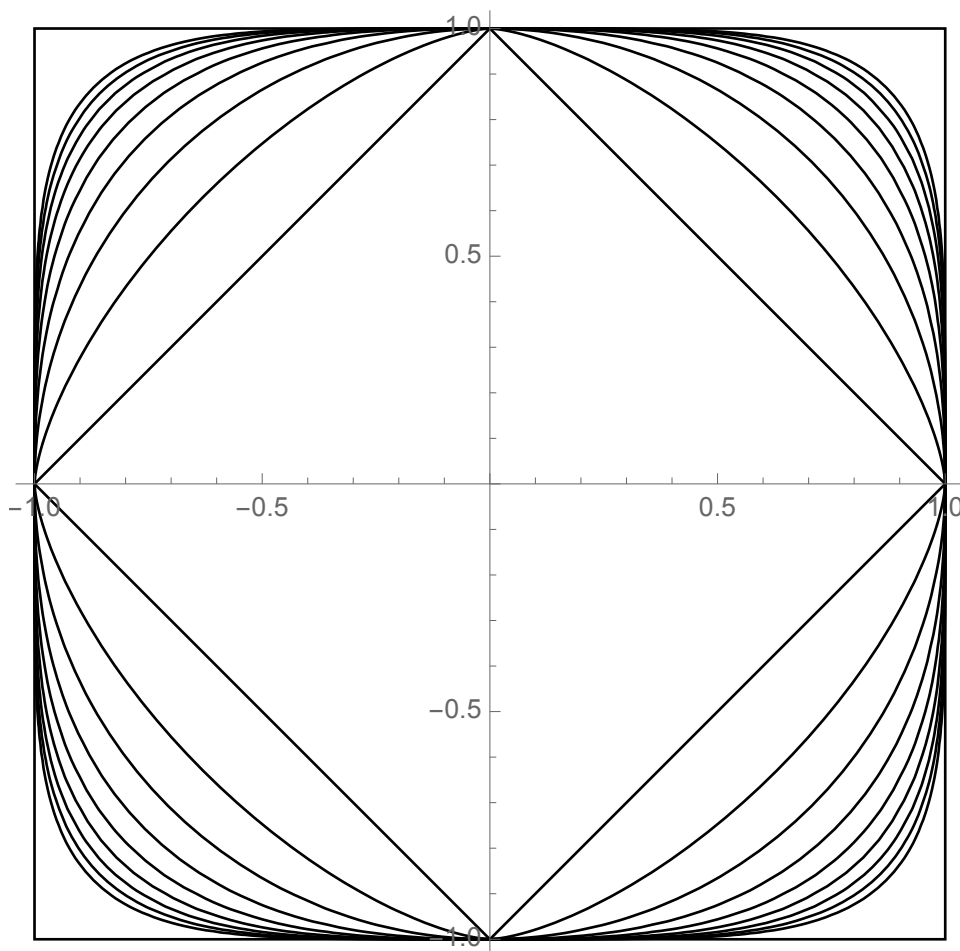
$$B_{\delta}(0, r) = \mathbb{R}^2$$

kaikilla $r > 1$. Vastaavasti suljetuille palloille pätee

$$\overline{B}_{\delta}(0, 1) = \mathbb{R}^2 = \overline{B}_{\delta}(0, r)$$

kaikilla ≥ 1 ja

$$\overline{B}_{\delta}(0, r) = \{0\}$$



Kuva 2.1: Yksikköympyröitä eri normeilla, kun $p \geq 1$.

kaikilla $r < 1$.

Olkoon d_p Esimerkissä 1.8 käsitellyn normin $\|\cdot\|_p$ määräämä normi, kun $1 \leq p \leq \infty$. Tällöin

$$B_{d_1}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1 \text{ ja } |x_2| < 1\} =]-1, 1[^2$$

ja

$$\begin{aligned} B_{d_\infty}(0, 1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < 1 \text{ ja } x_1 - x_2 < 1 \text{ ja } -x_1 + x_2 < 1 \text{ ja } -x_1 - x_2 < 1\}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.2. Olkoon $0 \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ vakiofunktio $0(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$. Nyt

$$B(0, 1) = \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) : |f(x)| < 1 \text{ kaikilla } x \in [0, 1]\}.$$

Metrinen avaruus X on **rajoitettu**, jos on $x \in X$ ja $r > 0$, joille $X \subset B(x, r)$. Olkoon lisäksi Y metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow Y$. Kuvaus f on **rajoitettu**, jos $F(X)$ on avaruuden Y rajoitettu joukko.

Esimerkki 2.3. (1) Kaikki diskreetit metriset avaruudet (X, δ) ovat rajoitettuja koska $X = \overline{B}_\delta(x, 1)$ kaikilla $x \in X$.

(2) Pallon pinta $\mathbb{S}^n$ on rajoitettu, koska $\mathbb{S}^n = \overline{B}(x, \pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{S}^n$.

2.2 Avoimet ja suljetut joukot

Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Piste $a \in A$ on joukon A **sisäpiste**, jos on $r_a > 0$, jolle $B(a, r_a) \subset A$. Metrisen avaruuden X osajoukko on **avoin**, jos sen kaikki pisteet ovat sisäpisteitä ja **suljettu**, jos sen komplementti on avoin. Jos $U \subset X$ on avoin ja $x \in U$, niin U on pisteen x **ympäristö**.

Esimerkki 2.4. (1) Metrinen avaruus X ja tyhjä joukko $\emptyset$ ovat avoimia ja suljettuja joukkoja metrisessä avaruudessa X .

(2) Diskreetin metrisen avaruuden jokainen piste on avoin ja suljettu. Itse asiassa kaikki diskreetin metrisen avaruuden osajoukot ovat avoimia: Jos E on diskreetin metrisen avaruuden epätyhjä osajoukko ja $e \in E$, niin $B(e, 1) = \{e\} \subset E$, joten e on joukon E sisäpiste.

(3) Joukko $J = [0, 1] \subset \mathbb{E}^1$ ei ole avoin eikä suljettu: 0 ei ole joukon J sisäpiste, koska $-\frac{r}{2} \in B(0, r) \cap (\mathbb{E}^1 - J)$ kaikilla $r > 0$. Samaan tapaan nähdään, että 1 ei ole joukon $\mathbb{E}^1 - J$ sisäpiste. (4) Varustetaan kohdan (3) joukko J avaruuden $\mathbb{E}^1$ indusoimalla metriikalla. Tällöin J on kohdan (1) nojalla avoin ja suljettu joukko avaruudessa $(J, d_{\mathbb{E}})$.

Propositio 2.5. *Olkoon X metrinen avaruus. Tällöin*

(1) *avoin pallo $B(x, r)$ on avoin joukko kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $r > 0$.*

(2) *suljettu pallo $\overline{B}(x, r)$ on suljettu joukko kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $r > 0$.*

Todistus. (1) Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r_0 > 0$. Olkoon $x \in B(x_0, r_0)$. Asetetaan $r_x = r_0 - d(x_0, x)$. Jos $y \in B(x, r_x)$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r_0 - d(x_0, x) + d(x, x_0) = r_0,$$

joten $y \in B(x_0, r_0)$.

Väite (2) tehdään harjoituksissa. □

Propositio 2.6. *Olkoon X metrinen avaruus. Olkoot A ja B indeksijoukkoja. Olkoot $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in A$ avoimia osajoukkoja ja olkoot $F_\beta \subset X$, $\beta \in B$ suljettuja osajoukkoja. Tällöin*

(1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

(2) $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

(3) jos A on äärellinen, niin $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

(4) jos B on äärellinen, niin $\bigcup_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

Todistus. (1) Olkoon $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tällöin $x \in U_\alpha$ jollain $\alpha \in A$. Koska U_α on avoin, on $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Siis $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

Väitteet (2)–(4) todistetaan harjoituksissa. $\square$

Propositio 2.7. *Metrisen avaruuden X osajoukko on avoin, jos ja vain jos se on tyhjä tai se voidaan esittää avoimien pallojen yhdisteenä.*

Todistus. Jos $E \subset X$ on avoin, niin jokaisella $e \in E$ on palloympäristö $B(e, r_e) \subset E$. Saadaan siis

$$E = \bigcup_{e \in E} \{e\} \subset \bigcup_{e \in E} B(e, r_e) \subset E,$$

joten ketjun keskellä olevan inklusion on oltava yhtäsuuruus. Siis

$$E = \bigcup_{e \in E} \{B(e, r_e)\}.$$

Väitteen toinen suunta seuraa Propositioista 2.6. $\square$

2.3 Sisus, reuna ja sulkeuma

Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $A \subset X$. Joukon A komplementin sisäpiste on joukon A **ulkopiste**. Jos $x \in X$ ei ole joukon A ulkopiste eikä sisäpiste, niin se on joukon A **reunapiste**. Joukon A

- sisäpisteiden joukko $\text{int } A$ on joukon A **sisus**.
- ulkopisteiden joukkoa merkitään $\text{ext } A$.
- reunapisteiden joukko on ∂A .

Propositio 2.8. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Joukon A sisus ja ulkopisteiden joukko ovat avoimia ja sen reuna on suljettu. Lisäksi pätee*

$$X = \text{int } A \sqcup \partial A \sqcup \text{ext } A. \quad (2.1)$$

Todistus. Määritelmien nojalla $\text{int } A$ ja $\text{ext } A$ ovat erillisiä ja reuna määritellään niiden komplementtina, joten (2.1) pätee selvästi. Koska $\text{ext } A$ on joukon A komplementin sisäpisteiden joukko, riittää osoittaa, että $\text{int } A$ on avoin mille tahansa joukolle A , sillä avointen joukkojen $\text{int } A$ ja $\text{ext } A$ komplementtina ∂A on suljettu.

Olkoon $a \in \text{int } A$. Tällöin on $r_a > 0$, jolle $B(a, r_a) \subset A$. Osoitetaan, että itse asiassa $B(a, r_a) \subset \text{int } A$: Olkoon $b \in B(a, r_a)$. Kuten Proposition 2.5 todistuksessa huomaamme, että $B(b, r_a - d(b, a)) \subset B(a, r_a) \subset A$, joten $b \in \text{int } A$. $\square$

Lemma 2.9. *Olkoon X metrinen avaruus. Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ reunapiste, jos ja vain jos jokaisella $r > 0$ pätee $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ja $B(x, r) \cap (X - A) \neq \emptyset$.*

Todistus. Tämä on selvää määritelmistä. $\square$

Olkoon X metrinen avaruus. Osajoukon $E \subset X$ **sulkeuma** on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon E :

$$\overline{E} = \bigcap_{\substack{F \supset E \\ F \text{ suljettu}}} F.$$

Propositio 2.10. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Tällöin

- (1) E on avoin, jos ja vain jos $E = \text{int } E$.
- (2) Joukko E on suljettu, jos ja vain jos $E = \overline{E}$.
- (3) $\overline{E} = E \cup \partial E = \text{int } E \cup \partial E$.
- (4) $\partial(X - E) = \partial E$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Proposition 2.10 kohtien (2) ja (3) nojalla saadaan muun muassa seuraava havainto: Joukko on suljettu, jos ja vain jos se sisältää reunansa.

Esimerkki 2.11. (1) Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$ avoimen pallon $B(x_0, r)$ ja suljetun pallon $\overline{B}(x_0, r)$ sisus on $B(x_0, r)$ ja molempien pallojen reuna on joukko

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x - x_0\| = r\}.$$

Jos $x \in S(x_0, r)$, niin

$$x_0 + (1 - \frac{\epsilon}{2})(x - x_0) \in B(x_0, r) \cap B(x, \epsilon)$$

ja

$$x_0 + (1 + \frac{\epsilon}{2})(x - x_0) \in (\mathbb{E}^n - B(x_0, r)) \cap B(x, \epsilon).$$

Siis $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(2) Diskreetissä metrisessä avaruudessa (X, δ) avoimet pallot ovat suljettuja. Siis

$$\overline{B_\delta(x, 1)} = B_\delta(x, 1) = \{x\} \neq X = \overline{B_\delta(0, 1)},$$

kun $\#X \geq 2$.

Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ **kasautumispiste**, jos $(B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ jokaisella $r > 0$. Jos on $r > 0$ siten, että $B(x, r) \cap A = \{x\}$, niin x on joukon A **eristetty piste** tai **erakkopiste**. Joukko $E \subset X$ on **diskreetti**, jos kaikki pisteet $x \in E$ ovat erakkopisteitä.

Lemmassa 2.9 tehty havainto reunapisteen ominaisuuksista ja kasautumispisteen määritelmä muistuttavat toisiaan melko paljon. Siksi ei olekaan yllättävää, että suljetut joukot voidaan luonnehtia kasautumispisteiden avulla samaan tapaan kuin reunan avulla:

Propositio 2.12. Joukko E on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.

Todistus. Olkoon $E \subset X$ suljettu. Olkoon $x \in (X - E)$. Koska $X - E$ on avoin, on $r > 0$, jolle $B(x, r) \subset X - E$. Siispä x ei ole joukon E kasautumispiste.

Oletetaan sitten, että E sisältää kaikki kasautumispisteensä. Olkoon $x \in X - E$. Tällöin x ei ole kasautumispiste, joten on $r > 0$, jolle $(B(x, r) - \{x\}) \cap E = \emptyset$. Siis $B(x, r) \subset X - E$, joten $X - E$ on avoin. Siis E on suljettu. □

Esimerkki 2.13. Joukolle $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}^1$ pätee

$$\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset, \quad \text{ext } \mathbb{Q} = \emptyset, \quad \partial \mathbb{Q} = \mathbb{E}^1, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}^1.$$

Rationaalilukujen joukko on siis tiheä tavallisella euklidisella etäisyydellä varustetussa reaalilukujen joukossa. Jokainen $x \in \mathbb{E}^1$ on joukon $\mathbb{Q}$ kasautumispiste ja joukon $\mathbb{E}^1 - \mathbb{Q}$ kasautumispiste.

Esimerkki 2.14. Olkoon (X, δ) diskreetti metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Tällöin

$$\text{int } A = A, \quad \text{ext } A = X - A, \quad \partial A = \emptyset, \quad \overline{A} = A.$$

Erityisesti joukolle $\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, \delta)$ pätee

$$\text{int } \mathbb{Q} = \mathbb{Q}, \quad \text{ext } \mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \quad \partial \mathbb{Q} = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}.$$

Metrisen avaruuden X osajoukko E on **tiheä**, jos $\overline{E} = X$. Metrinen avaruus X on **separoituva**, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Esimerkki 2.15. (1) $\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$, joten $\mathbb{R}^n$ on separoituva.

(2) $\mathbb{S}^1 = \overline{\exp(\mathbb{Q})}$, joten $\mathbb{S}^1$ on separoituva.

(3) Ylinumeroituva diskreetti metrinen avaruus ei ole separoituva.

Palaamme separoituvuuteen ainakin luvussa 6.

2.4 Lokaalit ominaisuudet

Jos jokin ehto tai ominaisuus pätee metrisen avaruuden jokaisen pisteen jossain ympäristössä, sanotaan, että kyseinen ehto tai ominaisuus on **lokaali**. Tapasimme tällaisen käsitteen Esimerkissä 1.16 mutta lykkäsimme tarkan määritelmän esittämisen tähän lukuun.

Olkooot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on **lokaali(sti) isometrinen upotus**, jos jokaisella $x \in X_1$ on ympäristö U_x siten, että rajoittuma $F|_{U_x}: U_x \rightarrow X_2$ on isometrinen upotus.

Esimerkissä 1.16 osoitimme, että kuvaus $\exp: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\exp(t) = (\cos t, \sin t)$, on lokaali isometrinen upotus.

Harjoitustehtäviä

2.1. Kuvaile Ranskan rautatieavaruuden avoimet pallot $B(x, 1)$, kun $x \neq 0$.

2.2. Osoita, että metrisen avaruuden suljettu pallo on suljettu joukko ja että jokainen yhden pisteen muodostama joukko on suljettu joukko.

2.3. Todista Proposition 2.6 kohta (3).

2.4. Todista Proposition 2.6 kohdat (2) ja (4).

2.5. Todista Proposition 2.10 kohdat (1) ja (2).

2.6. Todista Proposition 2.10 kohdat (3) ja (4).

2.7. Osoita, että joukko on avoin ja suljettu, jos ja vain jos sen reuna on tyhjä.

2.8. Osoita, että $\partial\partial A \subset \partial A$. Anna esimerkki, jolle pätee $\partial\partial A \neq \partial A$.

Olkoon $X \neq \emptyset$. Funktio $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ on **ultrametriikka**, jos sillä on metriikalta vaadittavat ominaisuudet (1) ja (2) ja se toteuttaa **ultrametrin epäyhtälön**

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

kaikille $x, y, z \in X$. Pari (X, d) on **ultrametrinen avaruus**.

Seuraavissa tehtävissä (X, d) on ultrametrinen avaruus

2.9. Osoita, että ultrametrinen avaruus (X, d) on metrinen avaruus.

2.10. Olkoon (X, d) on ultrametrinen avaruus. Osoita, että kaikille $y \in B(x, r)$ pätee $B(y, r) = B(x, r)$ ja että kaikille $y \in \overline{B}(x, r)$ pätee $\overline{B}(y, r) = \overline{B}(x, r)$.¹

2.11. Osoita, että kaikki ultrametrin avaruuden X pallot ovat avoimia ja suljettuja.²

2.12. Olkoon

$$\Sigma = \{a = a_0a_1a_2 \cdots : a_i \in \{0, 1\} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\}$$

0/1-jonojen avaruus. Määritellään metriikka d_Σ asettamalla $d_\Sigma(a, a) = 0$ kaikille $a \in \Sigma$ ja

$$d_\Sigma(a, a') = \begin{cases} 0 & , \text{ jos } a = a' \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{|a_i - a'_i|}{2^i} & \text{muuten.} \end{cases}$$

Jos $a, a' \in \Sigma$, $a \neq a'$, asetetaan

$$m(a, a') = \min \{k \in \mathbb{N} : a_k \neq a'_k\}.$$

Osoita, että

$$d_\Sigma(a, a') = 2^{-m(a, a')},$$

jos $a \neq a'$. Osoita, että (Σ, d_Σ) on ultrametrinen avaruus.

2.13. Olkoon Σ kuten tehtävässä 2.12. Olkoon $0 = 00000 \cdots \in \Sigma$. Kuvaile avaruuden Σ pallot $B(0, r)$ ja $\overline{B}(0, r)$ kaikille $r > 0$.

¹Siis pallon jokainen piste on sen keskipiste!

²Käytä apuna Tehtävän 2.10 tuloksia.

Luku 3

Jatkuvat kuvaukset

3.1 Jatkuvuus

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on **jatkuva** pisteessä $x_0 \in X_1$, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x_0), F(x)) < \epsilon$ kaikilla $x \in X_1$, joille $d_1(x_0, x) < \delta$. Kuvaus on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa avaruden X_1 pisteessä.

Jatkuvuuden määritelmä voidaan muotoilla pallojen avulla hieman geometrisemman näköisessä muodossa:

Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X_1$, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että

$$F(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon).$$

Esimerkki 3.1. (1) Vakiokuvaus on aina jatkuva.

(2) Jos $A \subset \mathbb{E}^n$ ja $B \subset \mathbb{E}^k$ varustetaan euklidisen avaruuden indusoimilla metriikoilla, niin kuvauksen $f: A \rightarrow B$ jatkuvuuden määritelmä on sama kuin analyysin ja moniulotteisen differentiaalilaskennan kursseilla. Siis esimerkiksi kaikki (useammankin muuttujan) polynomifunktiot, trigonometriset funktiot ja eksponenttifunktio ovat jatkuvia.

(3) Kaikki kordinaattiprojektiot $p_k: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$,

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k,$$

ovat jatkuvia: Olkoot $x, y \in \mathbb{E}^n$. Tällöin

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \geq |x_k - y_k| = |p_k(x) - p_k(y)|.$$

Jos $\|x - y\| < \epsilon$, niin $|p_k(x) - p_k(y)| < \epsilon$, joten p_k on jatkuva.

(4) Isometriset upotukset ovat jatkuvia kuvauksia.

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia ja olkoon $K \geq 0$. Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on K -Lipschitz-jatkuva tai K -Lipschitz-kuvaus, jos kaikille $x, y \in X$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) \leq K d_1(x, y).$$

Jos F on K -Lipschitz-jatkuva jollain $K \geq 0$, niin F on Lipschitz-jatkuva kuvaus tai Lipschitz-kuvaus.

Esimerkki 3.2. Euklidisen avaruuden koordinaattiprojektiot ovat 1-Lipschitz-kuvauksia.

Lemma 3.3. Lipschitz-jatkuvat kuvaukset ovat jatkuvia.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 3.4. Jos $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ ja $G: (X_2, d_2) \rightarrow (X_3, d_3)$ ovat jatkuvia kuvauksia, niin $G \circ F$ on jatkuva kuvaus.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 3.5. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f: X \rightarrow Y$ kuvaus.

- (1) Kuvaus f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on avoin jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset Y$.
- (2) Kuvaus f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

Todistus. Todistetaan väite (1). Toinen väite tehdään harjoituksissa.

Olkoon f jatkuva. Olkoon $x \in f^{-1}(U)$. Koska U on avoin, on $r > 0$ siten, että $B(f(x), r) \subset U$. Jatkuvuuden nojalla on $\delta > 0$, jolle $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), r)$. Siis $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), r)) \subset f^{-1}(U)$.

Oletetaan sitten, että jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Olkoon $x \in X$. Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen mukaan joukon $B(f(x), \epsilon)$ alkukuva on avoin. Koska $x \in f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$, niin on $\delta > 0$, jolle $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. Siis f on jatkuva pisteessä x . □

Esimerkki 3.6. Lause 3.5 antaa kätevän keinon osoittaa joitain euklidisen avaruuden osajoukkoja avoimiksi tai suljetuiksi.

(1) Kaikki esimerkissä 1.8 määritellyt normit $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ ovat jatkuvia kuvauksia $n_p = \|\cdot\|: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$. Siis normin $\|\cdot\|_p$ määrittävän metriikan d_p avoimet pallot

$$B_{d_p}(0, r) = n_p^{-1}(]-\infty, r[)$$

ovat euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ avoimia osajoukkoja.

(2) Olkoon $S: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$S(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} & , \text{ kun } t \neq 0 \\ 0 & , \text{ kun } t = 0 \end{cases},$$

ja olkoon $\tilde{S}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$, $\tilde{S}(x) = x_2 - S(x_1)$. Analyysin ja differentiaalilaskennan tai vektorifunktioiden analyysin kurseilta muistamme, että S ja $\tilde{S}$ ovat jatkuvia kuvauksia. Koordinaattiprojektio $p_2(x) = x_2$ on myös jatkuva. Joukko

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ ja } 0 < x_2 < S(x_1)\right\} = \tilde{S}^{-1}(]-\infty, 0[) \cap p_2^{-1}(]0, \infty[)$$

on siis avoin Lauseen 3.5 nojalla.

Esimerkki 3.7. Olkoon (X, δ) diskreetti metrinen avaruus ja olkoon (Y, d) metrinen avaruus. Kaikki kuvaukset $f: X \rightarrow Y$ ovat jatkuvia. Tämä seuraa Lauseesta 3.5, koska kaikki diskreetin metrisen avaruuden osajoukot ovat avoimia.

Sen sijaan monista metrisistä avaruuksista on vain hyvin vähän jatkuvia kuvauksia $g: Y \rightarrow (X, \delta)$ diskreettiin metriseen avaruuteen, koska jokaisen yhden pisteen joukon $\{x\} \subset X$ alkukuva on avoin joukko. Jos siis $y \in g^{-1}(\{x\})$, niin on $r_y > 0$, siten, että $g(z) = x$ kaikille $z \in B(y, r_y)$. Erityisesti identtinen kuvaus $\text{id}: \mathbb{E}^1 \rightarrow (\mathbb{R}, \delta)$ ei ole jatkuva kuvaus.

3.2 Jatkuvat kuvaukset normiavaruuteen

Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon V normiavaruus. Tällöin joukon $\mathcal{F}(X, V)$ alkioita voi laskea yhteen ja kertoa reaaliluvuilla¹: Jos $f, g \in \mathcal{F}(X, V)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin määritellään kuvaukset $af + bg \in \mathcal{F}(X, V)$ asettamalla

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x)$$

kaikille $x \in X$. Jos $V = \mathbb{R}$, niin tarkasteltavien funktioiden arvot ovat reaalilukuja. Tällöin voidaan määritellä funktio $fg \in \mathcal{F}(X, V)$ asettamalla

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

kaikille $x \in X$.² Nämä operaatiot sopivat hyvin yhteen jatkuvuuden käsitteen kanssa:

Lemma 3.8. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon V normiavaruus. Jos $f, g \in C^0(X, V)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin $af + bg \in C^0(X, V)$. Jos $V = \mathbb{R}$ niin $fg \in C^0(X, V)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. Todistus on täsmälleen sama kuin tapauksessa, jossa $X \subset \mathbb{E}^1$, jota tarkastellaan ensimmäisen vuoden analyysin kurseilla. $\square$

Yleistämme nyt Esimerkin 1.10:

Esimerkki 3.9. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon

$$C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{R}) = \{f \in C^0(X, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\},$$

missä

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

on avaruuden $\text{raj}(X, \mathbb{R})$ normi. Lemman 3.8 nojalla $C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{R})$ on normiavaruuden $\text{raj}(X, \mathbb{R})$ vektorialiavaruus ja $(C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ on normiavaruus.

¹Algebralisesti ajatellen joukko $\mathcal{F}(X, V)$ varustettuna yhteenlaskulla ja reaaliluvulla kertomisella on vektorialiavaruus.

²Joukko $\mathcal{F}(X, V)$ varustettuna yhteenlaskulla ja funktioiden kertolaskulla on ja rengas.

Harjoitustehtäviä

- 3.1.** Osoita, että Lipschitz-jatkuvat kuvaukset ovat jatkuvia.
- 3.2.** Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että normi $\|\cdot\|$ on jatkuva funktio.³
- 3.3.** Onko kuvaus $\text{id}: \mathbb{E}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$ jatkuva? Entä sen käänteiskuvaus?
- 3.4.** Onko kuvaus $\text{id}: (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$ jatkuva?
- 3.5.** Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f: X \rightarrow Y$ kuvaus. Osoita, että f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.
- 3.6.** Osoita, että jatkuvan funktion $f: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$ kuvaaja

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{E}^2 : x \in \mathbb{E}^1\}$$

on suljettu joukko avaruudessa $\mathbb{E}^2$.

- 3.7.** Olkoon Σ kuten tehtävässä 2.12. Kuvaus $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$, joka määritellään asettamalla

$$\sigma(a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots) = a_1 a_2 a_3 \cdots$$

kaikille $a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots \in \Sigma$, on **vasen siirto**. Osoita, että σ on 2-Lipschitz-jatkuva.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Pisteen $x \in X$ **etäisyys joukosta** E on

$$d(x, E) = \inf\{d(x, e) : e \in E\}.$$

Etäisyys joukosta E määrittelee funktion $d_E: X \rightarrow \mathbb{E}^1$ asettamalla $d_E(x) = d(x, E)$ kaikille $x \in X$.

- 3.8.** Osoita, että d_E on 1-Lipschitz-jatkuva kuvaus.
- 3.9.** Osoita, että $d(x, E) = 0$, jos ja vain jos $x \in \overline{E}$.
- 3.10.** Osoita, että $d(x, E) = d(x, \overline{E})$ kaikille $x \in X$.

Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$. Määritellään jokaiselle $a \in X$ kuvaus $\phi_a: X \rightarrow \mathbb{E}^1$ asettamalla

$$\phi_a(x) = d(x, x_0) - d(x, a).$$

Määritellään kuvaus $K: X \rightarrow C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$ asettamalla

$$K(a) = \phi_a$$

kaikille $a \in X$.

- 3.11.** Osoita, että ϕ_a on jatkuva kuvaus.
- 3.12.** Osoita, että kuvaus K on isometrinen upotus.⁴

³Osoita, että kuvaus $n: V \rightarrow \mathbb{E}^1$, $n(v) = \|v\|$, on jatkuva.

⁴Avaruudessa $C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$ käytetään sup-normin määrittämää metriikkaa kuten Esimerkissä 3.9.

Luku 4

Ekvivalentit metriikat ja homeomorfismit

4.1 Homeomorfismi

Olko (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metriisiä avaruuksia. Bijektio $F: X_1 \rightarrow X_2$ on **homeomorfismi**, jos F on jatkuva ja F^{-1} on jatkuva.

Esimerkki 4.1. (1) Isometria on homeomorfismi.

(2) Esimerkissä 3.7 tarkasteltu kuvaus $\text{id}: (\mathbb{R}, \delta) \rightarrow \mathbb{E}^1$ on jatkuva mutta se ei ole homeomorfismi.

Lemma 4.2. *Homeomorfismien yhdistetty kuvaus on homeomorfismi. Homeomorfismin käänteiskuvaus on homeomorfismi.*

Todistus. Bijektioiden yhdistetty kuvaus on bijektio ja jatkuvien kuvausten yhdistetty kuvaus on jatkuva Lemman 3.4 nojalla. Toinen väite sisältyy homeomorfismin määritelmään. $\square$

Propositio 4.3. *Homeomorfismi kuvaa avoimet joukot avoimiksi ja suljetut joukot suljetuiksi.*

Todistus. Seuraa Lauseesta 3.5, koska käänteiskuvaus on jatkuva. $\square$

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kokoelma

$$\tau(X, d) = \{U \subset X : U \text{ on avoin}\}$$

on metrisen avaruuden (X, d) **topologia**.

Metristen avaruuksien kurssia seuraavalla kurssilla, jonka nimi on topologia, topologia on peruskäsite. Topologinen avaruus on pari, joka koostuu epätyhjästä joukosta ja topologiasta, jolla on samoja ominaisuuksia kuin metrisen avaruuden avoimien joukkojen kokoelmalla.

Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X metriikat d ja $\tilde{d}$ ovat **ekvivalentteja**, jos metrysten avaruuksien (X, d) ja $(X, \tilde{d})$ topologiat ovat samat.

Propositio 4.4. *Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X metriikat d ja $\tilde{d}$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos $\text{id}: (X, d) \rightarrow (X, \tilde{d})$ on homeomorfismi.*

Todistus. Seuraa suoraan Lauseesta 3.5 ja määritelmistä. □

Propositio 4.5. *Olko d_X ja $\tilde{d}_X$ ekvivalentteja metriikoita joukolla $X \neq \emptyset$ ja olko d_Y ja $\tilde{d}_Y$ ekvivalentteja metriikoita joukolla $Y \neq \emptyset$. Kuvaus $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ on jatkuva, jos ja vain jos kuvaus $f: (X, \tilde{d}_X) \rightarrow (Y, \tilde{d}_Y)$ on jatkuva.*

Todistus. Kutsutaan todistuksessa kuvausta $f: (X, \tilde{d}_X) \rightarrow (Y, \tilde{d}_Y)$ kuvaukseksi $\tilde{f}$. Metriikoiden ekvivalenssioletuksen nojalla identtiset kuvaukset $\text{id}_X: (X, d_X) \rightarrow (X, \tilde{d}_X)$ ja $\text{id}_Y: (Y, d_Y) \rightarrow (Y, \tilde{d}_Y)$ ovat homeomorfismeja. Tarkasteltavat kuvaukset muodostavat kaavion

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{id}_X \downarrow & & \downarrow \text{id}_Y \\ X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \end{array}$$

Jos f on jatkuva, niin $\tilde{f} = \text{id}_Y \circ f \circ \text{id}_X^{-1}$ on kolmen jatkuvan kuvauksen yhdistettynä kuvauksena jatkuva. Jos taas $\tilde{f}$ on jatkuva, niin $f = \text{id}_Y^{-1} \circ \tilde{f} \circ \text{id}_X$ on kolmen jatkuvan kuvauksen yhdistettynä kuvauksena jatkuva. □

Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X metriikat d ja $\tilde{d}$ ovat **bi-Lipschitz-ekvivalentteja**, jos on $M > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{M}d(x, y) \leq \tilde{d}(x, y) \leq Md(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$.

Propositio 4.6. *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olko d ja $\tilde{d}$ metriikoita joukolla X . Jos d ja $\tilde{d}$ ovat bi-Lipschitz-ekvivalentteja, niin joukko $A \subset X$ on avoin metrisessä avaruudessa (X, d) , jos ja vain jos se on avoin metrisessä avaruudessa $(X, \tilde{d})$.*

Todistus. Oletetaan, että

$$\frac{1}{M}d(x, y) \leq \tilde{d}(x, y) \leq Md(x, y)$$

jollain $M > 0$. Symmetrian vuoksi riittää osoittaa, että metriikan d suhteen avoimet joukot ovat avoimia metriikan $\tilde{d}$ suhteen.

Olkoon $U \subset (X, d)$ avoin joukko. Osoitetaan, että U on avoin myös metriikan $\tilde{d}$ suhteen. Olkoon $x \in U$. Oletuksen nojalla on $r > 0$, jolle $B_d(x, r) \subset U$. Olkoon $y \in B_{\tilde{d}}(x, \frac{r}{M})$. Tällöin $d(x, y) \leq M\tilde{d}(x, y) < M \frac{r}{M} = r$, joten

$$B_{\tilde{d}}\left(x, \frac{r}{M}\right) \subset B_d(x, r) \subset U.$$

Sis x on joukon U sisäpiste avaruudessa $(X, \tilde{d})$. □

Seuraus 4.7. *Bi-Lipschitz-ekvivalentit metriikat ovat ekvivalentteja.* □

4.2 Ekvivalentit normit

Vektoriavaruuden V normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat **ekvivalentit**, jos on $c > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{c}\|v\|' \leq \|v\| \leq c\|v\|$$

kaikille $v \in V$.

Lemma 4.8. *Vektoriavaruuden V normit ovat ekvivalentit, jos ja vain jos ne määräävät bi-Lipschitz-ekvivalentit metriikat.*

Todistus. Tämä on selvää määritelmistä. □

Lause 4.9. *Kaikki äärellisulotteisen vektoriavaruuden normit ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Voimme olettaa, että tarkasteltava vektoriavaruus on $\mathbb{R}^n$. Osoitetaan, että normi $\|\cdot\|$ on ekvivalentti euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa. Olkoon $e_1, e_2, \dots, e_n$ standardikanta. Tällöin kolmioepäyhtälön, normin homogeenisuuden ja Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \|e_i\| = \left((x_1, \dots, x_n) \mid (\|e_1\|, \dots, \|e_n\|) \right) \\ &\leq \left\| (x_1, \dots, x_n) \right\|_2 \left\| (\|e_1\|, \dots, \|e_n\|) \right\| \\ &\leq \sqrt{n} \max \{ \|e_i\| : 1 \leq i \leq n \} \|x\|_2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

joten haluttu epäyhtälö saadaan toiseen suuntaan.

Vastakkaisen suunnan todistamiseksi huomataan, että epäyhtälön (4.1) nojalla normi $\|\cdot\|$ on Lipschitz-jatkuva, joten se saavuttaa miniminsä $m > 0$ euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ suljetulla ja rajoitetulla¹ yksikköpallon pinnalla. Siis kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \leq m,$$

josta seuraa haluttu epäyhtälö $\|x\| \leq m\|x\|_2$. □

Palaamme Lauseen 4.9 jälkimmäisen suunnan todistuksessa käytettyyn differentiaalilaskennan/vektorifunktioiden analyysin kursseilta tuttuun minimiargumenttiin yleisessä metristen avaruuksien yhteydessä Luvussa 6.

4.3 Tuloavaruudet

Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) karteesisesta tulosta saadaan metrinen avaruus esimerkiksi varustamalla tulojoukko $X \times Y$ jollain seuraavista metriikoista:

¹siis kompaktilla

$$\begin{aligned}
d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) \\
d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2} = \|(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))\|_{\mathbb{E}^2} \\
d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)).
\end{aligned}$$

Lemma 4.10. *Lausekkeet d_1 , d_2 ja $d_{\max}$ määrittelevät metriikat tuloavaruudessa $X \times Y$.*

Todistus. Se, että d_1 ja $d_{\max}$ ovat metriikoita osoitettiin Harjoitustehtävissä 1.8 ja 1.9. Tarkastetaan vielä, että myös d_2 on metriikka. Kolmioepäyhtälö on jälleen oleellinen asia: Olkoot $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$. Tällöin määritelmän, avaruuksien X ja Y kolmioepäyhtälöiden, tason vektoritulkinnan ja euklidisen tason kolmioepäyhtälön nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
d((x_1, y_1), (x_2, y_2))^2 &= d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2 \\
&\leq (d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_3) + d_Y(y_3, y_2))^2 \\
&= \|(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)) + (d_X(x_3, x_2), d_Y(y_3, y_2))\|_{\mathbb{E}^2}^2 \\
&\leq \left(\|(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3))\|_{\mathbb{E}^2} + \|(d_X(x_3, x_2), d_Y(y_3, y_2))\|_{\mathbb{E}^2} \right)^2 \\
&= \left(d_2((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d_2((x_3, y_3), (x_2, y_2)) \right)^2.
\end{aligned}$$

Kolmioepäyhtälö seuraa tästä. □

Propositio 4.11. *Metriikat d_1 , d_2 ja d_3 ovat bi-Lipschitz-ekvivalentteja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 4.12. *Metriset avaruudet (X, d_1) , (X, d_2) ja $(X, d_{\max})$ ovat homeomorfisia. Eri-tyisesti identtinen kuvaus on homeomorfismi näiden avaruuksien välillä.* □

Jatkossa käytämme tilanteen mukaan jotain metriikoista $d_{\max}$, d_1 tai d_2 tuloavaruuden tarkastelussa.

Usein d_1 ja $d_{\max}$ ovat teknisesti hyviä valintoja. Jos tuloksessa ei mainita, mikä metriikoista on käytössä, väite pätee kaikille niille.

Propositio 4.13. *Olkoot (X, d_X) , (Y, d_Y) ja (Z, d_Z) metrisiä avaruuksia. Tällöin*

- (1) *kuvaukset $p_X: X \times Y \rightarrow X$, $p(x, y) = x$ ja $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$, $p(x, y) = y$ ovat jatkuvia.*
- (2) *Kuvaus $F: Z \rightarrow X \times Y$ on jatkuva, jos ja vain jos komponenttikuvaukset $F_X = p_X \circ F$ ja $F_Y = p_Y \circ F$ ovat jatkuvia.*

Todistus. (1) Varustetaan tuloavaruus $X \times Y$ maksimimetriikalla $d_{\max}$. Riittää tarkastella kuvausta p_X . Olkoon $(x_0, y_0) \in X \times Y$. On helppo nähdä, että p_X on 1-Lipschitz:

$$d_X(p_X(x, y), p_X(x_0, y_0)) = d_X(x, x_0) \leq \max(d_X(x, x_0), d_Y(y, y_0)) = d_{\max}((x, y), (x_0, y_0)).$$

Siis p_X on jatkuva.

(2) Harjoitustehtävä. □

Seuraus 4.14. *Avointen joukkojen tulo on avoin. Suljettujen joukkojen tulo on suljettu.*

Todistus. (1) Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$ avoimia joukkoja. Tällöin

$$A \times B = p_X^{-1}(A) \cap p_Y^{-1}(AB).$$

Koska projektiokuvaukset p_X ja p_Y ovat jatkuvia Proposition 4.13(1) nojalla, joukot $p_X^{-1}(A)$ ja $p_Y^{-1}(AB)$ ovat avoimia. Siis $A \times B$ on avoin.

(2) Harjoitustehtävä. □

Harjoitustehtäviä

Olkoon $h: X \rightarrow Y$ homeomorfismi. Olkoon $E \subset X$.

4.1. Osoita, että $h(\overline{E}) = \overline{h(E)}$ ja $h(\text{int } E) = \text{int } h(E)$.

4.2. Osoita, että $h(\partial E) = \partial h(E)$.

4.3. Todista Proposition 4.13 kohta (2).

4.4. Osoita, että metriikka $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$ on jatkuva funktio.²

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia.

4.5. Osoita, että

$$\begin{aligned} d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\leq d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &\leq d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &\leq 2 d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

kaikille $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$.³

4.6. Olkoot $C \subset X$ ja $D \subset Y$ suljettuja joukkoja. Onko $C \times D$ suljettu?

4.7. Olkoot $F \subset X$ ja $G \subset Y$ osajoukkoja. Määritä $\partial(F \times G)$.

²Kannattaa käyttää summametriikkaa d_1 .

³Keskimmäisen epäyhtälön todistuksessa huomaa, että $\|(a, b)\|_{\mathbb{R}^2} = \|(a, 0) + (0, b)\|_{\mathbb{R}^2}$ ja tutki Lauseen 4.9 todistusta.

Luku 5

Jonot, täydelliset metriset avaruudet

5.1 Suppenevat jonot ja Cauchyn jonot

Olkoon $A \neq \emptyset$. Kuvaus $a: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow A$ on joukon A **jono**.^a Yleisesti jonon arvoja merkitään $a_n = a(n)$ ja jonolle käytetään merkintää $(a_n)_{n=1}^\infty = (a_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$.

Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ **suppenee kohti raja-arvoa** $x \in X$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in B(x, \epsilon)$ kaikilla $k \geq N$. Jos jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, käytetään merkintöjä $x_n \rightarrow x$, kun $x \rightarrow \infty$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

^aYhtä hyvin jono voi olla kuvaus $a: \mathbb{N} \rightarrow A$, tällöin indeksointi aloitetaan nolasta.

Lemma 5.1. *Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $x \in X$, jos ja vain jos $d(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 5.2. *Jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoot $a, b \in X$ siten, että $d(x_n, a) \rightarrow 0$ ja $d(x_n, b) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Tällöin $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, joten $d(a, b) = 0$. Siis $a = b$. □

Esimerkki 5.3. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Harjoitustehtävässä 1.13 osoitettiin, että jonon $(f_k)_{k=1}^\infty$ suppeneminen metrisessä avaruudessa $C^0(I, \mathbb{R})$ on sama asia kuin se, että funktiojono $(f_k)_{k=1}^\infty$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in C^0(I, \mathbb{R})$.

Propositio 5.4. *Olkoon X metrisen avaruus ja olkoon $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Tällöin $\overline{E}$ koostuu kaikista joukon E alkioista muodostettujen avaruuden X suppenevien jonojen raja-arvoista.*

Todistus. Jokainen joukon E piste on vakiojonon raja-arvo. On selvää, että mikään joukon E ulkopiste ei ole joukon E jonon raja-arvo. Riittää siis osoittaa, että jokainen joukon E reunapiste on jonkin joukon E jonon raja-arvo. Olkoon $x_0 \in \partial E$. Tällöin $B(x_0, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$ jokaisella $k > 1$. Valitaan jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ alkio $e_k \in B(x_0, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$. Tällöin $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k$. □

Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ on **Cauchyn jono**, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \epsilon$ kaikille $m, n \geq N$.

Lemma 5.5. (1) *Suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.*

(2) *Cauchyn jonot ovat rajoitettuja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Joukon E halkaisija on

$$\text{diam}(E) = \sup\{d(a, b) : a, b \in E\}.$$

Lemma 5.6. *Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jos ja vain jos $\text{diam}\{x_k : k \geq n\} \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$.*

Todistus. Määritelmän mukaan $(x_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \epsilon$ kaikille $m, n \geq N$. Yhtäpitävästi jokaisella $\epsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\{d(x_m, x_n) : m, n \geq N\} \subset [0, \epsilon]$, toisin sanoen $\text{diam}\{x_k : k \geq n\} \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. □

Lemma 5.7. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Tällöin¹*

(1) *Jono $(x_k, y_k)_{k=1}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $(x, y) \in X \times Y$, jos ja vain jos jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $x \in X$ ja jono $(y_k)_{k=1}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $y \in Y$.*

(2) *Jono $(x_k, y_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jos ja vain jos jonot $(x_k)_{k=1}^\infty$ ja $(y_k)_{k=1}^\infty$ ovat Cauchyn jonoja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Aiemmilta kursseilta tiedämme, että reaalilukujen avaruuden $\mathbb{E}^1$ täydellisyyden nojalla kaikki Cauchyn jonot suppenevat euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Vastaava tulos ei päde kaikissa metrisissä avaruuksissa kuten seuraava alkeellinen esimerkki osoittaa:

Esimerkki 5.8. Jono $(\frac{1}{k})_{k=1}^\infty$ on Cauchyn metrisessä avaruudessa

$$(X, d) = \left(\left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}, d_{\mathbb{E}} \right).$$

Jono $(\frac{1}{k})_{k=1}^\infty$ ei kuitenkaan suppenne. Tämä on helppo tarkastaa: Jos se suppenisi raja-arvoon $\frac{1}{N}$, niin se suppenisi tähän raja-arvoon myös avaruudessa $\mathbb{E}^1$. Mutta avaruudessa $\mathbb{E}^1$ pätee $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla mikään $\frac{1}{N}$ ei ole raja-arvo. Väite voidaan todistaa myös viittaamatta avaruuteen $\mathbb{E}^1$: Olkoon $\frac{1}{n_0} \in X$. Kun $k > n_0$, pätee

$$d_{\mathbb{E}}\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{k}\right) = \frac{k - n_0}{kn_0} > \frac{1}{n_0^2},$$

joten $\frac{1}{n_0}$ ei ole jonon raja-arvo.

¹Muista Seurauksen 4.12 jälkeen tehty sopimus tuloavaruuden metriikoista.

5.2 Jonot ja jatkuvat kuvaukset

Lemma 5.9. *Jatkuva kuvaus kuvaa suppenevat jonot suppeneviksi jonoiksi.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ suppeneva jono avaruudessa X ja olkoon x sen raja-arvo. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ jatkuva.

Olkoon $\epsilon > 0$. Jatkuvuuden nojalla on $\delta > 0$ siten, että $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$. Raja-arvon määritelmän nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in B(x, \delta)$ kaikilla $k \geq N$. Siis kaikilla $k \geq N$ pätee $f(x_k) \in f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$, joten $f(x_k) \rightarrow f(x)$, kun $k \rightarrow \infty$. $\square$

Esimerkki 5.10. Olkoon $x_k = \frac{1}{k} \in [0, \infty]$ kaikilla $k \geq \mathbb{N} - \{0\}$. Metrisen avaruuden $([0, \infty], d_{\mathbb{E}})$ jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono kuten Esimerkissä 5.8 todettiin. Kuvaus $g: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ on jatkuva. Jono $(g(x_k))_{k=1}^{\infty}$ ei ole Cauchyn jono koska $g(x_k) = k$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Cauchyn jonot säilyvät Cauchyn jonoina, jos niitä kuvataan hieman säännöllisemmällä kuin jatkuvilla kuvauksilla.

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on **tasaisesti jatkuva**, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x_0), F(x)) < \epsilon$ kaikilla $x, y \in X_1$, joille $d_1(x, y) < \delta$.

Lemma 5.11. *Tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva.*

Todistus. Tämä on selvää. $\square$

Seuraava helppo esimerkki osoittaa, että kaikki jatkuvat kuvaukset eivät ole tasaisesti jatkuvia. Toisaalta monet tapaamamme kuvaukset ovat tasaisesti jatkuvia.

Esimerkki 5.12. (1) Kuvaus $g: \mathbb{E}^1 - \{0\} \rightarrow \mathbb{E}^1$, $g(t) = \frac{1}{t}$ on jatkuva mutta ei tasaisesti jatkuva.

(2) Harjoitustehtävässä 3.1 osoitettiin, että Lipschitz-kuvaukset ovat jatkuvia. Todistus itse asiassa osoittaa, että ne ovat tasaisesti jatkuvia. Erityisesti isometriset upotukset ovat tasaisesti jatkuvia.

(3) Kuvaus $s: ([0, \infty[, d_{\mathbb{E}}) \rightarrow \mathbb{E}^1$, $s(t) = \sqrt{t}$ on tasaisesti jatkuva: Sen rajoittuma välin $[0, 1]$ komplementtiin on 1-Lipschitz koska havainnosta

$$|x - y| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| |\sqrt{x} + \sqrt{y}|$$

saadaan

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} < |x - y|.$$

Analyysin kursseilla on osoitettu, että suljetun ja rajoitetun välin jatkuvat kuvaukset ovat tasaisesti rajoitettuja. Valitsemalla kullekin $\epsilon > 0$ pienempi näiden kahden välin antamista luvuista $\delta > 0$ näemme, että s on tasaisesti jatkuva.

Kuvaus s ei ole Lipschitz-jatkuva: Jos s olisi M -Lipschitz, niin

$$(\sqrt{2} - 1) \sqrt{t} = |s(2t) - s(t)| \leq M|2t - t| = Mt$$

kaikille $t \in]0, \frac{1}{2}]$. Siis $\sqrt{t} \geq \frac{\sqrt{2}-1}{M}$ kaikilla $t \in]0, \frac{1}{2}]$, mutta tämä ei pidä paikkaansa.

Propositio 5.13. *Tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

5.3 Täydellinen metrinen avaruus

Metrinen avaruus X on **täydellinen**, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

Esimerkki 5.14. Analyysin kursseilta muistamme, että $\mathbb{E}^1$ on täydellinen. Harjoituksissa osoitetaan Lemman 5.7 nojalla $\mathbb{E}^n$ on täydellinen.

Lemma 5.15. *Olko $A \neq \emptyset$. Tällöin avaruus $\text{raj}(A, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen.*

Todistus. Olkoon $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono. Tällöin jono $(f_k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono jokaisella $a \in A$. Koska $\mathbb{E}^1$ on täydellinen, jono $(f_k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee jokaisella $a \in A$. Määritellään $f: A \rightarrow \mathbb{E}^1$ asettamalla

$$f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(a)$$

jokaisella $a \in A$. Jono $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on rajoitettu Lemman 5.5 nojalla. Siis $\|f_k\| \leq M$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten on $x_0 \in \mathbb{E}^1$ ja $M > 0$, joille pätee $f_k(a) \in \overline{B}(0, M)$ kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siis $f(a) \in \overline{B}(0, M)$ kaikilla $a \in A$ ja $f \in \text{raj}(A, \mathbb{E}^1)$.

Olko $\epsilon > 0$. Tällöin on $N > 0$ siten, että $\|f_k - f_m\|_\infty < \epsilon$ jokaisella $k, m \geq N$. Siis jokaisella $a \in A$ pätee $|f_k(a) - f_m(a)| < \epsilon$, kun $k, m \geq N$ joten $|f_k(a) - f(a)| \leq \epsilon$, kun $k \geq N$. Siis

$$\|f_k - f\| = \sup_{a \in A} \|f_k(a) - f(a)\|_\infty \leq \epsilon,$$

kun $k \geq N$. □

Lemma 5.16. *Olko (X, d_X) täydellinen metrinen avaruus. Joukko $E \subset X$ on suljettu, jos ja vain jos metrinen avaruus (E, d_X) on täydellinen.*

Todistus. Jos E on suljettu, niin kaikkien joukon E alkioista muodostettujen suppenevien jonojen $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ raja-arvot ovat joukossa E Proposition 5.4 nojalla. Metrinen avaruuden (E, d_X) jono on Cauchyn jono, jos ja vain jos se on avaruuden (X, d_X) Cauchyn jono. Suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja Lemman 5.5 nojalla. Siis kaikki avaruuden (E, d_X) Cauchyn jonot suppenevat, joten se on täydellinen.

Oletetaan sitten, että (E, d_X) on täydellinen. Joukon E alkioista muodostetut avaruuden (X, d_X) suppenevat jonot ovat avaruuden (E, d_X) Cauchyn jonoja. Siis ne suppenevat avaruudessa (E, d_X) . Mutta tällöin niiden raja-arvot avaruuden (X, d_X) jonoina sisältyvät osajoukkoon E , joten E on suljettu Lemman 5.5 nojalla. □

Propositio 5.17. *Olko X metrinen avaruus. Normiavaruus $C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen.*

Todistus. Kuten Esimerkissä 1.10 voidaan osoittaa, että $C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$ on täydellisen normiavaruuden $\text{raj}(X, \mathbb{E}^1)$ aliarvaruus. Osoitetaan, että $C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$ on suljettu. Tällöin väite seuraa Lemmasta 5.16.

Proposition 5.4 nojalla riittää osoittaa, että kaikki avaruuden $C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$ Cauchyn jonot suppenevat. Olkoon $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono. Se on Cauchyn jono avaruudessa $\text{raj}(X, \mathbb{E}^1)$, joten se suppenee tässä avaruudessa kohti rajafunktiota f . Osoitamme, että f on jatkuva.² Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\|f_k - f\| < \frac{\epsilon}{3}$, kun

²Todistus on sama kuin analyysin kursseilla tapauksessa, jossa X on suljettu ja rajoitettu väli avaruudessa $\mathbb{E}^1$.

$k \geq N$ ja $\delta > 0$ siten, että $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, kun $d(x, x_0) < \epsilon$. Kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| < \epsilon,$$

kun $d(x, x_0) < \epsilon$. $\square$

Seuraus 5.18. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Normiavaruuks $C^0(I, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen.

Todistus. Analyysin kurseilta muistamme, että suljetun ja rajoitetun välin jatkuvat funktiot ovat rajoitettuja. Väite seuraa siis Propositioista 5.17. $\square$

Täydellisiä normiavaruuksia kuten $\text{raj}(A, \mathbb{E}^1)$ ja $C^0(I, \mathbb{E}^1)$ kutsutaan **Banachin avaruuksiksi**. Banachin avaruuksia tarkastellaan lähemmin funktionaalianalyysin kurssilla.

Olkoon X metrinen avaruus. Täydellinen metrinen avaruus $\widehat{X}$ on avaruuden X **täydellistymä**, jos on isometrinen upotus $j: X \rightarrow \widehat{X}$ siten, että $j(X)$ on tiheä.^a

^aMyös isometrista upotusta $j: X \rightarrow \widehat{X}$ sanotaan avaruuden X täydellistymäksi.

Osoitamme, että jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä. Käytämme apuna seuraavaa tärkeää tulosta.

Lause 5.19 (Kuratowskin upotuslause). Jokaisella metrisellä avaruudella X on isometrinen upotus $K: X \rightarrow C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$.

Todistus. Harjoitustehtävä 3.12. $\square$

Lause 5.20. Jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä.

Todistus. Olkoon $K: X \rightarrow C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$ Kuratowskin upotus. Joukko $\overline{K(X)}$ on suljettu, joten varustettuna avaruuden $C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{E}^1)$ metriikalla se on täydellinen metrinen avaruus Lemman 5.16 nojalla. Määritelmän nojalla $K(X)$ on tiheä avaruudessa $\overline{K(X)}$. $\square$

Lause 5.21. Metrisen avaruuden täydellistymä on isometriaa vaille yksikäsitteinen: Jos $i: X \rightarrow Y$ ja $j: X \rightarrow Z$ ovat metrisen avaruuden X täydellistymiä. Tällöin on isometria $h: Y \rightarrow Z$, jolle $h \circ i = j$.

Todistus. Ohitamme todistuksen tällä kurssilla. Tulosta ja sen todistusta³ käsitellään funktionaalianalyysin kurssilla. $\square$

³ Määritellään kuvaus $g: i(X) \rightarrow j(X)$ asettamalla $g = j \circ i^{-1}$. Olkoon $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono joukossa $j(X)$. Tällöin on $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y \in Y$. Isometrian g on tasaisesti jatkuva, joten $(g(y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Siis jono $(g(y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee avaruudessa Z .

Määritellään $h(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(y_k)$. Määritelmä on hyvin asetettu: Jos $(\bar{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on toinen joukon $i(X)$ jono, joka suppenee raja-arvoon y , niin $\lim_{k \rightarrow \infty} g(y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(\bar{y}_k)$: Koska g on isometria, niin jono $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, joka määritellään asettamalla $z_{2k} = g(y_k)$ ja $z_{2k+1} = g(\bar{y}_k)$ on Cauchyn jono. Siis se suppenee, joten parillisten ja parittomien indeksien osajonoilla on sama raja-arvo.

Osoitetaan, että $h: i(X) \rightarrow j(X)$ on isometria: Olkoot $a, b \in Y$. Tällöin $a = \lim a_k$ ja $b = \lim b_k$ joillain Cauchyn jonoilla $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ja $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Kuvauksen g isometrisyyden nojalla

$$d(a, b) = \lim d(a_k, b_k) = \lim d(g(a_k), g(b_k)) = d(h(a), h(b)).$$

Siis h on isometrinen upotus. Mutta selvästi jokaisen avaruuden Z Cauchyn jonon alkukuva on Cauchyn jono, joten h on surjektio.

Lause 5.22 (Cantorin leikkauslause). *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoot*

$$X \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$$

epätyhjiä sisäkkäisiä suljettuja joukkoja. Jos $\text{diam}(E_k) \rightarrow 0$,⁴ kun $k \rightarrow \infty$, niin

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}$$

jollain $x_0 \in X$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 5.23 (Suljettujen välien periaate). *Olkoot $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ jono sisäkkäisiä suljettuja välejä euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Jos $\text{diam}(I_k) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x_0\}$$

jollain $x_0 \in \mathbb{E}^n$. □

Esimerkki 5.24. Proposition 5.22 ja Seurauksen 5.23 väite ei päde ilman oletusta, että joukot ovat suljettuja: Olkoot $I_n =]0, \frac{1}{n}[$ kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tällöin $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ ja $\text{diam}(I_k) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$ mutta $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset$.

5.4 Banachin kiintopistelause

Olkoon X metrinen avaruus. Jos kuvaus $F: X \rightarrow X$ on K -Lipschitz jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on (K) -**kutistava**. Jos $F(x) = x$ jollain $x \in X$, niin x on kuvauksen F **kiintopiste**.

Lause 5.25 (Kutistusperiaate eli Banachin kiintopistelause). *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F: X \rightarrow X$ on täsmälleen yksi kiintopiste. Jos F on K -kutistava ja x_0 on sen kiintopiste, niin*

$$d(x_0, F^k(x)) \leq K^k d(x_0, x)$$

kaikille $x \in X$.

Todistus. Olkoon $F: X \rightarrow X$ K -kutistava kuvaus. Huomataan varsinaiseta todistusta varten aluksi, että jokaisella $\epsilon' > 0$ on $N(\epsilon') > 0$ siten, että

$$\frac{K^m}{1-K} < \epsilon',$$

kun $m \geq N(\epsilon')$.

⁴Koska reaalilukujen osajoukkona tyhjän joukon supremum on $-\infty$, niin tämä oletus sisältää sen, että joukot E_k eivät ole tyhjiä.

Olkoon $x \in X$ ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)) < \epsilon, \end{aligned}$$

kun $m \geq N\left(\frac{\epsilon}{d(x, F(x))}\right)$. Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^\infty$ on Cauchyn jono. Koska X on täydellinen, jono $(F^j(x))_{j=1}^\infty$ suppenee kohti jotain pistettä $x_\infty \in X$.

Osoitetaan sitten, että piste x_∞ on kuvauksen F kiintopiste. Kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x_\infty, F(x_\infty)) &\leq d(x_\infty, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_\infty)) \\ &\leq (1+K)d(x_\infty, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $j \rightarrow \infty$. Siis $d(x_\infty, F(x_\infty)) = 0$, joten $x_\infty = F(x_\infty)$.

Osoitetaan vielä, että kiintopisteitä on täsmälleen yksi. Jos x_∞ ja y_∞ ovat kiintopisteitä, niin

$$Kd(x_\infty, y_\infty) \geq d(F(x_\infty), F(y_\infty)) = d(x_\infty, y_\infty).$$

Oletuksen mukaan $K < 1$, joten $d(x_\infty, y_\infty) = 0$ ja $x_\infty = y_\infty$.

Viimeisen väitteen todistamiseksi huomataan, että kaikille $x \in X$ pätee

$$d(F^k(x), x_0) = d(F^k(x), F^k(x_0)) \leq K^k d(F^k(x), x_0). \quad \square$$

Sovelluksia: Newtonin menetelmä ja Picardin iteraatio

Derivoituvan funktion nollakohtia voi etsiä numeerisesti **Newtonin menetelmällä**: Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ avoin väli ja olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{E}^1$ derivoituva. Arvataan, että pisteen x_0 lähellä voisi olla funktion f nollakohta. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_0, f(x_0))$. Otetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

jossa tangenttisuora leikkaa x -akselin. Iteroidaan tätä prosessia: Oletetaan, että piste x_k on konstruoitu. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_k, f(x_k))$. Otetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

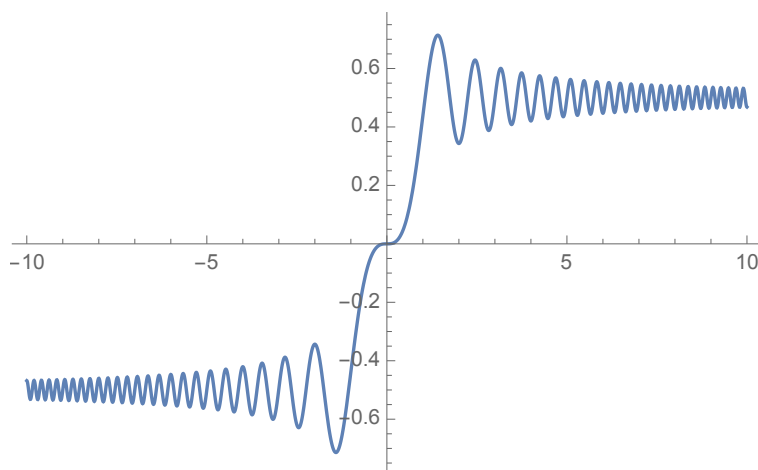
jossa tangenttisuora leikkaa x -akselin. Näin voidaan tehdä tietenkin vain, jos $f'(x_k) \neq 0$.

Geometrisen tarkastelun sijaan Newtonin menetelmää voidaankin siis tarkastella kuvauksen

$$x \mapsto F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterointina. Kuvauksen F kiintopisteessä x_0 pätee $x_0 = F(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, siis $f(x_0) = 0$.

Osoitamme seuraavaksi, että sopivilla oletuksilla Newtonin menetelmä antaa hyvän likiarvon nollakohdalle erittäin nopeasti.

Kuva 5.1: Fresnelin S -funktio.

Lause 5.26 (Newtonin menetelmä). *Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Olkoon $J_0 \subset I$ suljettu ja rajoitettu väli. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta välillä J_0 ja että sen derivaatalla ei ole nollakohtaa välillä J_0 . Olkoon $F: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Tällöin on jokin väli $J \subset J_0 \subset I$ siten, että jono $F^k(x)$ suppenee kohti funktion f nollakohtaa eksponentiaalisella nopeudella kaikilla $x \in J$.

Todistus. Koska $F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$, niin funktion F kiintopisteessä x_0 , joka on funktion f nollakohta, pätee $F'(x_0) = 0$. Siis jokaisella $0 < c < 1$ on pisteen x_0 ympäristö, jossa pätee $|F'(x)| \leq c$. Tässä ympäristössä F on c -kutistava: Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on ξ pisteiden x_0 ja x välissä, jolle pätee

$$F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0).$$

Koska F on jatkuvasti derivoituva ja $|F'(x_0)| < 1$, niin jollain x_0 -keskisellä välillä J pätee $|F'(y)| < K < 1$ jollaisn K kaikille $y \in J$. $\square$

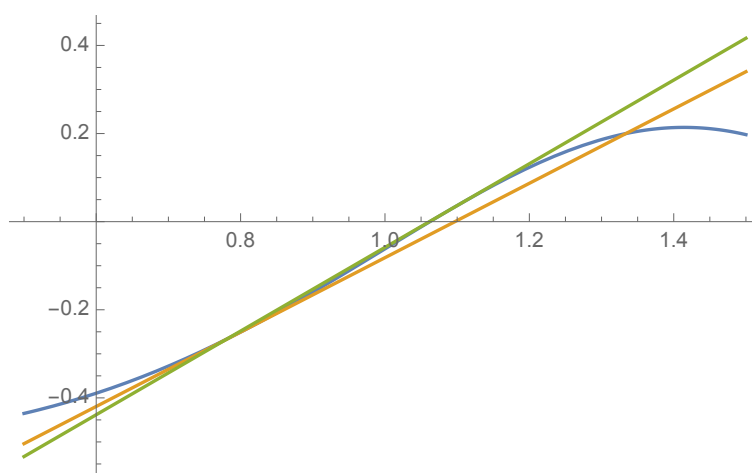
Esimerkki 5.27. Esimerkiksi optiikassa esiintyvä **Fresnelin S -funktio** $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään asettamalla kaikille $x \in \mathbb{R}$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt.$$

Etsitään Newtonin menetelmällä likiarvoa pienimmälle positiiviselle muuttujan x arvolle, jolla $S(x) = \frac{1}{2}$. Olkoon siis $h = S - \frac{1}{2}$. Arvataan kuvien 5.1 ja 5.2 perusteella, että funktion h nollakohta on pisteen $x_0 = 0.8$ lähellä. Olkoon $F_h(t) = t - \frac{h(t)}{h'(t)}$.

Ei ole kovin vaikea tarkastaa, että Newtonin menetelmässä käytettävä kuvaus

$$F'_h(x) = \pi t \left(S(x) - \frac{1}{2}\right) \cot \frac{\pi t^2}{2}$$



Kuva 5.2: Fresnelin S -funktion $\frac{1}{2}$ -arvon etsiminen Newtonin menetelmällä graafisesti.

toteuttaa $|F'_h(x)| < \frac{1}{2}$ välillä $[0.8, 1.2]$. Koska funktion S nollakohta x_∞ on tällä välillä, pätee $|0.8 - x_\infty| \leq 0.4$. Lauseen 5.26 nojalla pätee

$$|F_h^k(0.8) - x_\infty| \leq \frac{1}{5} \frac{1}{2^k} < 0.001$$

kun $k \geq 8$.

Kokeilemalla nähdään, että iteraatit suppenevat kohti nollakohtaa huomattavasti nopeammin kuin edellä arvioitiin:

k	t	$h(t)$	$F_h(t)$
	0.8	-0.251	1.09687
1	1.09687	0.0335346	1.06156
2	1.06156	-0.000585372	1.06215
3	1.06215	-1.18172 10^{-7}	1.06215

Kolmas ja neljäs iteraatti antavat siis saman arvon viiden desimaalin tarkkuudella. Näyttää siltä, että likiarvo jonon $(F_h^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ raja-arvolle on löytynyt ja että se on funktion h nollakohta.

Esimerkki 5.28. Olkoon $f: \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ on M -Lipschitz ja olkoon $\delta < \frac{1}{M}$. **Picardin operaattori** $\mathcal{P}_{a,b}C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{E}^n)$ määritellään asettamalla

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds$$

kaikille $\phi \in C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$. Nyt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\|_\infty &= \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right\| \\ &\leq \max_{|t-a| \leq \delta} \int_a^t \|f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \\ &\leq \delta M \|\phi - \psi\|_\infty < \|\phi - \psi\|_\infty. \end{aligned}$$

Siis Picardin operaattori on kutistava.

Analyysin peruslauseen nojalla funktio $x:]a - \delta, a + \delta[$ on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

ratkaisu, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin kiintopiste. Koska operaattori on kutistava, sillä on Banachin kiintopistelauseen nojalla täsmälleen yksi kiintopiste.

5.5 Kuvauksen raja-arvo

Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \bar{A}$. Kuvauksella $f: A \rightarrow Y$ on **raja-arvo** $b \in Y$ pisteessä a , jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että

$$f\left(\left(B(a, \delta) - \{a\}\right) \cap A\right) \subset B(b, \epsilon).$$

Jos kuvauksella $f: X \rightarrow Y$ on **raja-arvo** $b \in Y$ pisteessä a , käytetään merkintöjä $f(x) \rightarrow b$, kun $x \rightarrow a$ ja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Propositio 5.29. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \bar{A}$ ja olkoon $f: A \rightarrow Y$. Tällöin $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, jos ja vain jos $b = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon A alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^{\infty}$.*

Todistus. Oletetaan, että $b = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon A alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Jos b ei ole funktion f raja-arvo pisteessä a , niin on $\epsilon > 0$ siten, että jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ on $\bar{a}_k \in B(a, \frac{1}{k}) \cap A$, jolle $f(\bar{a}_k) \notin B(b, \frac{\epsilon}{2})$. Tällöin $\bar{a}_k \rightarrow a$, kun $k \rightarrow \infty$ mutta $f(\bar{a}_k)$ ei suppene raja-arvoon b vastoin oletusta.

Toinen suunta todistetaan kuten Lemma 5.9. □

5.6 Osajonot

Olkoon $a: \mathbb{N} \rightarrow A$ jono ja olkoon $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ kasvava injektio. Kuvaus $a \circ i$ on jonon a **osajono**. Kun jonolle a käytetään merkintää $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, osajonolle $a \circ i$ käytetään merkintää $a \circ i = (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, missä $a_{n_k} = a_{i(k)} = a(i(k))$.

Esimerkki 5.30. Olkoon $a_k = (-1)^k \in \mathbb{E}^1$. Olkoot $i, j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ kuvaukset $i(k) = 2k$ ja $j(k) = 2k + 1$. Tällöin $a \circ i$ on parillisten indeksien osajono $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$, joka on tässä tapauksessa vakiojono 1 ja $a \circ j$ on parittomien indeksien osajono $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$, joka on tässä tapauksessa vakiojono -1 .

Lemma 5.31. *Suppenevan jonon osajonot ovat suppenevia ja niillä on sama raja-arvo. Cauchyn jonon osajonot ovat Cauchyn jonoja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 5.32. *Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ Cauchyn jono, jolla on suppeneva osajono. Tällöin jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on suppeneva ja sen raja-arvo on sama kuin osajonon raja-arvo.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Harjoitustehtäviä

5.1. Osoita, että suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.

5.2. Osoita, että Cauchyn jonot ovat rajoitettuja.

5.3. Todista Lemma 5.7.

5.4. Olkoot $(x_k)_{k=1}^\infty$ ja $(y_k)_{k=1}^\infty$ suppenevia jonoja normiavaruudessa V ja olkoot $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ ja $(\mu_k)_{k=1}^\infty$ suppenevia reaalilukujonoja. Osoita, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k x_k + \mu_k y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k \lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

5.5. Osoita, että $\mathbb{E}^n$ on täydellinen.⁵

5.6. Onko Ranskan rautatieavaruus $(\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$ täydellinen metrinen avaruus?

5.7. Osoita, että tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi.

5.8. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoot $X \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ epätyhjiä sisäkkäisiä suljettuja joukkoja. Oletetaan, että $\text{diam}(E_k) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Osoita, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}$$

jollain $x_0 \in X$.

5.9. Anna esimerkki homeomorfisista metrisistä avaruuksista X ja Y siten, että X on täydellinen ja Y ei ole täydellinen.

5.10. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \bar{A}$ ja olkoon $f: A \rightarrow Y$ siten, että $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Osoita, että $b = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon A alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^\infty$.

5.11. Todista Lemma 5.31.

5.12. Olkoon $(x_k)_{k=1}^\infty$ Cauchyn jono, jolla on suppeneva osajono. Osoita, että jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ on suppeneva.

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon $M \geq 1$. Kuvaus $F: X \rightarrow Y$ on **M -bi-Lipschitz-kuvaus**, jos kaikille $x_1, x_2 \in X$ pätee

$$\frac{d_X(x_1, x_2)}{M} \leq d_Y(F(x_1), F(x_2)) \leq M d_X(x_1, x_2).$$

Jos F on M -bi-Lipschitz-kuvaus jollakin $M > 1$, niin se on **bi-Lipschitz-kuvaus**.

5.13. Osoita, että surjektiivinen bi-Lipschitz-kuvaus on homeomorfismi

5.14. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Osoita, että Y on täydellinen, jos on surjektiivinen bi-Lipschitz-kuvaus $F: X \rightarrow Y$.

⁵Katso Esimerkki 5.14.

Luku 6

Kompaktius

6.1 Kompaktit joukot

Kokoelma $(U_j)_{j \in J}$ on joukon B **peite**, jos $B \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ ja se on **avoin peite**, jos joukot U_j ovat avoimia. Peite on **äärellinen**, jos indeksijoukko J on äärellinen. Jos $J' \subset J$, niin peite $(U_j)_{j \in J'}$ on peitteen $(U_j)_{j \in J}$ **osapeite**.

Esimerkki 6.1. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $x_0 \in X$. Kokoelma $(B(x_0, r))_{r>0}$ on metrisen avaruuden X avoin peite. Kokoelma $(B(x_0, n))_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on peitteen $(B(x_0, r))_{r>0}$ osapeite.

Metrisen avaruuden X osajoukko A on **kompakti**, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Esimerkki 6.2. (1) Äärelliset metriset avaruudet ovat kompakteja.

(2) Metrinen avaruus $\mathbb{E}^n$ ei ole kompakti koska sen avoimella peitteellä $(B(0, r))_{r>0}$ ei ole äärellistä osapeitettä: Peitteen pallot ovat sisäkkäisiä, joten jokaiselle äärelliselle $J \subset [0, \infty[$ pätee

$$\bigcup_{j \in J} B(0, j) = B(0, \max J) \subsetneq \mathbb{E}^n.$$

(3) Olkoon A ääretön joukko. Diskreetti metrinen avaruus (A, δ) ei ole kompakti koska sen avoimella peitteellä $\{\{a\} : a \in A\}$ ei ole avointa osapeitettä.

(4) Osoitamme luvussa 6.3, että euklidisen suoran $\mathbb{E}^1$ suljetut rajoitetut välit ovat kompakteja.

Propositio 6.3. *Kompakti joukko on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $K \subset X$ kompakti. Se, että joukon K tulee olla rajoitettu todistetaan samalla tavalla kuin Esimerkissä 6.2(2) osoitettiin, että $\mathbb{E}^n$ ei ole kompakti.

Osoitetaan sitten, että K on suljettu. Olkoon $x \in X - K$. Olkoon $U_k = X - \overline{B}(x, \frac{1}{k})$. Kokoelma $(U_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on kompaktin joukon K avoin peite. Siis on $n \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$K \subset U_n$, joten $B(x, \frac{1}{n}) \subset X - K$. Siis x on joukon K komplementin sisäpiste, joten K on suljettu. $\square$

Luvussa 6.3 todistamme Heinen ja Borelin lauseen, jonka mukaan euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. Tämä kompaktien joukkojen luonnehdinta ei päde yleisesti.

Esimerkki 6.4. (1) Diskreetti metrinen avaruus on suljettu ja rajoitettu mutta Esimerkissä 6.2 huomasimme, että se ei ole kompakti, jos se ei ole äärellinen

(2) Metrinen avaruus $(]0, 1], d_{\mathbb{E}})$ on suljettu¹ ja rajoitettu. Kokoelma

$$\left(\left] \frac{1}{k}, 1 \right] \right)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$$

on joukon $]0, 1]$ avoin peite, jolla ei ole äärellistä osapeitettä: Jos $n \geq m$, niin $] \frac{1}{m}, 1] \subset] \frac{1}{n}, 1]$, joten jokaiselle äärelliselle osajoukolle $J \subset \mathbb{N} - \{0\}$ pätee

$$\bigcup_{j \in J} \left] \frac{1}{j}, 1 \right] = \left] \frac{1}{\max J}, 1 \right] \subsetneq]0, 1].$$

Propositio 6.5. *Olkoon X metrinen avaruus.*

- (1) *Jos X on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin E on kompakti.*
- (2) *Jos $K \subset X$ on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin $E \cap K$ on kompakti.*
- (3) *Jos $E_1, E_2, \dots, E_n \subset X$ ovat kompakteja, niin $\bigcup_{k=1}^n E_k$ on kompakti.*
- (4) *Jos $A \neq \emptyset$ ja joukot $E_\alpha \subset X$ ovat kompakteja kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 6.6. *Kompakti metrinen avaruus on separoituva.*

Todistus. Olkoon K kompakti. Joukon K peitteellä $(B(x, \frac{1}{k}))_{x \in K}$ on äärellinen osapeite $B(x_{k1}, \frac{1}{k}), \dots, B(x_{kn_k}, \frac{1}{k})$. Joukko $\{x_{kj} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n_k\}$ on numeroituva tiheä osajoukko. $\square$

Propositio 6.7. *Kompaktin metrisen avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste.*

Todistus. Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon $A \subset K$ joukko, jolla ei ole kasautumispisteitä. Jokaisella $x \in K$ on $r_x > 0$ siten, että

$$B(x, r_x) \cap A \subset \{x\}.$$

Avaruuden K avoimella peitteellä $(B(x, r_x))_{x \in K}$ on äärellinen osapeite. Siis joukko A on äärellinen. $\square$

Seuraus 6.8. *Kompakti metrinen avaruus on täydellinen.*

¹Koska koko avaruus on suljettu osajoukko.

Todistus. Harjoitustehtävä. Seuraa Propositioista 6.7 ja Lemmasta 5.32. $\square$

Metrisen avaruuden X osajoukko A on **jonokompakti**, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat joukkoon A on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä.

Lause 6.9 (Lebesguen peitelause). *Olko J jonokompakti joukko ja olko $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ sen avoin peite. Tällöin on $\lambda > 0$ siten, että jokaiselle $x \in J$ on $\alpha \in A$, jolle $B(x, \lambda) \subset U_\alpha$.*

Lebesguen peitelauseen antama luku λ on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ **Lebesguen luku**.

Todistus. Oletetaan, että peitteellä $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ei ole Lebesguen lukua. Tällöin jokaisella $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on $x_n \in J$, jolle $B(x_n, \frac{1}{n})$ ei ole avoimen joukon U_α osajoukko millään $\alpha \in A$. Jonolla $(x_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on suppeneva osajono $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N} - \{0\}}$, koska J on jonokompakti.

Olko $x_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j}$. Koska $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ on avoin peite, on $\alpha_\infty \in A$ ja $r_\infty > 0$, joille $x_\infty \in B(x_\infty, r_\infty) \subset U_{\alpha_\infty}$. Kolmioepäyhtälön nojalla $B(x_{k_j}, \frac{r_\infty}{2}) \subset U_{\alpha_\infty}$ suurilla j . Mutta riittävän suurilla j pätee $\frac{1}{k_j} < \frac{r_j}{2}$, joten $B(x_{k_j}, \frac{1}{k_j}) \subset U_{\alpha_\infty}$ suurilla j . Tämä on ristiriita. $\square$

Lause 6.10. *Metrisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on jonokompakti.*

Todistus. Olko X metrisen avaruuden joukko ja olko $K \subset X$ kompakti. Olko $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono, jolle pätee $y_k \in K$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x, 1))_{x \in K}$ on äärellinen osapeite $(B(x_1^1, 1), \dots, B(x_{n_1}^1, 1))$. Joukko

$$I_1 = \{n \in \mathbb{N} : y_n \in B(x_{k_1}^1, 1)\}$$

on ääretön jollain $k_1 \in \{1, \dots, n_1\}$. Jonolla $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{1j})_{j \in \mathbb{N}}$, jolle $y_{1j} \in B(x_{k_1}^1, 1)$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$.

Muodostamme osajonon jonolle $(y_{1j})_{j \in \mathbb{N}}$ samalla tavalla: Joukon K avoimella peitteellä $(B(x, \frac{1}{2}))_{x \in K}$ on äärellinen osapeite $(B(x_1^2, \frac{1}{2}), \dots, B(x_{n_2}^2, \frac{1}{2}))$. Joukko

$$I_2 = \{n \in I_1 : y_n \in B(x_{k_2}^2, \frac{1}{2})\}$$

on ääretön jollain $k_2 \in \{1, \dots, n_2\}$. Jonolla $(y_{1k})_{k \in \mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$, jolle $y_{2j} \in B(x_{k_2}^2, \frac{1}{2})$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$.

Jatkamme induktiolla: Oletetaan, että on konstruoitu jono $(y_{Nk})_{k \in \mathbb{N}}$. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x, \frac{1}{N}))_{x \in K}$ on äärellinen osapeite $(B(x_1^N, \frac{1}{N}), \dots, B(x_{n_N}^N, \frac{1}{N}))$. Jonolla $(y_{Nk})_{k \in \mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{(N+1)j})_{j \in \mathbb{N}}$, jolle $y_{(N+1)j} \in B(x_{k_N}^N, \frac{1}{N})$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Diagonaalisesti muodostettu alkuperäisen jonon $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ osajono $(z_j)_{j \in \mathbb{N}} = (y_{jj})_{j \in \mathbb{N}}$ on konstruktion perusteella Cauchyn jono, joten se suppenee Proposition 6.8 nojalla.

Oletetaan sitten, että K on jonokompakti. Olko $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ joukon K avoin peite ja olko λ sen Lebesguen luku. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x, \lambda))_{x \in K}$ on äärellinen osapeite, sillä muuten löydämme seuraavalla konstruktiolla jonon, jolla ei ole suppenevaa osajonoa: Valitaan $x_0 \in K$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ valitaan $x_{n+1} \in K - \bigcup_{j=0}^n B(x_j, \lambda)$. Näin saadulle jonolle pätee $d(x_r, x_s) > \delta$ kaikilla $r \neq s$, joten sillä ei ole suppenevaa osajonoa.

On siis $N \in \mathbb{N}$ ja pisteet $x_1, x_2, \dots, x_N$, joille $K \subset \bigcup_{n=0}^N B(x_n, \lambda)$. Oletuksen mukaan jokaisella $1 \leq n \leq N$ on $\alpha_n \in A$, jolle $B(x_n, \lambda) \subset U_{\alpha_n}$. Siis

$$K \subset \bigcup_{n=0}^N B(x_n, \lambda) \subset \bigcup_{n=0}^N U_{\alpha_n}$$

joten $(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_N})$ on peitteen $(U_{\alpha})_{\alpha \in A}$ äärellinen osapeite. □

Propositio 6.11. *Olko X ja Y kompakteja. Tällöin $X \times Y$ on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

6.2 Kompaktit joukot ja jatkuvat kuvaukset

Propositio 6.12. *Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ jatkuva. Olkoon $K \subset X$ kompakti. Olkoon $(U_j)_{j \in J}$ joukon $f(K)$ avoin peite. Tällöin $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$ on kompaktin joukon K avoin peite. Sillä on siis äärellinen osapeite $(f^{-1}(U_j))_{j \in J'}$. Siis $(U_j)_{j \in J}$ on joukon K äärellinen peite, joten $f(K)$ on kompakti. □

Kompaktius on topologinen ominaisuus:

Propositio 6.13. *Olko X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h: X \rightarrow Y$ homeomorfismi. Tällöin X on kompakti, jos ja vain jos Y on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 6.14. *Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Jos kuvaus $f: K \rightarrow Y$ on jatkuva, niin se on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Kokoelma $(f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2})))_{y \in Y}$ on avaruuden K avoin peite. Olkoon δ tämän peitteen Lebesguen luku. Olkoot $a, b \in K$ siten, että $d(a, b) < \delta$. Säteen δ määritelmän nojalla on $y \in Y$ siten, että $a, b \in B(a, \delta) \subset B(y, \frac{\epsilon}{2})$. Siis

$$d(f(a), f(b)) \leq d(f(a), y) + d(y, f(b)) \leq \epsilon,$$

joten f on tasaisesti jatkuva. □

Lause 6.15. *Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Jos $f: K \rightarrow Y$ on jatkuva bijektio, niin f on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon $E \subset K$ suljettu. Proposition 6.5(1) nojalla E on kompakti. Proposition 6.12 nojalla $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ on kompakti ja siis Proposition 6.3 nojalla se on suljettu. Lauseen 3.5(2) nojalla f^{-1} on jatkuva. □

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Pisteiden $x \in X$ etäisyys joukosta E on

$$d(x, E) = \inf\{d(x, e) : e \in E\}.$$

Etäisyys joukosta E määrittelee funktion $d_E: X \rightarrow \mathbb{E}^1$ asettamalla $d_E(x) = d(x, E)$ kaikille $x \in X$.

Lemma 6.16. Kuvaus d_E on 1-Lipschitz-jatkuva. Lisäksi $d(x, E) = 0$, jos ja vain jos $x \in \overline{E}$.

Todistus. Harjoitustehtävät 3.8 ja 3.9. □

Propositio 6.17. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $K \subset X$ kompakti. Tällöin jokaisella $x \in X$ on $x_K \in K$, jolle $d(x, K) = d(x, x_K)$.

Todistus. Kuvaus $d_x: K \rightarrow \mathbb{E}^1$ on Lemman 6.16 nojalla jatkuva, joten se saavuttaa miniminsä jossain pisteessä $x_K \in K$. Määritelmän nojalla $d(x, K) = d(x, x_K)$. □

6.3 Kompaktit joukot euklidisessa avaruudessa

Lause 6.18 (Heinen ja Borelin lause). Euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.

Todistus. Lauseen toisen suunnan väite seuraa Propositioista 6.3. Lauseen 6.10 nojalla riittää osoittaa, että jokainen euklidisen avaruuden epätyhjä suljettu ja rajoitettu joukko $S \subset \mathbb{E}^n$ on jonokompakti.

Olkoon $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono, jolle $s_k \in S$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska S on rajoitettu, on $M > 0$, jolle pätee $S \subset I_0 = [-M, M]^n$. Jaetaan I_0 koordinaattihypertasoilla $\{x \in \mathbb{E}^n : x_j = 0\}$ 2^n yhtäsuureen M -sivuisen suljettuun n -väliin $I_1^1, \dots, I_1^{2^n}$, joiden keskinäiset leikkaukset sisältyvät koordinaattihypertasoisiin. Olkoon I_1 sellainen näistä n -väleistä, jolle joukko $\{n \in \mathbb{N} : s_n \in I_1\}$ on ääretön. Olkoon $(s_{1j})_{j \in \mathbb{N}}$ jonon $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ osajono, joka koostuu väliin I_1 kuuluvista pisteistä.

Jaetaan sitten I_1 samalla tavalla 2^n yhtäsuureen $\frac{M}{2}$ -sivuisen n -väliin $I_2^1, \dots, I_2^{2^n}$ koordinaattihypertasojen kanssa yhdensuuntaisilla hypertasoilla. Olkoon I_2 sellainen näistä n -väleistä, jolle joukko $\{n \in \mathbb{N} : s_n \in I_2\}$ on ääretön. Olkoon $(s_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$ jonon $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ osajono, joka koostuu väliin I_2 kuuluvista pisteistä.

Induktiolla saadaan sisäkkäiset suljetut rajoitetut välit $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ ja osajonot $(s_{kj})_{j \in \mathbb{N}}$, jotka koostuvat väliin I_k kuuluvista pisteistä jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Diagonaalisesti pisteistä $z_k = s_{kk}$ muodostettu jono $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on jonon $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ osajono, joka suppenee kohti Cantorin leikkauslauseen 5.22 antamaa pistettä $s_\infty \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \cap S$. □

Seuraus 6.19 (Bolzanon ja Weierstrassin lause jonoille). Euklidisen avaruuden rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.

Todistus. Tämä väite tuli todistetuksi Heinen ja Borelin lauseen todistuksessa! □

Seuraus 6.20 (Bolzanon ja Weierstrassin lause joukoille). Euklidisen avaruuden ääretömällä osajoukolla $A \subset \mathbb{E}^n$ on kasautumispiste. Jos A on suljettu, niin kasautumispiste on joukossa A .

Todistus. Seuraa Bolzanon ja Weierstrassin lauseesta jonoille. Harjoitustehtävä. □

Lause 6.21 (Weierstrassin lause). Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $K \subset X$ kompakti ja olkoon $f: X \rightarrow \mathbb{E}^1$ jatkuva. Tällöin on $x_0, y_0 \in K$, joille pätee

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

ja

$$f(y_0) = \min\{f(x) : x \in K\}.$$

Todistus. Proposition 6.12 nojalla kuvajoukko $f(K) \subset \mathbb{E}^1$ on kompakti. Heinen ja Borelin lauseen nojalla se on suljettu ja rajoitettu. Siis $\sup f(K), \inf f(K) \in f(K)$, joten $\sup f(K) = \max f(K)$ ja $\inf f(K) = \min f(K)$. $\square$

Esimerkki 6.22. Euklidisen avaruuden pallot ja pallopinnat ovat kompakteja Heinen ja Borelin lauseen nojalla. Lauseen 4.9 todistuksessa sovelsimme Weierstrassin lausetta kompaktilla pallopinnalla.

Seuraus 6.23 (Weierstrassin lause). *Kompaktilla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.* $\square$

Harjoitustehtäviä

- 6.1. Ovatko Ranskan rautatieavaruuden $(\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$:n suljetut pallot kompakteja?
- 6.2. Todista Proposition 6.5 kohdat (1) ja (2).
- 6.3. Todista Proposition 6.5 kohdat (3) ja (4).
- 6.4. Osoita, että kompakti metrinen avaruus on täydellinen.
- 6.5. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h: X \rightarrow Y$ homeomorfismi. Osoita, että X on kompakti, jos ja vain jos Y on kompakti.
- 6.6. Todista Proposition 6.14 suoraan jatkuvuuden määritelmän avulla käyttämättä Lebesguen peitelausetta.
- 6.7. Todista Seuraus 6.20.
- 6.8. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon ja olkoon $K \subset X$ kompakti, $K \neq \emptyset$. Osoita, että on $a, b \in K$, joille pätee

$$d(a, b) = \text{diam}(K).$$

Olkoot $I_0 = [0, 1] \subset \mathbb{E}^1$, $I_1^0 = [0, \frac{1}{3}]$ ja $I_1^1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Välit I_1^0 ja I_1^1 ovat siis ne kaksi suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun välistä I_0 poistetaan keskeltä avoin väli $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Olkoot

$$I_2^0 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right], \quad I_2^1 = \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right], \quad I_2^2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right], \quad I_2^3 = \left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$$

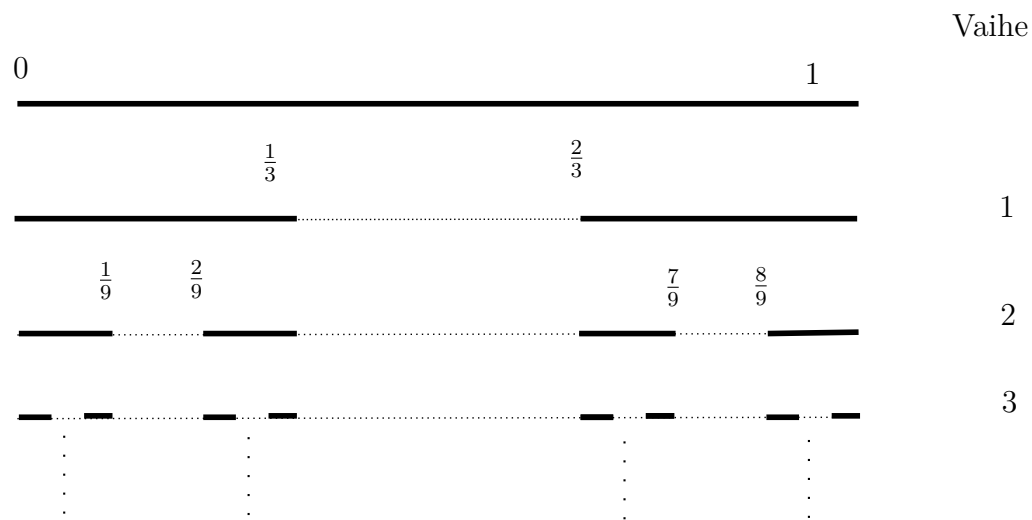
ne neljä suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun väleistä I_1^0 ja I_1^1 poistetaan keskeltä avoimet välit, joiden pituus on $\frac{1}{3^2}$. Jatketaan induktiolla: Vaiheessa n on 2^n suljettua väliä $I_n^0, I_n^1, \dots, I_n^{2^n-1}$. Jokaisen välin I_n^k pituus on 3^{-n} . Näistä väleistä muodostetaan vaiheen $n+1$ välit poistamalla jokaisesta keskeltä avoin väli, jonka pituus on $3^{-(n+1)}$.

Olkoon

$$K_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k.$$

Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko on

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k.$$



Kuva 6.1: Cantorin joukon konstruktio

6.9. Osoita, että Cantorin joukko on epätyhjä kompakti joukko.

6.10. Osoita, että Cantorin joukko on ylinumeroituva.

Luku 7

Yhtenäisyys

7.1 Yhtenäiset joukot

Metriten avaruus X on **yhtenäinen**, jos ei ole avoimia epätyhjiä joukkoja U ja V , joille pätee $U \sqcup V = X$. Metriten avaruuden (X, d_X) osajoukko E on **yhtenäinen**, jos metriten avaruus (E, d_X) on yhtenäinen.

Metriten avaruuden X osajoukko E on yhtenäinen, jos ja vain jos ei ole avaruuden X avoimia epätyhjiä joukkoja U ja V , joille pätee $(U \cap E) \sqcup (V \cap E) = E$.

Esimerkki 7.1. (0) Tyhjä joukko on yhtenäinen.

(1) Diskreetti metriten avaruus on yhtenäinen, jos ja vain jos se koostuu yhdestä pisteestä.

(2) Ultrametriten avaruus on yhtenäinen, jos ja vain jos se koostuu yhdestä pisteestä: Olkoon X ultrametriten avaruus ja olkoot $x, y \in X$. Olkoon $r > 0$ siten, että $y \in X - B(x, r)$. Harjoitustehtävässä 2.11 osoitettiin, että $B(x, r)$ on avoin ja suljettu joukko. Siis $X - B(x, r)$ on avoin $X = B(x, r) \sqcup (X - B(x, r))$.

Usein epäyhtenäisyys on helpompi osoittaa kuin yhtenäisyys. Luvussa 7.2 selvitämme avaruuden $\mathbb{E}^1$ yhtenäiset joukot ja tämän luvun ja luvun 7.3 tulosten avulla saamme lisää esimerkkejä.

Propositio 7.2. *Olkoon X metriten avaruus.*

(1) *X on yhtenäinen, jos ja vain jos ei ole suljettuja epätyhjiä joukkoja $F \subset X$ ja $G \subset X$, joille pätee $F \sqcup G = X$.*

(2) *Olkoon $A \subset X$ yhtenäinen ja olkoot U ja V avaruuden X avoimia osajoukkoja, joille pätee $U \cap V = \emptyset$ ja $A \subset U \cup V$. Tällöin $A \subset U$ tai $A \subset V$.*

Todistus. (1) Avaruus X on erillinen yhdiste avoimista joukoista U ja V , jos ja vain jos se on erillinen yhdiste suljetuista joukoista U ja V .

(2) Väite on selvästi yhtäpitävä yhtenäisyyden määritelmän kanssa. □

Seuraava epäyhtenäisyyden karakterisointi on joskus käyttökelpoinen:

Propositio 7.3. *Olkoon X metrinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on epäyhtenäinen, jos ja vain jos on jatkuva surjektio $f: A \rightarrow \{0, 1\}$.*

Todistus. Oletetaan, että A on epäyhtenäinen. On siis avoimet joukot $U, V \subset X$, joille $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ ja $A \subset U \sqcup V$. Määritellään funktio $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ asettamalla

$$f(a) = \begin{cases} 1 & , \text{ kun } a \in U \\ 0 & \text{ muuten.} \end{cases}$$

Funktio f on surjektio koska A leikkaa molempia joukkoja U ja V . Se on jatkuva koska $f^{-1}(0)$ ja $f^{-1}(1)$ ovat avoimia joukkoja metrisessä avaruudessa A .

Oletetaan, että on jatkuva surjektio $f: A \rightarrow \{0, 1\}$. Tällöin $f^{-1}(0)$ ja $f^{-1}(1)$ ovat avoimia epättyhjiä erillisiä joukkoja, ja $A = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$. $\square$

Lemma 7.4. *Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $A \neq \emptyset$ ja olkoot Y_α yhtenäisiä osajoukkoja kaikilla $\alpha \in A$ siten, että $\bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \emptyset$. Tällöin $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoot U ja V avoimia erillisiä joukkoja, joille pätee $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset U \cup V$. Jokaiselle joukolle Y_α pätee joko $Y_\alpha \subset U$ tai $Y_\alpha \subset V$ Proposition 7.2 nojalla. Jos $Y_{\alpha_0} \subset U$ jollain $\alpha_0 \in A$, niin $Y_\alpha \subset U$ kaikilla α koska $Y_\alpha \cap Y_{\alpha_0} \neq \emptyset$ ja Y_α on yhtenäinen. Siis $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset U$. Koska tämä pätee kaikille erillisille avoimille joukoille U ja V , seuraa, että $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ on yhtenäinen. $\square$

Propositio 7.5. *Jos E on yhtenäinen ja $E \subset A \subset \overline{E}$, niin A on yhtenäinen. Erityisesti yhtenäisen joukon sulkeuma on yhtenäinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Propositio 7.6. *Yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f: X \rightarrow Y$ jatkuva. Oletetaan, että $f(X)$ ei ole yhtenäinen. Tällöin on avoimet joukot $U, V \subset Y$, joille $U \cap f(X) \neq \emptyset$, $V \cap f(X) \neq \emptyset$ ja $(U \cap f(X)) \sqcup (V \cap f(X)) = f(X)$. $\square$

Seuraus 7.7. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h: X \rightarrow Y$ homeomorfismi. Tällöin X on yhtenäinen, jos ja vain jos Y on yhtenäinen.* $\square$

7.2 Yhtenäiset joukot avaruudessa $\mathbb{E}^1$

Propositio 7.8. *Jos $A \subset \mathbb{E}^1$ on yhtenäinen, niin $A = \emptyset$, $A = \mathbb{E}^1$ tai A on väli tai yhden pisteen joukko.*

Todistus. Oletetaan, että $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{E}^1$ ei ole väli eikä yhden pisteen joukko. Tällöin on $a_1, a_2 \in A$ ja $b \in \mathbb{E}^1 - A$, joille pätee $a_1 < b < a_2$. Tällöin

$$A = (A \cap]-\infty, b[) \sqcup (A \cap]b, \infty[),$$

joten A ei ole yhtenäinen. $\square$

Propositio 7.9. *Euklidisen avaruus $\mathbb{E}^1$ ja avaruuden $\mathbb{E}^1$ välit ovat yhtenäisiä.*

Todistus. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ väli tai $\mathbb{E}^1$. Oletetaan, että se ei ole yhtenäinen. Tällöin on avoimet joukot A ja B siten, että $(A \cap I) \sqcup (B \cap I) = I$, $A \cap I \neq \emptyset$ ja $B \cap I \neq \emptyset$. Erityisesti on $a \in A \cap I$ ja $b \in B \cap I$. Voimme olettaa, että $a < b$.

Koska I on väli, $[a, b] \subset I$. Olkoon $c = \sup(A \cap [a, b])$. Koska A on avoin ja $b \notin A$, pätee $c \notin A$. Siis $c \in B$. Mutta B on avoin ja $c < b$, joten on $r > 0$ siten, että $]c - r, c + r[= B(c, r) \subset B \cap I$. Mutta tällöin $c - r$ on joukon $A \cap I$ yläraja, joten $\sup(A \cap I) \leq c - r < c = \sup(A \cap I)$, mikä on ristiriita. Siis I on yhtenäinen. $\square$

Seuraus 7.10 (Bolzanon lause). *Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^1$ jatkuva funktio, jolle $f(a)f(b) < 0$. Tällöin on $c \in]a, b[$, jolle pätee $f(c) = 0$.*

Todistus. Proposition 7.9 nojalla väli $[a, b]$ on yhtenäinen. Proposition 7.6 nojalla kuvajoukko $f([a, b])$ on yhtenäinen, joten se on väli tai piste. Oletuksen nojalla kuvajoukossa on enemmän kuin yksi piste, joten $f([a, b])$ on väli. Oletuksen nojalla $f(a) > 0$ ja $f(b) < 0$ tai päinvastoin, joten kuvajoukossa, joka on väli, on positiivisia ja negatiivisia lukuja. Siis $0 \in f([a, b])$. $\square$

7.3 Polkuyhtenäisyys

Olkoon X metrinen avaruus. Jatkuva kuvaus kompaktilta väliltä $I \subset \mathbb{E}^1$ avaruuteen X on **polku**. Polku $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ **yhdistää** pisteet $x_1 \in X$ ja $x_2 \in X$, jos $\{\gamma(a), \gamma(b)\} = \{x_1, x_2\}$. Polku $\gamma: I \rightarrow X$ **yhdistää** pisteet $x_1 \in E$ ja $x_2 \in E$ **joukossa** $E \subset X$, jos γ yhdistää pisteet x_1 ja x_2 ja $\gamma(I) \subset E$. Polun $\gamma: I \rightarrow X$ **jälki** on $|\gamma| = \gamma(I)$.

Joukko $E \subset X$ on **polkuyhtenäinen**, jos kaikille $x, y \in E$ on polku, joka yhdistää ne joukossa E .

Propositio 7.11. *Jos E on polkuyhtenäinen, niin se on yhtenäinen.*

Todistus. Suljettu väli on Proposition 7.9 nojalla yhtenäinen. Polun kuva on yhtenäinen Proposition 7.6 nojalla. Olkoon $x_0 \in E$. Jokaisella $x \in E$ on polku γ_x , joka yhdistää pisteet x_0 ja x . Siis $E = \bigcup_{x \in E} |\gamma_x|$ ja $x_0 \in \bigcap_{x \in E} |\gamma_x|$, joten E on yhtenäinen Lemman 7.4 nojalla. $\square$

Propositio 7.12. *Polkuyhtenäisen joukon kuva jatkuvalla kuvauksella on polkuyhtenäinen.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $F: X \rightarrow Y$ jatkuva. Olkoon $A \subset X$ polkuyhtenäinen. Olkoot $y, z \in F(A)$. Tällöin on pisteet $y_A, z_A \in A$, joille pätee $F(y_A) = y$ ja $F(z_A) = z$. Koska A on polkuyhtenäinen, on polku $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$, joka yhdistää pisteet y_A ja z_A joukossa A . Polku $F \circ \gamma$ yhdistää pisteet y ja z . $\square$

Esimerkki 7.13. $\mathbb{E}^n$ on polkuyhtenäinen kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$: Olkoot $A, B \in \mathbb{E}^n$. Olkoon $j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^n$ kuvaus

$$j(t) = A + t(B - A).$$

Tällöin j on selvästi jatkuva ja sille pätee $j(0) = A$ ja $j(1) = B$.

Esimerkki 7.14. Pallon pinta $S(0,1) \subset \mathbb{E}^n$ on polkuyhtenäinen: Olkoot $A, B \in \mathbb{E}^n$, $\|A\| = \|B\| = 1$, $A \neq \pm B$ ja olkoon $j_{A,B}: \mathbb{R} \rightarrow S(0,1)$ kuvaus

$$j_{A,B}(t) = A \cos t + \frac{B - (A|B)A}{\sqrt{1 - (A|B)^2}} \sin t.$$

Tällöin $j_{A,B}$ on selvästi jatkuva ja sille pätee $j_{A,B}j(0) = A$ ja $j_{A,B}(\arccos(A|B)) = B$, joten $j_{A,B}|_{[0,\arccos(A|B)]}$ on polku, joka yhdistää pisteet A ja B .

Kuvaus $j_{A,B}$ parametrizoi yksikäsitteisen isoympyrän, jolla pisteet A ja B ovat. Huomaa, että $j_{A,B}(\pi) = -A$, joten $j_{A,B}|_{[0,\pi]}$ on polku, joka yhdistää pisteet A ja $-A$.

Seuraus 7.15. Avaruudet $\mathbb{E}^1$ ja $\mathbb{E}^n$ eivät ole homeomorfisia, jos $n \geq 2$.

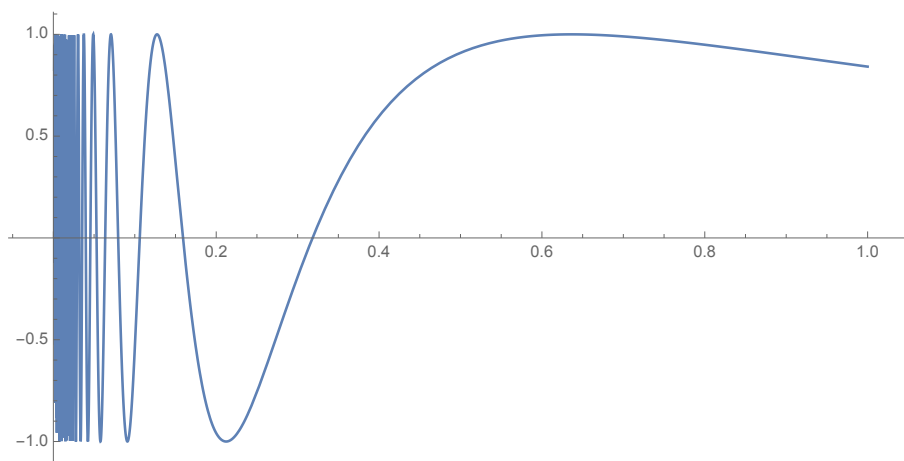
Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 7.16 (Topologin sinikäyrä). Joukko

$$S_0 = \left\{ \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) : t > 0 \right\}$$

on polkuyhtenäinen koska se on polkuyhtenäisen joukon $[0, \infty]$ kuva jatkuvalla kuvauksella $g: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{E}^2$, $g(t) = (t, \sin(\frac{1}{t}))$. **Topologin sinikäyrä** on joukko

$$S = S_0 \cup \{0\}.$$



Kuva 7.1: Topologin sinikäyrä

Proposition 7.5 nojalla topologin sinikäyrä on yhtenäinen, koska

$$S_0 \subset S \subset \overline{S_0} = S_0 \cup \left(\{0\} \times [-1, 1] \right).$$

Joukkoa $\overline{S_0}$ kutsutaan **suljetuksi topologin sinikäyräksi**. Harjoituksissa osoitetaan, että suljettu topologin sinikäyrä ei ole polkuyhtenäinen.

7.4 Relatiivitopologiaa

Metrisen avaruuden (X, d_X) osajoukko E on yhtenäinen täsmälleen silloin, kun metrisen avaruus (E, d_X) on yhtenäinen. Tämä johtuu seuraavasta havainnosta:

Propositio 7.17. *Olkoon (X, d_X) metrisen avaruus ja olkoon $E \subset X$ epätyhjä osajoukko. Joukko $U_E \subset E$ on avoin metrisessä avaruudessa (E, d_X) , jos ja vain jos on avoin joukko U metrisessä avaruudessa (X, d_X) , jolle $U_E = U \cap E$.*

Todistus. Todistuksen selventämiseksi käytämme merkintöjä

$$B_E(e, r) = \{x \in E : d_X(x, e) < r\}$$

ja

$$B_X(e, r) = \{x \in X : d_X(x, e) < r\}.$$

Olkoon U_E subset E avoin. Jokaisella $e \in U_E$ on siis $r_e > 0$, jolle $B_E(e, r_e) \subset U_E$. Metrisen avaruuden X osajoukko $U = \bigcup_{e \in E} B_X(e, r_e)$ on avoin ja sille pätee $U \cap E = U_E$.

Jos taas U on avoin avaruudessa (X, d_X) , niin jokaiselle $e \in E \cap U$ on $r_e > 0$, jolle $B_X(e, r_e) \subset U$. Koska $B_E(e, r_e) = B_X(e, r_e) \cap E$, saadaan $B_E(e, r_e) \subset U \cap E$ jokaisella $e \in U \cap E$, joten $U \cap E$ on avoin avaruudessa (E, d_X) . $\square$

Harjoitustehtäviä

7.1. Olkoon X metrisen avaruus. Olkoon $E \subset X$ yhtenäinen joukko ja olkoon $x \in \partial E$. Osoita, että $E \cup \{x\}$ on yhtenäinen.

7.2. Olkoon X metrisen avaruus. Olkoon $E \subset X$ yhtenäinen joukko ja olkoon $F \subset X$ joukko, jolle pätee $E \subset F \subset \overline{E}$. Osoita, että F on yhtenäinen.

7.3. Osoita, että maapallolla on vastakkaiset pisteet, joissa on sama lämpötila.¹

7.4. Osoita, että $\mathbb{E}^n - \{0\}$ on polkuyhtenäinen, jos $n \geq 2$.

7.5. Osoita, että avaruudet $\mathbb{E}^1$ ja $\mathbb{E}^n$ eivät ole homeomorfisia, jos $n \geq 2$.

7.6. Osoita, että suljettu topologin sinikäyrä ei ole polkuyhtenäinen.²

¹Ajatellaan, että lämpötila on jatkuva funktio $f: S(0, R) \rightarrow \mathbb{E}^1$. Tarkastele funktiota $g: S(0, R) \rightarrow \mathbb{E}^1$, $g(x) = f(x) - f(-x)$.

²Kysymystä voi lähestyä esimerkiksi näin: Olkoon $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ polku, jolle pätee $\gamma(0) = 0$ ja $\gamma(1) \neq 0$. Olkoon $p_1: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$ projektio ensimmäiselle koordinaatille. Kuvaus $p_1 \circ \gamma$ on polku. Voidaan olettaa, että $0 = \max\{t \in [0, 1] : p_1 \circ \gamma(t) = 0\}$. Mitä voit päätellä välien $[0, \delta]$ kuvajoukoista?

Osa II

Topologia

Luku 8

Topologiset avaruudet

Topologian kurssin ensimmäisessä luvussa määritellään topologiset avaruudet ja tutustutaan joihinkin esimerkkeihin. Määrittelemme topologisten avaruuksien tilanteessa monia metrisistä avaruuksista tuttuja käsitteitä ja niiden yhteydessä myös muutamia uusia hyödyllisiä käsitteitä kuten Hausdorffin avaruudet ja topologioiden vertailun.

8.1 Topologia, avoimet ja suljetut joukot

Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X potenssijoukon^a osajoukko τ on joukon X **topologia**, jos sillä on seuraavat kolme ominaisuutta

- (1) $\emptyset \in \tau$ ja $X \in \tau$.
- (2) Jos $U_1, U_2, \dots, U_N \in \tau$, niin $\bigcap_{k=1}^N U_k \in \tau$.
- (3) Jos $A \neq \emptyset$ ja $U_\alpha \in \tau$ kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Pari (X, τ) on **topologinen avaruus**. Joukon τ alkiot ovat topologisen avaruuden (X, τ) **avoimia joukkoja**. Joukko $F \subset X$ on **suljettu**, jos sen komplementti on avoin.

Jos $x \in U \in \tau$, niin U on pisteen x **(avoin) ympäristö**.

^aMääritelty Harjoitustehtävässä 1.4.

Esimerkki 8.1. Koko avaruus X ja tyhjä joukko $\emptyset$ ovat avoimia ja suljettuja joukkoja topologisessa avaruudessa X .

Esimerkki 8.2. Luvussa 4.1 määritelty metrisen avaruuden (X, d) topologia

$$\tau(X, d) = \{U \subset X : U \text{ on avoin}\}$$

on Proposition 2.6 nojalla topologia. Tätä topologiaa sanotaan **metriseksi topologiaksi**.

Topologinen avaruus. (X, τ) on **metristyvä**, jos joukolla X on metriikka d siten, että $\tau = \tau(d)$.

Metrisessä avaruudessa on jokin kiinnitetty metriikka. Metristyvän avaruuden topologia on jonkin metriikan määräämä mutta välttämättä ei ole selvää, onko jokin mahdollisista metriikoista erityisen merkittävä.

Esimerkki 8.3. Epätyhjän joukon $X \neq \emptyset$ **minitopologia** eli **karkea topologia** $\{\emptyset, X\}$ ja **diskreetti topologia** $\mathcal{P}(X)$ ovat selvästi topologioita. Kutsumme topologista avaruutta $(X, \{\emptyset, X\})$ **karkeaksi topologiseksi avaruudeksi** ja topologista avaruutta $(X, \mathcal{P}(X))$ **diskreetiksi topologiseksi avaruudeksi**. Diskreetissä topologisessa avaruudessa kaikki osajoukot ovat avoimia ja suljettuja.

Diskreetti topologia on diskreetin metrisen avaruuden (X, δ) metrinen topologia. Huomaamme luvussa 8.2, että karkea metrinen avaruus ei ole metristyvä, jos siinä on enemmän kuin yksi piste.

Esimerkki 8.4. Kokoelma $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ on topologia joukossa $\{0, 1\}$. Topologinen avaruus $(\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\})$ on **Sierpínskin topologinen avaruus**. Tässä topologisessa avaruudessa yhden pisteen joukko $\{1\}$ on suljettu joukko, joka ei ole avoin ja yhden pisteen joukko $\{0\}$ on avoin joukko, joka ei ole suljettu.

Esimerkki 8.5. Kolmen alkion joukolla $X = \{1, 2, 3\}$ on 29 topologiaa. Karkean topologian $\{\emptyset, X\}$ ja diskreetin topologian $\mathcal{P}(X)$ lisäksi esimerkiksi $\{\emptyset, \{1\}, X\}$ on topologia. Kaikki topologiat ovat joukon $\mathcal{P}(X)$ osajoukkoja. Joukossa $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ on 256 alkioita, joista siis vain pieni osa on topologioita.

Propositio 8.6. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $E \subset X$ epätyhjä osajoukko. Kokoelma

$$\tau|_E = \{U \cap E : U \in \tau\}$$

on joukon E topologia.

Todistus. Huomataan ensin, että $\emptyset = E \cap \emptyset \in \tau|_E$ koska $\emptyset \in \tau$ ja $E = E \cap X \in \tau|_E$ koska $X \in \tau$. Olkoot sitten $U_1, \dots, U_n \in \tau|_E$. Tällöin on $\tilde{U}_j \in \tau$, joille $U_j = E \cap \tilde{U}_j$ kaikille $1 \leq j \leq n$. Nyt

$$\bigcap_{j=1}^n U_j = \bigcap_{j=1}^n (\tilde{U}_j \cap E) = (\bigcap_{j=1}^n \tilde{U}_j) \cap E \in \tau|_E,$$

koska $\bigcap_{j=1}^n \tilde{U}_j \in \tau$. Vastaavasti, jos $U_\alpha \in \tau|_E$ kaikilla $\alpha \in A$, niin

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (\tilde{U}_\alpha \cap E) = (\bigcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha) \cap E \in \tau|_E,$$

koska $\bigcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha \in \tau$ □

Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $E \subset X$ epätyhjä osajoukko. Joukon E topologia $\tau|_E$ on topologisen avaruuden X määräämä joukon E **relatiivitopologia** eli **indusoitu topologia**.

Propositio 8.7. Olkoon X topologinen avaruus. Olkoon B indeksijoukko ja olkoot $F_\beta \subset X$ suljettuja osajoukkoja kaikilla $\beta \in B$. Tällöin

- (1) $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.
- (2) jos B on äärellinen, niin $\bigcup_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

Todistus. Kuten Propositio 2.6. Harjoitustehtävä. □

8.2 Hausdorffin avaruudet

Topologinen avaruus (X, τ) on **Hausdorffin avaruus**, jos kaikilla $x, y \in X$ on erilliset avoimet ympäristöt $U \ni x$ ja $V \ni y$. Tällöin τ on **Hausdorffin topologia** joukossa X .

Propositio 8.8. *Metrinen avaruus on Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoot $x, y \in X$, $x \neq y$. Tällöin $d(x, y) > 0$. Kolmioepäyhtälön avulla nähdään helposti, että $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$ ja $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$ ovat pisteiden x ja y erilliset ympäristöt. $\square$

Seuraus 8.9. *Metristyvä avaruus on Hausdorffin avaruus.* $\square$

Seurauksen 8.9 nojalla karkea metrinen avaruus ei ole metristyvä, jos siinä on enemmän kuin yksi piste.

Propositio 8.10. *Yhden pisteen muodostamat joukot ovat suljettuja Hausdorffin avaruudessa.*

Todistus. Olkoon X Hausdorffin avaruus ja olkoon $x \in X$. Jokaisella $y \in X - \{x\}$ on pisteen y avoin ympäristö U_y siten, että $x \notin U_y$. Siis

$$X - \{x\} = \bigcup_{y \in X - \{x\}} \{y\} = \bigcup_{y \in X - \{x\}} U_y$$

on avoin. $\square$

Esimerkki 8.11. Esimerkissä 8.4 tarkasteltu Sierpínskin avaruus ei ole Hausdorffin avaruus koska pisteen 1 ainoa ympäristö on koko avaruus $X = \{0, 1\}$.

Esimerkki 8.12. Olkoon 0^* piste, joka ei ole reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ alkio. Määritellään topologia τ joukossa $X = \mathbb{R} \cup \{0^*\}$ asettamalla

$$\tau = \tau(\mathbb{E}^1) \cup \left\{ \{0^*\} \cup (V - \{0\}) : V \in \tau(\mathbb{E}^1), 0 \in V \right\} \cup \left\{ \{0^*\} \cup V : V \in \tau(\mathbb{E}^1), 0 \notin V \right\}.$$

Pisteillä 0 ja 0^* ei ole erillisiä ympäristöjä topologisessa avaruudessa (X, τ) . Kaikki avaruuden (X, τ) yhden pisteen joukot ovat suljettuja. Siis Proposition 8.10 käänteinen väite ei päde.

8.3 Topologioiden vertailua

Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Jos $\tau_1 \subset \tau_2$, niin τ_1 on **karkeampi** topologia kuin τ_2 ja τ_2 on **hienompi** topologia kuin τ_1 .

Esimerkki 8.13. (1) Joukon X diskreetti topologia on hienoin topologia joukossa X .

(2) Joukon X karkea topologia on karkein topologia joukossa X .

(3) Joukon kaikkia topologioita ei voi yleensä verrata toisiinsa. Esimerkiksi joukon $\{0, 1\}$ topologioista $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ ja $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ eivät ole toistensa osajoukkoja.

Propositio 8.14. Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Olkoon τ_1 hienompi kuin τ_2 . Tällöin, jos (X, τ_2) on Hausdorffin avaruus, niin (X, τ_1) on Hausdorffin avaruus.

Todistus. Olkoot $x, y \in X$, $x \neq y$. Koska (X, τ_2) on Hausdorffin avaruus pisteillä x ja y on erilliset avoimet ympäristöt $U, V \in \tau_2$. Oletuksen mukaan $U, V \in \tau_1$, joten ne ovat pisteiden x ja y erilliset ympäristöt avaruudessa (X, τ_2) . Siis (X, τ_2) on Hausdorffin avaruus. $\square$

Esimerkki 8.15. Lauseke

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

määrittää normin avaruudessa $C^0([0, 1], \mathbb{E}^1)$. Olkoon d_1 normin $\|\cdot\|_1$ määräämä metriikka ja olkoon d_∞ normin $\|\cdot\|_\infty$ määräämä metriikka avaruudessa $C^0([0, 1], \mathbb{E}^1)$.¹

Lasku osoittaa, että

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$$

kaikille $f \in C^0([0, 1], \mathbb{E}^1)$. Siis $B_{d_\infty}(0, r) \subset B_{d_1}(0, r)$ ja normiavaruuden ominaisuuksien nojalla $B_{d_\infty}(g, r) \subset B_{d_1}(g, r)$ kaikilla $g \in C^0([0, 1], \mathbb{E}^1)$ ja $r > 0$. Tämän havainnon avulla osoitamme harjoitustehtävässä 8.7, että

$$\tau(C^0([0, 1], \mathbb{E}^1), d_1) \subset \tau(C^0([0, 1], \mathbb{E}^1), d_\infty).$$

Toisaalta avoin pallo $B_{d_\infty}(0, 1)$ ei ole avoin avaruudessa $(C^0([0, 1], \mathbb{E}^1), d_1)$ koska seuraava havainto osoittaa, että 0 ei ole joukon $B_{d_\infty}(0, 1)$ sisäpiste tässä avaruudessa: Olkoot $f_k \in C^0([0, 1], \mathbb{E}^1)$, $f_k(t) = t^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $\|f_k\|_1 = \frac{1}{k+1}$, joten suurilla indekseillä $f_k \in B_{d_1}(0, \epsilon)$ millä tahansa $\epsilon > 0$. Kuitenkin $\|f_k\|_\infty = 1$, joten $f_k \notin B_{d_\infty}(0, 1)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siis topologia $\tau(C^0([0, 1], \mathbb{E}^1), d_\infty)$ on aidosti hienompi kuin $\tau(C^0([0, 1], \mathbb{E}^1), d_1)$.

8.4 Jatkuvat kuvaukset

Määrittelemme topologisten avaruuksien välisten kuvausten jatkuvuuden siten, että metristen avaruuksien tapauksessa määritelmä on sama kuin luvussa 3.

Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia ja olkoon $x_0 \in X$. Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on **jatkuva pisteessä** x_0 , jos jokaiselle pisteen $f(x_0)$ ympäristölle $V \ni f(x_0)$ on pisteen x_0 ympäristö $U \ni x_0$ siten, että $f(U) \subset V$. Kuvaus f on **jatkuva**, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

Propositio 8.16. Metrysten avaruuksien välinen kuvaus $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ on jatkuva, jos ja vain jos $f: (X, \tau(X, d_X)) \rightarrow (Y, \tau(Y, d_Y))$ on jatkuva.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 8.17. Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia.

- (1) Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on avoin jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset Y$.

¹Katso luvut 1.2 ja 5.3

- (2) Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

Todistus. Harjoitustehtävä, kuten Lause 3.5. □

Esimerkki 8.18. Olkoon X diskreetti topologinen avaruus ja olkoon Y karkea topologinen avaruus. Olkoon Z topologinen avaruus. Tällöin kaikki funktiot $f: X \rightarrow Z$ ja $g: Z \rightarrow Y$ ovat jatkuvia.

Propositio 8.19. Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Identtinen kuvaus

$$\text{id}: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$$

on jatkuva, jos ja vain jos τ_1 on hienompi kuin τ_2 .

Todistus. Avoimen joukon $U \in \tau_2$ alkukuva identtisessä kuvauksessa on avoin, jos ja vain jos $U \in \tau_1$. □

Lemma 8.20. Olkoot X_1, X_2, X_3 topologisia avaruuksia. Jos $F: X_1 \rightarrow X_2$ ja $G: X_2 \rightarrow X_3$ ovat jatkuvia kuvauksia, niin $G \circ F$ on jatkuva kuvaus.

Todistus. Olkoon $W \subset X_3$ avoin joukko. Koska G on jatkuva, $G^{-1}(W) \subset X_2$ on avoin Lauseen 8.17 nojalla. Koska F on jatkuva, $(G \circ F)^{-1}(W) = F^{-1}(G^{-1}(W)) \subset X_1$ on avoin Lauseen 8.17 nojalla. Siis $G \circ F$ on jatkuva Lauseen 8.17 nojalla. □

Olkoot X_1 ja X_2 topologisia avaruuksia. Bijektio $F: X_1 \rightarrow X_2$ on **homeomorfismi**, jos F on jatkuva ja F^{-1} on jatkuva.

Propositio 8.21. Homeomorfismien yhdistetty kuvaus on homeomorfismi. Homeomorfismin käänteiskuvaus on homeomorfismi. Homeomorfismi kuvaa avoimet joukot avoimiksi ja suljetut joukot suljetuiksi.

Todistus. Kuten metrisille avaruuksille Luvussa 4.1. □

8.5 Jonot

Topologisen avaruuden suppenemiskäsite määritellään niin, että se antaa metrisen avaruuden metrisessä topologiassa saman käsitteen kuin luvussa 5 määritelty suppeneminen metrisessä avaruudessa.

Topologisen avaruuden (X, τ) jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ suppenee kohti pistettä $x_0 \in X$, jos jokaisella pisteen x_0 avoimella ympäristöllä $U \in \tau$ on $N_U \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in U$ kaikilla $k \geq N_U$. Jos jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, käytetään merkintää $x_n \rightarrow x$, kun $x \rightarrow \infty$.

Propositio 8.22. Olkoon (X, d) metrisen avaruus. Jono $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $a \in X$ metrisessä avaruudessa (X, d) , jos ja vain jos se suppenee kohti pistettä $a \in X$ topologisessa avaruudessa $(X, \tau(X, d))$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 8.23. (1) Esimerkissä 8.4 tarkastellussa Sierpínskin avaruudessa vakiojono 0 suppenee kohti pisteitä 0 ja 1. Topologisen avaruuden jono voi siis supeta kohti useampaa kuin yhtä raja-arvoa. Sen sijaan vakiojono 1 suppenee kohti pistettä 1 mutta ei kohti pistettä 0.

(2) Karkeassa topologisessa avaruudessa mikä tahansa jono suppenee kohti jokaista pistettä.

Propositio 8.24. Hausdorffin avaruudessa jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 8.25. Jatkuva kuvaus kuvaa suppenevat jonot suppeneviksi jonoiksi.

Todistus. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Olkoon $(x_k)_{k=1}^\infty$ jono, joka suppenee kohti pistettä x avaruudessa X . Olkoon $f: X \rightarrow Y$ jatkuva.

Olkoon U pisteen $f(x)$ ympäristö. Jatkuvuuden nojalla on pisteen x ympäristö V siten, että $f(V) \subset U$. Raja-arvon määritelmän nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in V$ kaikilla $k \geq N$. Siis kaikilla $k \geq N$ pätee $f(x_k) \in f(V) \subset U$, joten $f(x_k) \rightarrow f(x)$, kun $k \rightarrow \infty$. □

Harjoitustehtäviä

8.1. Anna esimerkkejä joukon $\{1, 2, 3\}$ topologioista, joissa on 4, 5 ja 6 avointa joukkoa.

8.2. Olkoot τ_j , $j \in J$ joukon $X \neq \emptyset$ topologioita. Osoita, että $\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$ on joukon X topologia.

8.3. Olkoon X joukko ja olkoon $p \in X$. Osoita, että kokoelma

$$\tau_p = \{E \in \mathcal{P}(X) : p \in E\} \cup \{\emptyset\}$$

on topologia. Onko se Hausdorffin topologia?

Topologia τ_p on joukon X **erityispistetopologia**, jonka **erityispiste** on p .

8.4. Olkoon X ääretön joukko. Osoita, että kokoelma

$$\tau_{\text{cof}} = \{U \subset X : \#(X - U) < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

on joukon X topologia. Onko se Hausdorffin topologia?

Topologia τ_{cof} on joukon X **äärellisen komplementin topologia** eli **kofiniitti topologia**.

8.5. Todista Propositio 8.7.

8.6. Osoita, että kaikki äärelliset Hausdorffin avaruudet ovat diskreettejä topologisia avaruuksia.

8.7. Osoita, että metrisen avaruuden $(C^0([0, 1], \mathbb{E}^1), d_1)$ avoimet joukot ovat avoimia metrisessä avaruudessa $(C^0([0, 1], \mathbb{E}^1), d_\infty)$.²

²Esimerkki 8.15.

8.8. Todista Propositio 8.16.

8.9. Osoita, että jatkuvien kuvausten yhdistetty kuvaus on jatkuva.

8.10. Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia. Osoita, että kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on avoin jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset Y$.

8.11. Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia. Osoita, että kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

8.12. Olkoon X topologinen avaruus, jossa on erityispistetopologia, jonka erityispiste on $p \in X$. Olkoon $x \in X$ ja määritellään kuvaus $\gamma_x: [0, 1] \rightarrow X$ asettamalla $\gamma_x(1) = x$ ja $\gamma(t) = p$, kun $t \in [0, 1[$. Osoita, että γ_x on jatkuva.

8.13. Osoita, että Hausdorffin avaruudessa jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.

Luku 9

Joukkojen topologisia ominaisuuksia

Tässä luvussa tarkastelemme ensin topologisten avaruuksien yhteydessä samoja käsitteitä kuin metristen avaruuksien kurssin luvussa 2.3. Huomaamme, että metrisen avaruuden joukon sulkeuman karakterisointi jonojen avulla ei yleisty kaikille topologisille avaruuksille. Luvun lopuksi tarkastelemme avointen tiheiden joukkojen leikkauksia ja todistamme version Bairen lauseesta.

9.1 Sisus, reuna ja sulkeuma

Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Olkoon $A \subset X$. Piste $a \in A$ on joukon A **sisäpiste**, jos on jokin pisteen a avoin ympäristö V , jolle $V \subset A$. Joukon A komplementin sisäpiste on joukon A **ulkopiste**. Jos $x \in X$ ei ole joukon A ulkopiste eikä sisäpiste, niin se on joukon A **reunapiste**. Joukon A

- sisäpisteiden joukko $(\text{int } A)_\tau = \text{int } A$ on joukon A **sisus**.
- ulkopisteiden joukkoa merkitään $(\text{ext } A)_\tau = \text{ext } A$.
- reunapisteiden joukko on $(\partial A)_\tau = \partial A$.

Propositio 9.1. *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Joukon A sisus ja ulkopisteiden joukko ovat avoimia ja sen reuna on suljettu. Lisäksi pätee*

$$X = \text{int } A \sqcup \partial A \sqcup \text{ext } A. \quad (9.1)$$

Todistus. Kuten Propositio 2.8. Harjoitustehtävä. □

Lemma 9.2. *Olkoon X topologinen avaruus. Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ reunapiste, jos ja vain jos jokaiselle pisteen x ympäristölle V pätee $V \cap A \neq \emptyset$ ja $V \cap (X - A) \neq \emptyset$.*

Todistus. Tämä on selvää määritelmistä. □

Olkoon X topologinen avaruus. Osajoukon $E \subset X$ **sulkeuma** on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon E :

$$(\overline{E})_\tau = \overline{E} = \bigcap_{\substack{F \supset E \\ F \text{ suljettu}}} F.$$

Esimerkki 9.3. (1) Olkoon X ääretön joukko. Kokoelma

$$\tau_{\text{cof}} = \{U \subset X : \#(X - U) < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

on joukon $X \neq \emptyset$ **kofiniitti topologia** eli **äärellisen komplementin topologia**.¹ Tässä topologiassa avaruuden X suljetut joukot ovat tyhjän joukon ja koko avaruuden lisäksi sen äärelliset osajoukot. Erityisesti siis jokaisen äärettömän osajoukon sulkeuma on koko avaruus.

Jos X on ääretön joukko, niin (X, τ_{cof}) ei ole Hausdorffin avaruus: Koska avoimen epätyhjän joukon komplementti on äärellinen, kahden avoimen epätyhjän joukon leikkaus ei ole tyhjä.

(2) Olkoon X ylinumeroituva joukko. Kokoelma

$$\{U \subset X : X - U \text{ on äärellinen tai numeroituva}\} \cup \{\emptyset\}$$

on joukon $X \neq \emptyset$ numeroituvan komplementin topologia. Tässä topologiassa avaruuden X suljetut joukot ovat tyhjän joukon ja koko avaruuden lisäksi sen äärelliset ja numeroituvat osajoukot. Erityisesti siis jokaisen ylinumeroituvan osajoukon sulkeuma on koko avaruus.

Propositio 9.4. *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Tällöin*

- (1) E on avoin, jos ja vain jos $E = \text{int } E$.
- (2) Joukko E on suljettu, jos ja vain jos $E = \overline{E}$.
- (3) $\overline{E} = E \cup \partial E = \text{int } E \cup \partial E$.
- (4) $\partial(X - E) = \partial E$.
- (5) $\partial E = \overline{E} \cap \overline{X - E}$
- (6) Jos $F \subset E$, niin $\text{int } F \subset \text{int } E$ ja $\overline{F} \subset \overline{E}$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 9.5. *Olko τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Olkoon τ_1 hienompi kuin τ_2 . Tällöin*

- (1) $(\text{int } A)_{\tau_2} \subset (\text{int } A)_{\tau_1}$
- (2) $(\overline{A})_{\tau_1} \subset (\overline{A})_{\tau_2}$

Todistus. (1) Olkoon $x \in (\text{int } A)_{\tau_2}$. Tällöin on pisteen x ympäristö $U \in \tau_2$, jolle pätee $x \in U \subset A$. Koska $\tau_2 \subset \tau_1$, pätee siis $U \in \tau_1$, joten $x \in (\text{int } A)_{\tau_1}$.

(2) Harjoitustehtävä. □

¹Katso Harjoitustehtävä 8.4.

Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ **kasautumispiste**, jos $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ jokaisella pisteen x ympäristöllä v . Jos pisteellä $\{x\}$ on ympäristö V siten, että $V \cap A = \{x\}$, niin x on joukon A **eristetty piste** tai **erakkopiste**. Joukko $E \subset X$ on **diskreetti**, jos kaikki pisteet $x \in E$ ovat erakkopisteitä.

Esimerkki 9.6. (1) Kaikkien diskreettien topologisten avaruuksien kaikki pisteet ovat eristettyjä. Ne ovat siis diskreettejä joukkoja yllä määritellyssä mielessä.

(2) Olkoon $p \in X$ ja varustetaan X **erityispistetopologialla**²

$$\tau_p = \{E \in \mathcal{P}(X) : p \in E\}$$

Tällöin p on eristetty piste koska $\{p\} \in \tau_p$. Jos taas $x \in X - \{p\}$ ja $U \in \tau_p$ on pisteen x ympäristö, niin $p \in U$, joten x ei ole eristetty.

Propositio 9.7. *Joukko E on suljettu,*

(1) *jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.*

(2) *jos ja vain jos se sisältää reunansa.*

Todistus. Ensimmäinen kohta todistetaan kuten Propositio 2.12 ja toinen seuraa Propositio 9.4. Harjoitustehtävä. $\square$

9.2 Sulkeuma ja jonot

Osa metrisen avaruuden osajoukon sulkeuman karakterisoinnista jonojen avulla³ yleistyy suoraviivaisesti topologisiin avaruuksiin.

Propositio 9.8. *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Jos $a_k \in E$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $x_k \rightarrow x$, kun $k \rightarrow \infty$, niin $x \in \overline{E}$.*

Todistus. Jos x on joukon E ulkopiste, sillä on ympäristö, joka ei leikkaa joukkoa E . Siis x ei ole joukon E minkään jonon raja-arvo. $\square$

Seuraava esimerkki osoittaa, että Propositiota 5.4 ei voi yleistää kaikille topologisille avaruuksille:

Esimerkki 9.9. Varustetaan $\mathbb{R}$ Esimerkissä 9.3(2) tarkastellulla numeroituvan komplementin topologialla. Tällöin joukon $]0, 1[$ sulkeuma on $\mathbb{R}$. Olkoon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono joukon $]0, 1[$ pisteitä. Joukko $U = \mathbb{R} - \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ on minkä tahansa pisteen $u \in U$ ympäristö. Siis mikään joukon $]0, 1[$ jonoista ei suppene mihinkään joukon $\mathbb{R} -]0, 1[$ pisteeseen.

Olkoon X topologinen avaruus. Kokoelma $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ pisteen $x \in X$ ympäristöjä on **ympäristökanta** pisteessä x , jos jokaisella pisteen x ympäristöllä U on $\alpha \in A$, jolle $V_\alpha \subset U$. Avaruus X on **N_1 -avaruus**, jos sen jokaisella pisteellä on numeroituva ympäristökanta.

Propositio 9.10. *Metristyvä topologinen avaruus on N_1 -avaruus.*

²Katso Harjoitustehtävä 8.3.

³Propositio 5.4

Todistus. Metrisessä avaruudessa kokoelma $\left(B(x, \frac{1}{n})\right)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on numeroituva ympäristökanta pisteessä x . $\square$

Lemma 9.11. Jos X on N_1 -avaruus, niin jokaisella pisteellä $x \in X$ on numeroituva ympäristökanta $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$, jolle $V_{k+1} \subset V_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Todistus. Olkoon $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ympäristökanta pisteessä $x \in X$. Määritellään $V_k = \bigcap_{j=0}^k U_k$. Tällöin joukot V_k ovat avoimia ja pätee $V_{k+1} \subset V_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi $V_k \subset U_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on haluttu ympäristökanta. $\square$

Propositio 9.12. Olkoon X topologinen avaruus, olkoon $x \in X$ ja olkoon $(V_\alpha)_{\alpha \in J}$ ympäristökanta pisteessä x . Jono $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, jos ja vain jos jokaisella V_α on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in V_\alpha$ kaikilla $k \geq N$.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Propositio 9.13. Olkoon X N_1 -avaruus. Olkoon $E \subset X$. Tällöin $\overline{E}$ koostuu kaikista joukon E alkioista muodostettujen avaruuden X suppenevien jonojen raja-arvoista.

Todistus. Proposition 9.8 nojalla riittää osoittaa, että jokainen reunapiste on jonkin joukon E alkioista koostuvan jonon raja-arvo. Olkoon $x_0 \in \partial E$. Lemman 9.11 nojalla pisteellä x_0 on numeroituva sisäkkäinen ympäristökanta $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Valitaan jokaisella $k \in \mathbb{N}$ alkio $e_k \in V_k \cap E \neq \emptyset$. Tällöin jono $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee pisteeseen x_0 Proposition 9.12 nojalla. $\square$

Esimerkki 9.14. (1) Esimerkin 9.9 ja Proposition 9.13 nojalla nähdään, että numeroituvan komplementin topologialla varustettu ylinumeroituva joukko ei ole N_1 -avaruus.

(2) On topologisia avaruuksia, jotka eivät ole N_1 -avaruuksia mutta joissa jokaisen osajoukon E sulkeuma koostuu joukon E alkioista muodostettujen jonojen raja-arvoista. Esimerkissä 11.14(2) esiteltävä ääretön ympyräkimppu on esimerkki tällaisesta avaruudesta.

9.3 Tiheät joukot ja separoituvuus

Topologisen avaruuden X osajoukko E on **tiheä**, jos $\overline{E} = X$. Topologinen avaruus X on **separoituva**, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Lemma 9.15. Topologisen avaruuden X osajoukko Q on tiheä, jos ja vain jos $Q \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $V \neq \emptyset$.

Todistus. Oletetaan, että $Q \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $V \neq \emptyset$. Siis jokaisen pisteen $x \in X$ jokainen ympäristö leikkaa joukkoa Q , joten $x \in \overline{Q}$.

Oletetaan sitten, että $\overline{Q} = X$. Jos $V \neq \emptyset$ on avoin, niin se on jokaisen pisteensä avoin ympäristö. Oletuksen nojalla $V \cap Q \neq \emptyset$. $\square$

Lemma 9.16. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon $h: X \rightarrow Y$ homeomorfismi. Osajoukko Q on tiheä avaruudessa X , jos ja vain jos $h(Q)$ on tiheä avaruudessa Y .

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Esimerkki 9.17. (1) Karkea topologinen avaruus on separoituva koska minkä tahansa epätyhjän joukon sulkeuma on koko avaruus.

(2) Olkoon X ylinumeroituva joukko ja olkoon $p \in X$. Joukon $\{p\}$ sulkeuma topologisessa avaruudessa (X, τ_p) on X , joten X on separoituva. Joukon $X - \{p\}$ relatiivitopologia $\tau_p|_{X-\{p\}}$ on diskreetti topologia. Koska X on ylinumeroituva, myös $X - \{p\}$ on ylinumeroituva, joten $(X - \{p\}, \tau_p|_{X-\{p\}})$ ei ole separoituva.

Propositio 9.18. *Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Olkoon τ_1 hienompi kuin τ_2 . Tällöin, jos (X, τ_1) on separoituva, niin (X, τ_2) on separoituva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

9.4 Bairen avaruudet

Topologinen avaruus on **Bairen avaruus**, jos sen tiheiden avoimien joukkojen numeroituvat leikkaukset ovat tiheitä. Topologisen avaruuden osajoukko on **harva**^a, jos sen sulkeumalla ei ole sisäpisteitä.

^anowhere dense

Topologinen avaruus on **ensimmäisen kategorian avaruus**, jos se voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä harvoista joukoista.^a Muuten se on **toisen kategorian avaruus**.

^aEttä sanastoa saadaan varmasti riittävä määrä, ensimmäisen kategorian joukkoja sanotaan myös **laihoiksi** (**meagre**) joukoiksi.

Propositio 9.19. *Topologinen avaruus on Bairen avaruus, jos ja vain jos sen suljettujen harvojen joukkojen numeroituvilla yhdisteillä ei ole sisäpisteitä.*

Todistus. Huomataan ensin, että joukko on avoin ja tiheä, jos ja vain jos sen komplementti on suljettu joukko, jolla ei ole sisäpisteitä, siis suljettu harva joukko.

Oletetaan ensin, että X on Bairen avaruus. Olkoot F_k harvoja suljettuja joukkoja. Olkoot $U_k = X - F_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tällöin siis joukot U_k ovat avoimia tiheitä joukkoja. Joukoille F_k ja U_k pätee

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = X - \bigcup_{k=1}^{\infty} (X - U_k) = X - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Koska X on Bairen avaruus, $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ on tiheä. Jos joukolla $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ olisi sisäpiste, niin olisi epätyhjä avoin joukko $V \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Tällöin siis $V \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \emptyset$, joten Lemman 9.15 nojalla $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ ei olisi tiheä.

Oletetaan sitten, että avaruuden X harvojen suljettujen joukkojen numeroituvilla yhdisteillä ei ole sisäpisteitä. Olkoot U_k avoimia tiheitä joukkoja. Olkoot $F_k = X - U_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tällöin siis joukot F_k ovat suljettuja harvoja joukkoja. Olkoon $V \subset X$ avoin epätyhjä joukko. Oletuksen mukaan joukolla $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ ei ole sisäpisteitä, joten

$$V \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \right) = V \cap \left(X - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) \neq \emptyset.$$

Siis Lemman 9.15 nojalla $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ on tiheä. Koska tämä pätee kaikille avointen tiheiden joukkojen kokoelmille, X on Bairen avaruus. □

Seuraus 9.20. *Topologinen avaruus on Bairen avaruus, jos ja vain jos se on toisen kategorian avaruus.* $\square$

Lause 9.21 (Bairen lause). *Täydellinen metrinen avaruus on Bairen avaruus.*

Todistus. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoot $U_i \subset X$, $i \in \mathbb{N}$ avoimia tiheitä joukkoja. Olkoon siis V avoin joukko. Osoitamme, että $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i \cap V \neq \emptyset$, jolloin $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ on tiheä Lemman 9.15 nojalla.

Avoin joukko U_0 on tiheä, joten $V \cap U_0$ on avoin epätyhjä joukko. Siis on $x_0 \in V \cap U_0$ ja $r_0 > 0$, joille $\overline{B}(x_0, r_0) \subset V \cap U_0$. Avoin joukko U_1 on tiheä, joten $B(x_0, r_0) \cap U_1$ on avoin epätyhjä joukko. Siis on $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_1$ ja $0 < r_1 \leq 1$, joille $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_1$. Jatkamalla näin saadaan jono pisteitä $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ja säteitä $0 < r_k \leq \frac{1}{k}$, kun $k \geq 1$, joille pätee

$$\overline{B}(x_{k+1}, r_{k+1}) \subset B(x_k, r_k) \subset V$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Koska X on täydellinen metrinen avaruus, Cantorin leikkauslauseen 5.22 nojalla

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{B}(x_{k+1}, r_{k+1}) = \{x\}$$

jollain $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i \cap V \neq \emptyset$. Tämä todistaa väitteen. $\square$

Bairen lausetta käytetään esimerkiksi funktionaalianalyysissä tärkeän Banachin ja Steinhausin lauseen eli tasaisen rajoittuneisuuden periaatteen todistuksessa.

Seuraus 9.22. *Täydellinen metrinen avaruus, jolla ei ole eristettyjä pisteitä, on ylinumeroituva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Seuraus 9.23. $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

Todistus. $\mathbb{E}^1 = (\mathbb{R}, d_{\mathbb{E}})$ on täydellinen metrinen avaruus. Jokaisella $x \in \mathbb{E}^1$ myös $x + \frac{1}{k} \in \mathbb{E}^1$, joten avaruudessa ei ole eristettyjä pisteitä. Väite seuraa Seurauksesta 9.22. $\square$

Seuraus 9.24. *Olkoon (X, τ) metristyvä topologinen avaruus siten, että avaruudessa X on metriikka d , jolle (X, d) on täydellinen metrinen avaruus. Tällöin (X, τ) on Bairen avaruus.* $\square$

Ominaisuus P on voimassa **Bairen kategorian mielessä melkein kaikkialla** Bairen avaruudessa X , jos joukko $\{x \in X : \neg P(x)\}$ on ensimmäisen kategorian joukko.^a

^a $\neg$ on loogisen negaation symboli.

Esimerkki 9.25. Olkoon

$$\mathcal{D} = \{f \in C^0([0, 1]) : f \text{ on derivoituva jossain } x \in]0, 1[\}.$$

Ei ole kovin vaikea osoittaa, että joukko $\mathcal{D}$ on ensimmäisen kategorian joukko täydellisessä metrisessä avaruudessa $C^0([0, 1])$. Siis Bairen kategorian mielessä melkein kaikki funktiot ovat missään derivoitumattomia. Yksityiskohdat esitetään esimerkiksi lähteissä [BBT] ja [TBB].

Harjoitustehtäviä

9.1. Olkoon X topologinen avaruus, jonka kaikki yhden pisteen joukot ovat suljettuja. Osoita, että jokaiselle $x \in X$ pätee

$$\{x\} = \bigcap_{x \in V \in \tau} V.$$

9.2. Olkoon X topologinen avaruus, jonka jokaiselle pisteelle $x \in X$ pätee

$$\{x\} = \bigcap_{x \in V \in \tau} V.$$

Osoita, että kaikki avaruuden X yhden pisteen joukot ovat suljettuja.

9.3. Todista Proposition 9.5 kohta (2).

9.4. Todista Propositio 9.12.

9.5. Todista Propositio 9.16.

9.6. Todista Propositio 9.18.

9.7. Olkoon $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$ jatkuva surjektio. Osoita, että on $r > 0$ siten, että joukolla $F(B(0, r))$ on sisäpisteitä.⁴

9.8. Todista Seuraus 9.22.

⁴Sovella Bairen lausetta.

Luku 10

Kompaktit avaruudet

Tässä luvussa tarkastelemme kompaktiutta yleisessä topologisessa avaruudessa. Huomaamme, että osa luvussa 6 todistetuista metrisen avaruuden kompaktien osajoukkojen ominaisuuksista ei yleisty kaikille topologisille avaruuksille. Luvussa 10.2 huomaamme, että Hausdorffin avaruuksissa tilanne muistuttaa enemmän metristen avaruuksien tapaus-
ta. Luvussa 10.3 todistamme metrisen version Arzelà ja Ascolin lauseesta ja viimeisessä luvussa tarkastelemme lyhyesti topologisen avaruuden yhden pisteen kompaktointia.

10.1 Kompaktit joukot

Topologisen avaruuden X osajoukko A on **kompakti**, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.^a

^aJoskus, esimerkiksi kirjassa [Bou], kompaktiuden määritelmässä vaaditaan, että topologinen avaruus on Hausdorffin avaruus. Syitä tähän valintaan avataan Esimerkeissä 10.10 ja 10.9. Tällä kurssilla käsittelemme yleisempää kompaktiuden määritelmää ja lisäämme Hausdorff-oletuksen tarpeen mukaan.

Esimerkki 10.1. Esimerkissä 6.2 havaitsimme, että metrinen avaruus $\mathbb{E}^1$ ei ole kompakti. Varustetaan **laajennettu reaaliakseli**

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

luonnollisella topologialla τ , jonka avoimia joukkoja ovat

- (1) kaikki joukot $U \in \tau(\mathbb{E}^1)$,
- (2) sellaiset muotoa $\{-\infty\} \cup U$ olevat joukot, joille $U \in \tau(\mathbb{E}^1)$ ja joille $]-\infty, a[\subset U$ jollain $a \in \mathbb{R}$
- (3) sellaiset muotoa $U \cup \{+\infty\}$ olevat joukot, joille $U \in \tau(\mathbb{E}^1)$ ja joille $]b, +\infty[\subset U$ jollain $b \in \mathbb{R}$.
- (4) kohtien (2) ja (3) joukkojen yhdisteet.

Laajennettu reaaliakseli on kompakti topologinen avaruus. Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ laajennetun reaaliakselin avoin peite. On siis $\alpha_{\pm\infty} \in J$, joille $\pm\infty \in U_{\alpha_{\pm\infty}}$. Luonnollisen topologian määritelmän mukaan on $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $\{-\infty\} \cup]-\infty, a[\subset U_{\alpha_{-\infty}}$ ja $]b, +\infty[\subset U_{\alpha_{+\infty}}$. Jos $a > b$, niin avoimet joukot $\pm\infty \in U_{\alpha_{\pm\infty}}$ muodostavat äärellisen osapeitteen. Muussa tapauksessa joukkojen $\pm\infty \in U_{\alpha_{\pm\infty}}$ yhdisteen komplementti $[a, b]$ on kompakti, joten on äärellinen $J_0 \subset J$, jolle $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in J_0} U_\alpha$. Äärellinen kokoelma $(U_\alpha)_{\alpha \in J_0 \cup \{\alpha_{\pm\infty}\}}$ on siis koko laajennetun reaaliakselin peite.

Topologisella avaruudella X on ÄÄRELLISTEN LEIKKAUSTEN OMINAISUUS, jos kaikilla avaruuden X suljettujen osajoukkojen kokoelmilla $(F_\alpha)_{\alpha \in J}$, joille pätee $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = \emptyset$ on äärellinen $J_0 \subset J$, jolle $\bigcap_{\alpha \in J_0} F_\alpha = \emptyset$.

Propositio 10.2. *Topologinen avaruus on kompakti, jos ja vain jos sillä on äärellisten leikkausten ominaisuus.*

Todistus. Olkoon K kompakti avaruus ja olkoon $(F_\alpha)_{\alpha \in J}$ perhe avaruuden K suljettuja joukkoja, jolle pätee $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = \emptyset$. Tällöin perhe $(K - F_\alpha)_{\alpha \in J}$ on joukon K peite. Oletuksen nojalla indeksijoukolla J on äärellinen osajoukko J_0 , jolle pätee $\bigcup_{j \in J_0} (K - F_\alpha) = K$. Siispä $\bigcap_{\alpha \in J_0} F_\alpha = \emptyset$, joten avaruudella K on äärellisten leikkausten ominaisuus. $\square$

Propositio 10.3. *Metrinen avaruus (X, d) on kompakti, jos ja vain jos topologinen avaruus $(X, \tau(X, d))$ on kompakti*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Propositio 10.4. *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Joukko $E \subset X$ on kompakti, jos ja vain jos topologinen avaruus $(E, \tau|_E)$ on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Propositio 10.5. *Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Täsmälleen kuten Propositio 6.12 $\square$

Seuraus 10.6 (Weierstrassin lause). *Olkoon X topologinen avaruus. Olkoon $K \subset X$ kompakti ja olkoon $f: X \rightarrow \mathbb{E}^1$ jatkuva. Tällöin on $x_0, y_0 \in K$, joille pätee*

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

ja

$$f(y_0) = \min\{f(x) : x \in K\}.$$

Todistus. Kuten Lause 6.21. $\square$

Kompaktius on topologinen ominaisuus:

Propositio 10.7. *Olko X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon $h: X \rightarrow Y$ homeomorfismi. Tällöin X on kompakti, jos ja vain jos Y on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Osa metristen avaruuksien Propositioista 6.5 yleistyy suoraan topologisten avaruuksien tilanteeseen.

Propositio 10.8. *Olkoon X topologinen avaruus.*

- (1) *Jos X on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin E on kompakti.*
- (2) *Jos $E_1, E_2, \dots, E_n \subset X$ ovat kompakteja, niin $\bigcup_{k=1}^n E_k$ on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraavat esimerkit osoittavat, että Proposition 6.5 kaksi muuta väitettä eivät päde yleisesti topologisissa avaruuksissa: Topologisen avaruuden kompakti joukko ei välttämättä ole suljettu ja kompaktien joukkojen leikkaus ei välttämättä ole kompakti.

Esimerkki 10.9. Olkoon X ääretön joukko ja olkoon $p \in X$. Joukko $\{p\}$ on kompakti topologisessa avaruudessa (X, τ_p) , missä τ_p on Esimerkissä 9.17 käsitelty erityispistetopologia. Joukko $\{p\}$ ei ole suljettu vaan $\overline{\{p\}} = X$. Koko avaruus X ei ole kompakti koska sen peitteellä $\tau_p - \{\emptyset\}$ ei ole äärellistä osapeitettä.

Esimerkki 10.10. Proposition 10.4 nojalla joukot $I = [-1, 1]$ ja

$$I^* = ([-1, 1] - \{0\}) \cup \{0^*\}$$

ovat kompakteja Esimerkin 8.12 avaruudessa $\mathbb{R} \cup \{0^*\}$. Niiden leikkaus $[-1, 1] - \{0\}$ ei ole kompakti. Palaamme tähän esimerkkiin vielä Esimerkissä 11.18.

Propositio 10.11. *Kompaktin topologisen avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste.*

Todistus. Kuten Propositio 6.7. Harjoitustehtävä. □

10.2 Kompaktit Hausdorffin avaruudet

Propositio 10.12. *Hausdorffin avaruuden kompaktit osajoukot ovat suljettuja.*

Todistus. Olkoon K kompakti joukko ja olkoon $x \in X - K$. Koska X on Hausdorffin avaruus on jokaisella $k \in K$ ja pisteellä x erilliset ympäristöt $U_k \ni k$ ja $V_k \ni x$. Koska K on kompakti, on äärellinen osajoukko K_0 , jolle pätee $K \subset \bigcup_{k \in K_0} U_k$. Joukko $V = \bigcap_{k \in K_0} V_k$ on pisteen x avoin ympäristö, jolle pätee $V \cap U_k = \emptyset$ kaikilla $k \in K_0$, joten $V \cap K = \emptyset$. Siis K on avoin. □

Propositio 10.13. *Olkoon X Hausdorffin avaruus. Jos $A \neq \emptyset$ ja joukot $E_\alpha \subset X$ ovat kompakteja kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on kompakti joukko.*

Todistus. Joukko $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on Proposition 10.12 nojalla suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu Proposition 8.7 nojalla. Olkoon $\alpha_0 \in A$. Joukko $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on kompaktin joukon E_{α_0} suljettuna osajoukkona kompakti Proposition 10.8(1) nojalla. □

Lause 10.14. *Olkoon K kompakti topologinen avaruus ja olkoon Y Hausdorffin avaruus. Jos $f: K \rightarrow Y$ on jatkuva bijektio, niin f on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon $E \subset K$ suljettu. Proposition 10.8(1) nojalla E on kompakti. Proposition 10.5 nojalla $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ on kompakti ja siis Proposition 10.12 nojalla se on suljettu koska Y on Hausdorffin avaruus. Lauseen 8.17(2) nojalla f^{-1} on jatkuva. $\square$

Olkoon X topologinen avaruus. Joukon $E \subset X$ **ympäristö** on avoin joukko $U \subset X$, jolle pätee $E \subset U$.

Esimerkki 10.15. (1) Topologinen avaruus X on jokaisen osajoukkonsa ympäristö.
 (2) Jos (X, d) on metrinen avaruus, niin $\bigcup_{x \in E} B(x, r)$ on joukon E ympäristö kaikilla $r > 0$.
 (3) Jos X on Hausdorffin avaruus, $E \subset X$ ja $x \in X - E$, niin $X - \{x\}$ on joukon E ympäristö.

Propositio 10.16. *Olkoon X Hausdorffin avaruus. Tällöin*

- (1) *Jos $E \subset X$ on kompakti ja $x \notin E$, niin joukolla E ja pisteellä x on erilliset ympäristöt.*
- (2) *Jos $E, F \subset X$ ovat kompakteja erillisiä joukkoja, niin niillä on erilliset ympäristöt.*

Todistus. (1) Proposition 10.12 todistuksesta seuraa, että jokaisella $a \notin E$ ja joukolla E on erilliset ympäristöt.

(2) Harjoitustehtävä. $\square$

10.3 Kompaktius ja jonokompaktius

Topologisen avaruuden X osajoukko A on **jonokompakti**, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat joukkoon A on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä.

Metrisessä avaruudessa kompaktius ja jonokompaktius ovat ekvivalentteja käsitteitä Lauseen 6.10 nojalla. Topologisissa avaruuksissa tilanne on monimutkaisempi. Luvussa 13 näemme, että kompakti Hausdorffin avaruus ei ole välttämättä jonokompakti. Esimerkki tällaisesta avaruudesta on tuloavaruus $[0, 1]^{[0, 1]}$. On myös esimerkkejä jonokompakteista Hausdorffin avaruuksista, jotka eivät ole kompakteja. Näiden esimerkkien käsitteleminen vaatii hieman edistyneempiä menetelmiä.

Todistamme seuraavaksi metrisen version tärkeästä Arzelà ja Ascolin lauseesta. Lausetta 10.18 käytetään funktionaalianalyysin kurssilla kompaktien operaattorien yhteydessä.

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Perhe $F \subset \mathcal{F}(X, Y)$ on **yhtäjatkuva**,^a jos jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$, jolle $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ kaikille $f \in F$, kun $d_X(x, y) < \delta$.

^aenglanniksi equicontinuous

Esimerkki 10.17. Jos (X, d_X) ja (Y, d_Y) ovat metrisiä avaruuksia, niin M -Lipschitz-kuvausten perhe

$$\text{Lip}_M(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y : d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq M d_X(x_1, x_2) \text{ kaikilla } x_1, x_2 \in X\}$$

on yhtäjatkuva: ehdosta $d_X(x_1, x_2) < \frac{\epsilon}{M}$ seuraa $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ kaikille kuvauksille $f \in \text{Lip}_M(X, Y)$ kaikille $x_1, x_2 \in X$.

Lause 10.18 (Arzelà ja Ascolin lause). *Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Olkoon $F \subset C^0(X, \mathbb{E}^1)$ epättyhjä osajoukko, joka on rajoitettu, yhtäjatkuva ja suljettu. Tällöin F on kompakti.*

Todistus. Kompakti metrinen avaruus on separoituva Lauseen 6.6 nojalla, joten olkoon $Q = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ avaruuden X tiheä numeroituva osajoukko. Olkoon $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono joukossa F . Koska F on rajoitettu, jono $(f_k(x_1))_{k \in \mathbb{N}}$ on rajoitettu ja sillä on siis suppeneva osajono $(f_{1j}(x_1))_{k \in \mathbb{N}}$. Samoin jono $(f_{1j}(x_2))_{k \in \mathbb{N}}$ on rajoitettu, joten sillä on suppeneva osajono $(f_{2j}(x_2))_{k \in \mathbb{N}}$ ja niin edelleen. Olkoon $g_j = f_{jj}$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Konstruktion nojalla $(g_j(x_k))_{j \in \mathbb{N}}$ suppenee jokaisella k .

Osoitamme, että g_j on Cauchyn jono avaruudessa $C^0(X, \mathbb{E}^1)$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ kaikille $f \in F$, kun $d(x, y) < \delta$. Koska X on kompakti, on joukon X äärellinen osajoukko $a_1, \dots, a_N$ siten, että

$$X = \bigcup_{j=1}^N B\left(a_j, \frac{\delta}{2}\right).$$

Valitaan jokaisessa pallossa $B(a_j, \frac{\delta}{2})$ piste $x_{k_j} \in Q$. Olkoon $M > 0$ siten, että kaikille $n, m \geq M$ pätee $|g_n(x_{k_j}) - g_m(x_{k_j})| < \epsilon$ kaikilla $1 \leq j \leq N$.

Jokaiselle $x \in X$ on $1 \leq j(x) \leq N$, jolle $x \in (a_{j(x)}, \frac{\delta}{2})$. Siis $d(x, x_{k_{j(x)}}) < \delta$. Kolmioepäyhtälö antaa

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &= |g_n(x) - g_n(x_{k_{j(x)}}) + g_n(x_{k_{j(x)}}) - g_m(x_{k_{j(x)}}) + g_m(x_{k_{j(x)}}) - g_m(x)| \\ &\leq |g_n(x) - g_n(x_{k_{j(x)}})| + |g_n(x_{k_{j(x)}}) - g_m(x_{k_{j(x)}})| + |g_m(x_{k_{j(x)}}) - g_m(x)| \\ &< 3\epsilon \end{aligned}$$

kaikilla $x \in X$, kun $n, m \geq M$. Siis jono $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Proposition 5.17 nojalla $C^0(X, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen metrinen avaruus ja Lemman 5.16 nojalla F on täydellinen metrinen avaruus. Siis Cauchyn jono $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee avaruudessa F , joten jonolla $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on suppeneva osajono. Siis F on jonokompakti ja Lauseen 6.10 nojalla se on kompakti. $\square$

10.4 Yhden pisteen kompaktointi

Kompaktiudesta on monia hyödyllisiä seurauksia, joten joissain tilanteissa voi olla hyödyllistä upottaa metrinen tai topologinen avaruus X johonkin kompaktiin topologiseen avaruuteen Y siten, että X ja sen kuva avaruudessa Y varustettuna relatiivitopologialla ovat homeomorfisia. Esimerkissä 10.1 kompaktoimme avaruuden $\mathbb{E}^1$ lisäämällä siihen pisteet $-\infty$ ja $+\infty$. Tässä luvussa tarkastelemme kompaktointia, jossa avaruuteen lisätään yksi piste.

Lemma 10.19. *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus, joka ei ole kompakti, ja olkoon ∞ piste, joka ei ole avaruudessa X . Olkoon $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ ja olkoon*

$$\tau_\infty = \{U \subset \widehat{X} : \infty \in U \text{ ja } \widehat{X} - U \subset X \text{ on kompakti ja suljettu}\}.$$

Tällöin $\widehat{\tau} = \tau \cup \tau_\infty$ on topologia joukossa $\widehat{X}$.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Topologinen avaruus $\widehat{X}$ on topologisen avaruuden X yhden pisteen kompaktointi eli **Aleksandroffin kompaktointi**.

Seuraava tulos antaa perusteen avaruuden $\widehat{X}$ nimelle.

Lause 10.20. *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus, joka ei ole kompakti. Avaruuden X yhden pisteen kompaktointi $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ on kompakti ja $(\widehat{X})_{\widehat{\tau}} = \widehat{X}$. Avaruuden $\widehat{X}$ topologian relatiivitopologia joukossa X on τ .*

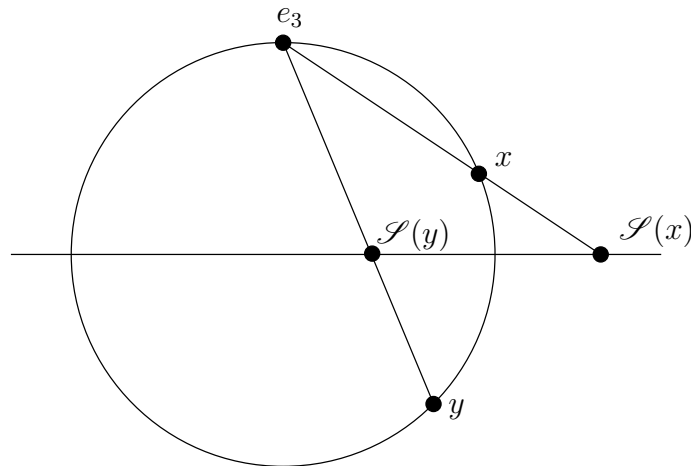
Todistus. Avaruus $\widehat{X}$ osoitetaan kompaktiksi samaan tapaan kuin $\overline{\mathbb{R}}$ osoitettiin kompaktiksi: Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ avaruuden $\widehat{X}$ avoin peite. On siis $\alpha_\infty \in J$, jolle $\infty \in U_{\alpha_\infty}$. Joukon U_{α_∞} komplementti on kompakti avaruudessa X ja joukot U_α ovat avoimia. Siis on äärellinen J_0 siten, että $\widehat{X} - U_{\alpha_\infty} \subset \bigcup_{\alpha \in J_0} U_\alpha$. Äärellinen kokoelma $(U_\alpha)_{\alpha \in J_0 \cup \{\alpha_\infty\}}$ on siis avaruuden $\widehat{X}$ peite.

Avaruuden $\widehat{X}$ osajoukko X on tiheä koska topologian määritelmän mukaan pisteen ∞ jokainen ympäristä leikkaa joukkoa X . Lisäksi jokainen pisteen ∞ ympäristö leikkaa joukkoa X avoimessa joukossa $U \subset \tau$. $\square$

Esimerkki 10.21. **Stereograafinen projektio** $\mathcal{S}: \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \rightarrow \mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^2 \times \{0\}$ pohjoisnavalta päiväntasaajan tasolle on kuvaus, joka määritellään asettamalla kaikille $x \in \mathbb{S}^2 - \{e_3\}$

$$\mathcal{S}(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right).$$

Kuvaus $\mathcal{S}$ on homeomorfismi, joka liittää jokaiseen pisteeseen $x \in \mathbb{S}^2 - \{e_3\}$ sen yksikäsitteisen pisteen tasossa $\mathbb{E}^2$ (ajateltuna hypertasona $\mathbb{E}^2 \times \{0\}$ avaruudessa $\mathbb{E}^3$), joka on pisteiden e_3 ja x kautta kulkevalla suoralla.



Euklidisen tason $\mathbb{E}^2$ yhden pisteen kompaktoinnissa $\widehat{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$ äärettömyyspisteen ympäristöt ovat kompaktien joukkojen komplementtien yhdisteet äärettömyyspisteen kanssa. Tason $\mathbb{E}^2$ kompaktit joukot ovat suljettuja ja rajoitettuja. Siis joukot $\widehat{\mathbb{E}^2} - \overline{B}(0, R)$ muodostavat ympäristökannan pisteessä ∞ . Joukot $\mathcal{S}^{-1}(\mathbb{E}^2 - K) \cup \{e_3\}$ ovat pisteen e_3 ympäristöt, kun $K \subset \mathbb{E}^2$ käy läpi kaikki tason $\mathbb{E}^2$ kompaktit joukot. Sis määrittelemällä $\mathcal{S}(e_3) = \infty$ saadaan homeomorfismi $\mathcal{S}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{E}^2}$.

Euklidisen tason yhden pisteen kompaktointi on tärkeä esimerkiksi kompleksianalyysissä, jossa se esiintyy **Riemannin pallona** $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Harjoitustehtäviä

10.1. Olkoon X joukko ja olkoon $p \in X$. Osoita, että kokoelma

$$\tau = \{U \subset X : p \notin U\} \cup \{X\}$$

on topologia. Osoita, että (X, τ) on kompakti.

10.2. Osoita, että laajennettu reaaliakseli $\overline{\mathbb{R}}$ ja metristä avaruutta $([-1, 1], d_{\mathbb{E}})$ vastaava topologinen avaruus ovat homeomorfisia.¹

10.3. Osoita, että $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ on kompakti avaruudessa $\overline{\mathbb{R}}$.

Reaalilukujono $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **kasvaa rajatta**, jos jokaisella $M \in \mathbb{R}$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k > M$ kaikilla $k \geq N$.

10.4. Osoita, että reaalilukujono kasvaa rajatta, jos ja vain jos se suppenee pisteeseen $+\infty$ topologisessa avaruudessa $\overline{\mathbb{R}}$.

10.5. Olkoon

$$\tau^* = \{\mathbb{R} - K \subset \mathbb{R} : K \text{ on kompakti avaruudessa } \mathbb{E}^1\} \cup \{\emptyset\}.$$

Osoita, että τ^* on topologia joukossa $\mathbb{R}$. Osoita, että $(\mathbb{R}, \tau^*)$ on kompakti.

Harjoitustehtävässä 10.5 määritelty topologia τ^* on reaalilukujen joukon **kompaktin komplementin topologia**.

10.6. Olkoon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono topologisessa avaruudessa X . Oletetaan, että $x_k \rightarrow x_\infty$, kun $k \rightarrow \infty$. Osoita, että joukko $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\}$ on kompakti.

10.7. Osoita, että kompaktin topologisen avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste.

10.8. Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$ siten, että $\tau_2 \subset \tau_1$, (X, τ_1) on kompakti ja (X, τ_2) on Hausdorffin avaruus. Osoita, että topologiset avaruudet (X, τ_1) ja (X, τ_2) ovat homeomorfiset.²

10.9. Olkoon X Hausdorffin avaruus. Olkoot $E, F \subset X$ kompakteja erillisiä joukkoja. Osoita, että joukoilla E ja F on erilliset ympäristöt.³

10.10. Todista Lemma 10.19.

10.11. Olkoon $X = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \tau(\mathbb{E}^2)|_{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}})$.⁴ Osoita, että yhden pisteen kompaktointi $\widehat{X}$ on metristyvä.

¹Keksi homeomorfismi näiden avaruuksien välille.

²Lause 10.14 auttaa.

³Käytä Propositiota 10.16(1).

⁴Siis X on osajoukko $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{E}^2$ varustettuna metrisen avaruuden $\mathbb{E}^2$ relatiivitopologialla. Käytä apuna Esimerkkiä 10.21.

Luku 11

(Ko)indusoidut topologiat

Tässä luvussa aloitamme kuvausten ja kuvauserheiden avulla määriteltyihin topologioihin tutustumisen. Tutkimme ensin hieman lähemmin relatiivitopologiaa yleistyksineen ja sen jälkeen tekijätopologiaa ja sen yleistyksiä.

11.1 Relatiivitopologia ja lähtötopologia

Propositio 11.1. *Olkoon X joukko ja olkoon (Y, τ) topologinen avaruus. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ kuvaus. Tällöin*

$$\tau^i = \tau_f^i = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$$

on topologia joukossa X . Kuvaus $f: (X, \tau^i) \rightarrow (Y, \tau)$ on jatkuva.

Todistus. Tyhjä joukko ja X ovat kokoelmassa τ^i koska $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ja $f^{-1}(Y) = X$. Olkoot $U_\alpha \in \tau^i$ kaikilla $\alpha \in A$. Tällöin $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ jollekin $V_\alpha \in \tau$. Koska τ on topologia, pätee $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \tau$. Siis

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right) \in \tau^i.$$

Samalla tavalla nähdään, että kokoelman τ^i joukkojen äärelliset leikkaukset ovat kokoelmassa τ^i .

Kuvauksen f jatkuvuus on selvää Lauseen 8.17 nojalla. □

Propositiossa 11.1 määritelty joukon X topologia τ_f^i on kuvauksen f indusoima topologia eli lähtötopologia.^a

^aInduced topology, initial topology. Nimitys lähtötopologia ei ole yleisessä käytössä.

Esimerkki 11.2. Olkoon Y topologinen avaruus ja olkoon $X \subset Y$. Propositiossa 8.6 käsitelty joukon X relatiivitopologia on inklusiokuvauksen $i: X \rightarrow Y$, $i(x) = x$ kaikilla $x \in X$, indusoima topologia. Jos Y on metrinen avaruus, niin Proposition 7.17 nojalla osajoukon X indusoidun metriikan metrinen topologia on joukon X relatiivitopologia.

Olkoon esimerkiksi $X \subset \mathbb{E}^2$ euklidisen tason avoin yksikköpallo varustettuna relatiivitopologialla. Tällöin joukko $\{x \in X : x_1 \leq 0\}$ on suljettu avaruudessa X vaikka se ei ole suljettu avaruudessa $\mathbb{E}^2$. Vastaavasti, jos $X' \subset \mathbb{E}^2$ on suljettu yksikköpallo varustettuna relatiivitopologialla, niin joukko $\{x \in X' : x_1 < 0\}$ on avoin avaruudessa X' vaikka se ei ole avoin avaruudessa $\mathbb{E}^2$.

Propositio 11.3. *Kuvauksen $f: X \rightarrow (Y, \tau)$ indusoima topologia on joukon X karkein topologia, jonka suhteen f on jatkuva.*

Todistus. Jos τ' on joukon X topologia, jonka suhteen f on jatkuva, niin lauseen 8.17 nojalla $f^{-1}(V) \in \tau'$ kaikilla $V \in \tau$. Siis $\tau^i \subset \tau'$. $\square$

Propositio 11.4. *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon (Y, τ) topologinen avaruus. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ bijektio. Tällöin kuvaus $f: (X, \tau^i) \rightarrow (Y, \tau)$ on homeomorfismi.*

Todistus. Riittää osoittaa, että f^{-1} on jatkuva. Olkoon $V \subset X$ avoin. On siis avoin $U \subset Y$, jolle $V = f^{-1}(U)$. Koska f on bijektio, pätee $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V) = U$, joten $(f^{-1})^{-1}(V)$ on avoin. $\square$

Propositio 11.5. *Joukko $F \subset X$ on suljettu kuvauksen $f: X \rightarrow (Y, \tau)$ indusoimassa topologiassa, jos ja vain jos se on jonkin suljetun joukon $E \subset Y$ alkukuva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Propositio 11.6. *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $Y \subset X, Y \neq \emptyset$. Osajoukko $E \subset Y$ on kompakti avaruudessa (X, τ) , jos ja vain jos se on kompakti avaruudessa $(Y, \tau|_Y)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

11.2 Tekijätopologia ja maalitopologia

Propositio 11.7. *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon (Y, τ) topologinen avaruus. Olkoon $f: Y \rightarrow X$ kuvaus. Tällöin*

$$\tau^f = \{U \subset X : f^{-1}(U) \in \tau\}$$

on topologia joukossa X . Kuvaus $f: (Y, \tau) \rightarrow (X, \tau^f)$ on jatkuva.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Propositiossa 11.1 määritelty joukon X topologia τ^f on kuvauksen f koindusoima topologia eli maalitopologia.^a

^aCoinduced topology, final topology. Nimitys maalitopologia ei ole yleisessä käytössä.

Propositio 11.8. *Kuvauksen $f: (Y, \tau) \rightarrow X$ koindusoima topologia on joukon X hienoin topologia, jonka suhteen f on jatkuva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Propositio 11.9. Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoot (Y, τ) ja Z topologisia avaruuksia. Olkoot $f: Y \rightarrow X$ ja $g: X \rightarrow Z$ kuvauksia. Tällöin $g: (X, \tau_f^f) \rightarrow Z$ on jatkuva, jos ja vain jos $g \circ f: (Y, \tau) \rightarrow Z$ on jatkuva.

Todistus. Jos kuvaus g on jatkuva, niin kuvauksen $g \circ f$ jatkuvuus seuraa Propositioista 11.7. Oletetaan, että $g \circ f$ on jatkuva. Olkoon $U \subset Z$ avoin. Oletuksesta seuraa, että $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ on avoin. Maalitopologian määritelmän nojalla $g^{-1}(U)$ on avoin. $\square$

Tärkeä esimerkki maalitopologiasta on tekijätopologia:

Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukolla X . Ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiluokat

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

muodostavat **tekijäjoukon**

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}$$

ja kuvaus $p_\sim: X \rightarrow X/\sim$,

$$p_\sim(x) = [x],$$

on **tekijäkuvaus** eli **luonnollinen tai kanoninen projektio**. Luonnollisen projektion $p_\sim$ määrittämä maalitopologia tekijäjoukolla on tekijäjoukon $X/\sim$ **tekijätopologia**. Topologinen avaruus $(X/\sim, \tau_{p_\sim}^f)$ on topologisen avaruuden X **(topologinen) tekijäavaruus**.

Propositio 11.10. Tekijäkuvaus $p_\sim: X \rightarrow X/\sim$ on jatkuva. $\square$

Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa X . Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on **yhteensopiva** ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa, jos $f(x_1) = f(x_2)$ kaikille $x_1, x_2 \in X$, joille pätee $x_1 \sim x_2$.

Jos kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on yhteensopiva ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa, niin se määrää kuvauksen $f_\sim: X/\sim \rightarrow Y$,

$$f_\sim([x]) = f(x).$$

Tällöin pätee siis $f = f_\sim \circ p_\sim$.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p_\sim \downarrow & \searrow f & \\ X/\sim & \xrightarrow{f_\sim} & Z \end{array}$$

Propositio 11.9 antaa hyödyllisen tuloksen muotoiltuna tekijäavaruuden tilanteeseen.

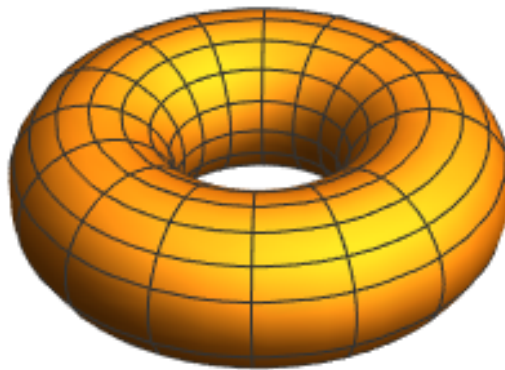
Seuraus 11.11. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio topologisessa avaruudessa X ja olkoon (Y, τ_Y) topologinen avaruus. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ kuvaus, joka on yhteensopiva ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa. Tällöin f on jatkuva, jos ja vain jos $f_\sim$ on jatkuva. $\square$

Esimerkki 11.12. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio avaruudessa $\mathbb{E}^1$, jolla on kaksi ekvivalenssiluokkaa $A = \{x \in \mathbb{E}^1 : x \leq 0\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{E}^1 : x > 0\}$. Tekijäavaruuden $\{A, B\}$ topologia on $\{\emptyset, B, \{A, B\}\}$, joten se on homeomorfinen Esimerkissä 8.4 käsitellyn Sierpínskin avaruuden kanssa. Erityisesti $\mathbb{E}^1/\sim$ ei ole Hausdorffin avaruus.

Propositio 11.13. *Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio topologisessa avaruudessa X . Jos $X/\sim$ on Hausdorffin avaruus, niin ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiuokat ovat suljettuja.*

Todistus. Jos $X/\sim$ on Hausdorffin avaruus, niin sen yhden pisteen joukot ovat suljettuja Proposition 8.10 nojalla. Ekvivalenssiuokat ovat yhden pisteen joukkojen alkukuvia tekijäkuvauksella, joten ne ovat suljettuja Lauseen 8.17 nojalla koska tekijäkuvaus on jatkuva. $\square$

Esimerkki 11.14. (1) Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ tasossa $\mathbb{E}^2$ asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Tällöin jokaisella ekvivalenssiuokalla on täsmälleen yksi edustaja joukossa $[0, 1]^2$. Topologinen tekijäavaruus $\mathbb{E}^2/\sim$ on **torus**.



Kuva 11.1: Torus.

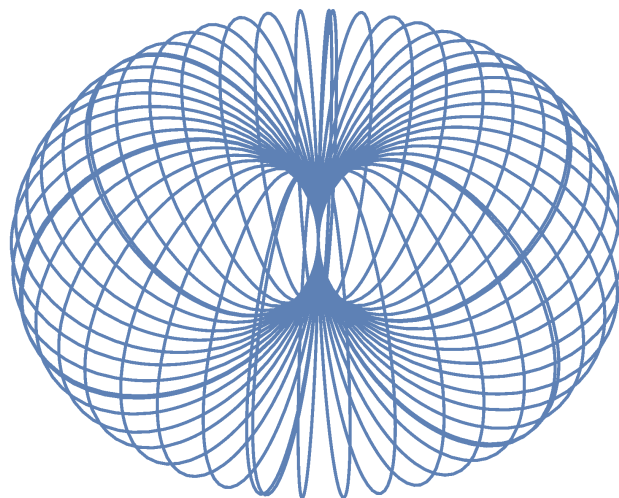
(2) Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ avaruudessa $\mathbb{S}^2$ asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $y = \pm x$. Tekijäavaruus $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ on **(reaalinen) projektiivinen taso**. Jokaisella projektiivisen tason pisteellä on ympäristö, joka on homeomorfinen euklidisen tason pallon kanssa. Edellä käsitellystä toruksesta poiketen projektiivista tasoa ei voi upottaa avaruuteen $\mathbb{E}^3$.

(3) Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukossa $\mathbb{R}$ asettamalla ekvivalenssiuokiksi joukot $\mathbb{Z}$ ja kaikki yhden pisteen joukot $\{x\}$, kun $x \notin \mathbb{Z}$. Ekvivalenssirelaatiossa siis samastetaan kaikki kokonaisluvut yhdeksi pisteeksi ja mitään muita samastuksia ei tehdä. Topologinen tekijäavaruus $\mathbb{E}^1/\sim$ on **numeroituva ympyräkimppu**.

Numeroituva ympyräkimppu ei ole N_1 -avaruus: Cantorin diagonaalitodistuksella voi osoittaa, että pisteellä $[0]$ ei ole numeroituvaa ympäristökantaa. Olkoon U pisteen $[0]$ ympäristö. Määritelmän mukaan $p_{\sim}^{-1}(U)$ on avoin joukko avaruudessa $\mathbb{E}^1$ ja jokaiselle $n \in \mathbb{Z}$ on $r_n > 0$ siten, että $B(n, r_n) \subset p_{\sim}^{-1}(U)$. Olkoot U_k , $k \in \mathbb{N}$ pisteen $[0]$ ympäristöjä. Valitaan pallot $B(k, r_k) \subset \mathbb{E}^1$ siten, että $B(k, r_k) \subset p_{\sim}^{-1}(U_k)$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Tekijätopologian määritelmän nojalla joukko

$$V = p_{\sim}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B(k, \frac{r_{|k|}}{2})\right)$$

on pisteen $[0]$ avoin ympäristö. Yksikään joukoista U_k ei sisälly joukkoon V , joten joukot U_k eivät muodosta pisteen $[0]$ ympäristökantaa.



Kuva 11.2: 50 yhdessä pisteessä leikkaavaa ympyrää.

Proposition 9.10 nojalla numeroituva ympyräkimppu ei ole metristyvä. Se ei ole kompakti koska esimerkiksi peitteellä

$$\left\{p_{\sim}(B(k, \frac{1}{2})) : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{p_{\sim}([k, k+1]) : k \in \mathbb{Z}\}$$

ei ole äärellistä osapeitettä.

11.3 Kuvausperheen maalitopologia

Yhden kuvauksen määräämä maalitopologia voidaan yleistää kuvausperheiden tapaukseen seuraavan tuloksen avulla.

Propositio 11.15. *Olkoon $X \neq \emptyset$. Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot $(X_{\alpha}, \tau_{\alpha})$ topologisia avaruuksia. Olkoot $f_{\alpha}: X_{\alpha} \rightarrow X$ kuvauksia. Tällöin*

$$\tau^f = \{U \subset X : f_{\alpha}^{-1}(U) \in \tau_{\alpha} \forall \alpha \in A\}$$

on topologia joukossa X . Kuvaukset $f_{\alpha}: X_{\alpha} \rightarrow (X, \tau^f)$ ovat jatkuvia.

Todistus. Olkoon τ_{α}^f kuvauksen f_{α} maalitopologia. Tällöin $\tau_{\alpha}^f = \bigcap_{\alpha \in A} \tau_{\alpha}$ on topologia Harjoitustehtävän 8.2 nojalla. Kuvausten f_{α} jatkuvuus seuraa jatkuvuuden karakterisaatiosta Lauseessa 8.17. $\square$

Propositiossa 11.15 määritelty joukon X topologia τ^f on **kuvausperheen $(f_{\alpha})_{\alpha \in A}$ koin-**
dusoima topologia eli maalitopologia.

Propositio 11.16. *Kuvausperheen $f_{\alpha}: (Y_{\alpha}, \tau_{\alpha}) \rightarrow X$ koinduisoima topologia on joukon X hienoin topologia, jonka suhteen kaikki kuvaukset f_{α} ovat jatkuvia.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 11.17. Olkoot X_α topologisia avaruuksia ja olkoon joukossa X kuvausperheen $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$ koindusoima topologia. Olkoon Y topologinen avaruus. Kuvaus $g: X \rightarrow Y$ on jatkuva, jos ja vain jos kaikki kuvaukset $g \circ f_\alpha$ ovat jatkuvia.

Todistus. Jos kuvaus g on jatkuva, niin kuvausten $g \circ f_\alpha$ jatkuvuus seuraa Propositioista 11.15. Oletetaan, että $g \circ f_\alpha$ on jatkuva kaikilla α . Olkoon $U \subset Y$ avoin. Oletuksesta seuraa, että $f_\alpha^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f_\alpha)^{-1}(U)$ on avoin kaikilla α . Maalitopologian määritelmän nojalla $g^{-1}(U)$ on avoin. □

Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot $X_\alpha \neq \emptyset$ joukkoja. Joukkojen X_α **erillinen yhdiste** on

$$\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x, \alpha) : x \in X_\alpha, \alpha \in A\}.$$

Olkoon $\alpha_0 \in A$. Kuvaus $i_{\alpha_0}: X_{\alpha_0} \rightarrow \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$,

$$i_{\alpha_0}(x) = (x, \alpha_0)$$

on **luonnollinen injektio** joukolle X_{α_0} .

Jos $X_\alpha = X$ kaikilla $\alpha \in A$, niin $\coprod_{\alpha \in A} X$ samastuu luonnollisella tavalla tulojoukon $A \times X$ kanssa,

Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot (X_α, τ_α) topologisia avaruuksia. **Erillisen yhdisteen topologia** $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ on

$$\tau = \left\{ U \subset \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha : i_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in A \right\}.$$

Esimerkki 11.18. Varustetaan $\mathbb{E}^1 \times \{0, 1\}$ erillisen yhdisteen topologialla. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukossa $\mathbb{E}^1 \times \{0, 1\}$ asettamalla $(x, 0) \sim (x, 1)$ kaikille $x \in \mathbb{E} - \{0\}$. Tekijäavaruus $(\mathbb{E}^1 \times \{0, 1\}) / \sim$ on homeomorfinen Esimerkissä 8.12 tarkastellun kahden nollan reaalityyppisyyden kanssa. Koska tekijäkuvaus on jatkuva, on helppo nähdä, että joukot I ja I^* ovat kompakteja.

Tämä esimerkki osoittaa, että Hausdorffin avaruuden tekijäavaruus ei välttämättä ole Hausdorffin avaruus vaikka kaikki ekvivalenssiluokat olisivat suljettuja. Siis Proposition 11.13 käänteinen väite ei päde.

Harjoitustehtäviä

11.1. Todista Propositio 11.5.

11.2. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$. Olkoon $E \subset Y$. Osoita, että $(\overline{E})_{\tau|_Y} = (\overline{E})_\tau \cap Y$.

11.3. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$. Olkoon $E \subset Y$. Osoita, että E on kompakti avaruudessa (X, τ) , jos ja vain jos se on kompakti avaruudessa $(Y, \tau|_Y)$.

11.4. Todista Propositio 11.7.

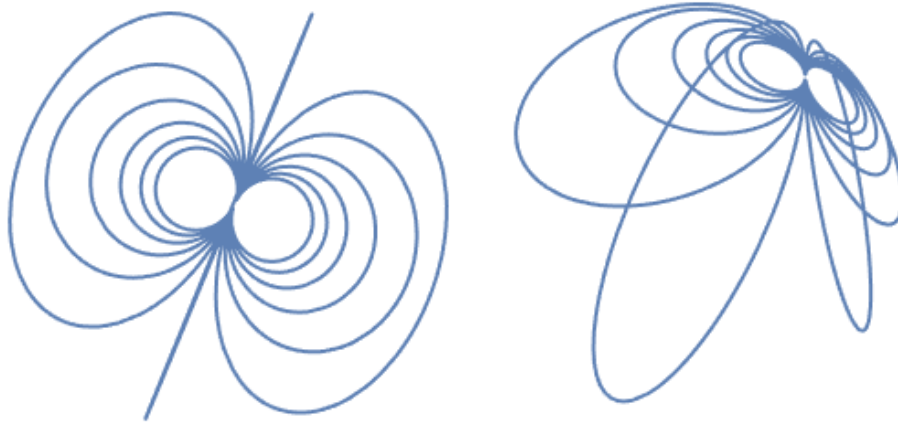
11.5. Todista Propositio 11.8.

11.6. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio avaruudessa $\mathbb{E}^1$, jolla on kaksi ekvivalenssiluokkaa $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{E}^1 - \mathbb{Q}$. Määritä tekijäavaruuden $\mathbb{E}^1 / \sim$ topologia.

11.7. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ avaruudessa $[0, 1] \subset \mathbb{E}^1$ asettamalla $0 \sim 1$ ja muut pisteet ekvivalenteiksi vain itsensä kanssa. Osoita, että $[0, 1] / \sim$ on homeomorfinen avaruuden $\mathbb{S}^1$ kanssa.¹

11.8. Todista Propositio 11.16.

11.9. Joukko $X_0 = \mathbb{E}^1 - \mathbb{Z}$ on erillisten avoimien välien $]k, k + 1[$ numeroituva yhdiste. Esimerkissä 11.14 tarkasteltava numeroituva ympyräkimppu X saadaan lisäämällä topologiseen avaruuteen X_0 yksi piste $[0]$. Topologinen avaruus X_0 on homeomorfinen avaruuden $Y_0 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{Z}$ kanssa, kun Y_0 varustetaan euklidisesta tasosta $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^1$ saatavalla relatiivitopologialla. Stereograafisen projektion käänteiskuvaus kuvaa avaruuden Y_0 homeomorfisesti pallopinnalle $\mathbb{S}^2$. Avaruuden Y_0 yhden pisteen kompaktointi saadaan lisäämällä avaruuteen $\mathcal{S}^{-1}(Y_0)$ yksi piste $e_3 \in \mathbb{S}^2$. Näin saadaan siis kompakti avaruus lisäämällä yksi piste avaruuteen, joka on homeomorfinen avaruuden X_0 kanssa. Miten pisteen e_3 ympäristö avaruudessa $\mathcal{S}^{-1}(Y_0) \cup \{e_3\}$ poikkeaa pisteen $[0]$ ympäristöstä avaruudessa X ?



Kuva 11.3: Kaksi näkymää 13 ympyrästä avaruudessa $\mathcal{S}^{-1}(Y_0) \cup \{e_3\}$.

¹Käytä kuvausta $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Voisiko Lausetta 10.14 käyttää?

Luku 12

Kanta ja esikanta

Tässä luvussa tarkastelemme tapoja määritellä topologia lähtemällä joukkoperheestä, joka ei välttämättä ole topologia. Esimerkki tällaisesta perheestä on metrisen avaruuden avoimien pallojen kokoelma: Kahden pallon leikkaus ei välttämättä ole pallo mutta kaikki metrisen avaruuden avoimet joukot voidaan esittää yhdisteenä avoimista palloista.

12.1 Topologian kanta

Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Topologian τ osajoukko β on topologian τ **kanta**, jos jokaiselle $U \in \tau - \{\emptyset\}$ on $B_i \in \beta$ siten, että

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i$$

jollekin indeksijoukolle I .

Esimerkki 12.1. Avoimet pallot muodostavat metrisen avaruuden metrisen topologian kannan.

Propositio 12.2. *Olko (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia. Olkoon β_Y topologian τ_Y kanta. Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(B) \in \tau_X$ kaikilla $B \in \beta_Y$.*

Todistus. Oletetaan, että topologian τ_Y kannalle β_Y pätee $f^{-1}(B) \in \tau_X$ kaikilla $B \in \beta_Y$. Jos $U \in \tau_Y$, niin on avoimet joukot $V_\alpha \in \beta_Y$, joille pätee $U = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$. Tällöin

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(V_\alpha) \in \tau_X,$$

joten f on jatkuva. Toinen suunta väitteestä on selvä. □

Lemma 12.3. *Olkoon X topologinen avaruus, jonka topologian kanta on β . Joukko $Q \subset X$ on tiheä, jos ja vain jos $Q \cap V \neq \emptyset$ kaikilla $V \in \beta$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 12.4 (Kantalemma). *Olkoon $X \neq \emptyset$. Olkoon $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ kokoelma, jolle pätee*

$$(1) \bigcup_{B \in \beta} B = X \text{ ja}$$

$$(2) \text{ jos } B_1, B_2 \in \beta \text{ ja } x \in B_1 \cap B_2, \text{ niin on } B \in \beta, \text{ jolle pätee } x \in B \subset B_1 \cap B_2.$$

Tällöin β on topologian

$$\tau(\beta) = \left\{ \bigcup_{B \in J} B : J \subset \beta \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

kanta.

Todistus. Osoitetaan, että $\tau(\beta)$ on topologia. Tällöin β on automaattisesti sen kanta.

Kokoelma $\tau(\beta)$ määriteltiin niin, että $\emptyset \in \beta$ ja ehdon (1) nojalla $X = \bigcup_{B \in \beta} B \in \tau(\beta)$. Olkoot sitten $U_1, U_2, \dots, U_N \in \tau(\beta)$ ja olkoon $x \in \bigcap_{j=1}^N U_j$. Joukkojen U_j määritelmän nojalla jokaisella $1 \leq j \leq N$ on $B_j \in \beta$, jolle $x \in B_j \subset U_j$. Ehdon (2) nojalla on $B_x \in \beta$, jolle pätee $x \in B_x \subset \bigcap_{j=1}^N B_j \subset \bigcap_{j=1}^N U_j$. Siis

$$\bigcap_{j=1}^N U_j = \bigcup_{x \in \bigcap_{j=1}^N U_j} B_x \in \tau(\beta).$$

Lisäksi, jos $U_\alpha = \bigcup_{j \in J_\alpha} B_{\alpha j} \in \tau(\beta)$, niin

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{j \in J_\alpha} B_{\alpha j} \in \tau(\beta).$$

Siis kaikki topologian ehdot toteutuvat. $\square$

Lemma 12.5 (Toinen kantalemma). *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Olkoon $\beta \subset \tau$. Jos jokaiselle $U \in \tau$ ja jokaiselle $x \in U$ on $B \in \beta$, jolle $x \in B \subset U$, niin β on topologian τ kanta.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Esimerkki 12.6. Toisen kantalemmän nojalla kokoelma

$$\beta = \tau(\mathbb{E}^1) \cup \left\{ \{-\infty\} \cup]-\infty, a[: a \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{]b, \infty[\cup \{\infty\} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

on laajennetun reaalilukujen joukon

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

topologian kanta.

Lause 12.7. *Separoituvalla metrisellä avaruudella on numeroituva kanta.*

Todistus. Olkoon X separoituva metrisen avaruuden X numeroituva tiheä osajoukko. Osoitetaan, että kokoelma

$$\beta = \left\{ B\left(q_k, \frac{1}{n}\right) : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

on metrisen topologian kanta. Riittää osoittaa, että jokainen metrisen avaruuden X avoin joukko voidaan esittää yhdisteenä kokoelman β palloista. Olkoon siis $U \subset X$ avoin ja olkoon $x \in U$. Tällöin on $n(x) \in \mathbb{N} - \{0\}$, jolle $B\left(x, \frac{1}{n(x)}\right) \subset U$. Tiheyden nojalla on $q(x) \in B\left(x, \frac{1}{2n(x)}\right) \cap Q$ ja kolmioepäyhtälön nojalla $x \in B\left(q, \frac{1}{2n(x)}\right) \subset B\left(q, \frac{1}{n(x)}\right) \subset U$. Siis $U = \bigcup_{x \in U} B\left(q(x), \frac{1}{n(x)}\right)$ $\square$

Seuraus 12.8. *Kompaktilla metrisellä avaruudella on numeroituva kanta.*

Todistus. Seuraa Lauseista 6.6 ja 12.7. □

Topologinen avaruus X on N_2 -avaruus, jos sen topologialla on numeroituva kanta.

12.2 Kompaktin suppenemisen topologia

Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Olkoon

$$C^0(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y : f \text{ on jatkuva}\}.$$

Metristen avaruuksien kurssilla luvussa 5.3 osoitimme, että normiavaruudet

$$C_{\text{raj}}^0(X, \mathbb{R}) = \{f \in C^0(X, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\}$$

ovat täydellisiä, kun X on metrinen avaruus. Erityisesti siis $C^0(X, \mathbb{R})$ on täydellinen metrinen avaruus, kun X on kompakti. Harjoituksissa tarkastimme, että kompaktin metrisen avaruuden X tapauksessa jonon suppeneminen metrisessä avaruudessa $C^0(X, \mathbb{R})$ on sama käsite kuin funktiojonon tasainen suppeneminen.

Propositio 12.9. *Olkoon X kompakti topologinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Lauseke*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

on metriikka avaruudessa $C^0(X, Y)$. Avaruus $(C^0(X, Y), d)$ on täydellinen, jos Y on täydellinen.

Todistus. Kuten tapaus, jossa X on metrinen avaruus ja $Y = \mathbb{E}^1$. Harjoitustehtävä. □

Topologia antaa keinon tarkastella sellaisiakin funktioita, jotka eivät ole rajoitettuja. Olkoon $f \in C^0(X, Y)$, olkoon $K \subset X$ kompakti ja olkoon $r > 0$. Joukkojen

$$B(f, K, r) = \{g \in C^0(X, Y) : d_{C^0(K, Y)}(f, g) < r\}.$$

Propositio 12.10. *Kokoelma*

$$\{B(f, K, r) : f \in C^0(X, Y), K \subset X \text{ kompakti}, r > 0\}$$

on topologian kanta avaruudessa $C^0(X, Y)$.

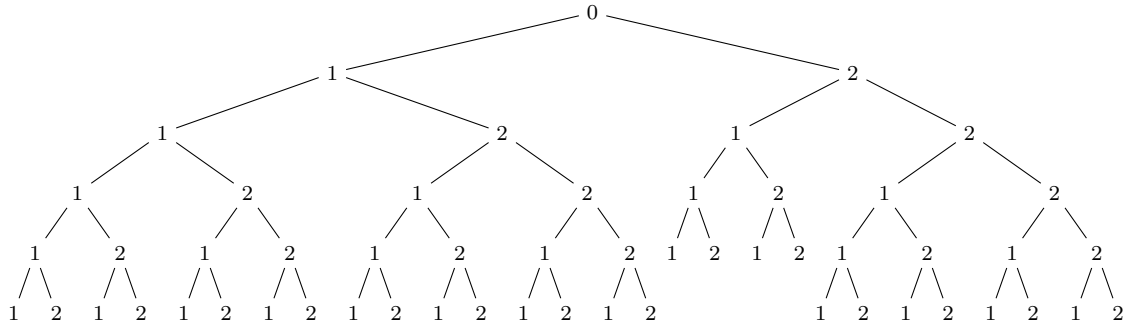
Todistus. Tarkastetaan, että joukkojen $B(f, K, r)$ kokoelma toteuttaa Kantalemmän 12.4 ehdot. Ensimmäinen ehto on selvä koska jokainen yhden pisteen joukko $\{x\} \subset X$ on kompakti ja jokaiselle $f \in C^0(X, Y)$ pätee $f \in B(f, \{x\}, 1)$ kaikilla $x \in X$.

Olkoot $f_1, f_2 \in C^0(X, Y)$, olkoot $K_1, K_2 \subset X$ kompakteja osajoukkoja, olkoot $r_1, r_2 > 0$ ja olkoon $g \in B(f_1, K_1, r_1) \cap B(f_2, K_2, r_2)$. Olkoon

$$s = \min_{j \in \{1, 2\}} (r_j - d_{C^0(K_j, Y)}(f|_{K_j}, g|_{K_j})).$$

Kolmioepäyhtälön nojalla $B(g, K_1 \cup K_2, s) \subset B(f_1, K_1, r_1) \cap B(f_2, K_2, r_2)$. □

Proposition 12.10 antama topologia on em kompaktin suppenemisen topologia avaruudessa $C^0(X, Y)$. Jos jono $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kompaktin suppenemisen topologiassa, sanotaan, että se **suppenee kompaktisti** tai **suppenee tasaisesti kompakteilla joukoilla**.



Esimerkki 12.11. Olkoon X metrinen avaruus, joka saadaan äärettömästä juurellisesta binääripuusta asettamalla jokaisen oksan pituudeksi 1.¹ Tässä puussa on yksi kärki, josta lähtee vain kaksi oksaa. Tämä kärki on puun **juuri** x_0 , jota on alla olevassa kuvassa merkitty luvulla 0. Jokaisesta muusta kärjestä lähtee kolme oksaa. Puun kärjet on kuvassa pirretty niin, että jokaisella pallopinnalla $\{y \in X : d(0, y) = n\}$ olevat kärjet ovat kuvassa rinnakkain. Kuvassa on esitetty avaruuden X pallo $B(0, 5)$ lähes kokonaan, puu jatkuu samanlaisella haarautumisella rajattomasti alaspäin. Jokaisella puun kärjellä $v \in X$, jolle pätee $d(v, 0) = n$, on kaksi kärkeä joukossa $\{y \in X : d(0, y) = n + 1, d(v, y) = 1\}$. Kuvassa näille kärjen **jälkeläisille** on annettu merkit 1 ja 2 ja näin määritellään kuvaus $L: X - \{x_0\} \rightarrow \{1, 2\}$.

Olkoon

$$\mathcal{G} = \{\gamma \in C^0([0, \infty[, X) : \gamma(0) = 0 \text{ ja } \gamma \text{ on isometrinen upotus}\}$$

Kuvaus $\Phi: \mathcal{G} \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{N}-\{0\}} = \{\omega: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \{1, 2\}\}$,

$$\Phi(\gamma) = L \circ \gamma|_{\mathbb{N}-\{0\}},$$

on selvästi bijektio.

Olkoon $\underline{1} \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}-\{0\}}$ jono, jolle $\underline{1}(k) = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon $\underline{1}_n \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}-\{0\}}$ jono, jolle pätee $\underline{1}_n(k) = 1$ kaikilla $1 \leq k \leq n$ ja $\underline{1}_n(k) = 2$ kaikilla $k \geq n$. Tällöin isometristen upotusten jono $(\Phi^{-1}(\underline{1}_n))_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kompakteilla joukoilla raja-arvoon $\Phi^{-1}(\underline{1})$.

12.3 Topologian esikanta

Seuraava kannan ilmoittamista yleisempi menetelmä topologian määrittämiseen on joskus käyttökelpoinen:

¹Kuvan avulla tämä määrittely antaa riittävän tarkan mielikuvan metrisestä avaruudesta X . Täsmälliseen määrittelyyn tarvitaan **tekijämetriikan** käsitettä, joka kertoo muodollisesti, miten numeroituvasta kokoelmasta yksikköjanan $[0, 1]$ kopoioita muodostetaan metrinen avaruus, katso esimerkiksi [BH, s. 64-]

Lemma 12.12. Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko ja olkoon $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ siten, että $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$. Tällöin joukko

$$\beta(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{i=1}^n A_i : A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}.$$

on jonkin topologian $\tau(\mathcal{A})$ kanta.

Todistus. Sovella Kantalemmaa 12.4 □

Lemmassa 12.12 määritelty topologia $\tau(\mathcal{A})$ on joukkoperheen $\mathcal{A}$ virittämä topologia. Joukkoperhe $\mathcal{A}$ on topologian τ esikanta, jos $\tau = \tau(\mathcal{A})$.

Esimerkki 12.13. (1) Topologian kanta on sen esikanta.

(2) Rajoittamattomien välien $]-\infty, b[$ ja $]a, \infty[$ kokoelma, missä $a, b \in \mathbb{E}$, on reaalilukujen euklidisen topologian $\tau(\mathbb{E}^1)$ esikanta.

(3) Laajennettujen rajoittamattomien välien $[-\infty, b[$ ja $]a, \infty]$ kokoelma, missä $a, b \in \mathbb{R}$, on laajennetun reaalilukujen joukon $\overline{\mathbb{R}}$ topologian esikanta.

Harjoitustehtäviä

12.1. Todista Lemma 12.3.

12.2. Todista Lemma 12.5.

12.3. Todista Propositio 12.9.

12.4. Onko metrisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ suljettujen pallojen kokoelma jonkin topologian kanta? Onko tilanne erilainen ultrametrisessä avaruudessa?

12.5. Todista Lemma 12.12.

Luku 13

Tulotopologia

Metristen avaruuksien kurssilla tarkastelimme kahden ja yleisemmin äärellisen monen metrisen avaruuden tuloavaruutta ja määrittelimme siihen metriikoita, katso luku 4.3. Tarkastelemme nyt topologisten avaruuksien tuloavaruuksia yleisemmin.

13.1 Yleinen tulojoukko ja tulotopologia

Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot $X_\alpha \neq \emptyset$ joukkoja. Joukkojen X_α **tulojoukko** on

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ x: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : x(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \alpha \in A \right\}.$$

Olkoon $\alpha_0 \in A$. Kuvaus $p_{\alpha_0}: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_{\alpha_0}$,

$$p_{\alpha_0}(x) = x(\alpha_0)$$

on **projektio** joukolle X_{α_0} .

Jos $X_\alpha = X$ kaikilla $\alpha \in A$, käytetään merkintöjä

$$X^A = \prod_{\alpha \in A} X = \{ \phi: A \rightarrow X \}$$

ja

$$x = (x(\alpha))_{\alpha \in A}.$$

Esimerkki 13.1. Jos indeksijoukko A on äärellinen, esimerkiksi $A = \{1, 2\}$, niin

$$\prod_{\alpha \in \{0,1\}} X_\alpha = \{ \phi: \{0, 1\} \rightarrow A_1 \cup A_2 : \phi(1) \in A_1, \phi(2) \in A_2 \}$$

samastuu luonnollisella tavalla tulojoukon $A_1 \times A_2$ kanssa: kuvaus $\phi \mapsto (\phi(1), \phi(2))$ on bijektio.

Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot X_α topologisia avaruuksia. Tulojoukon $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ **tulotopologia** on se topologia, jonka kanta on

$$\left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \in \tau(X_\alpha), \#\{\alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\} < \infty \right\}.$$

Lemma 13.2. *Kokoelma*

$$\{p_{\alpha_0}^{-1}(U) : U \in \tau(X_{\alpha_0}), \alpha_0 \in A\}.$$

on tuloavaruuden $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ topologian esikanta. $\square$

Esimerkki 13.3. $[0, 1]^\mathbb{N}$ on **Hilbertin kuutio**. Hilbertin kuution osajoukko $]0, 1[^\mathbb{N}$ ei ole avoin koska mikään sen projektioista ei ole koko $[0, 1]$. Itse asiassa harjoituksissa osoitetaan, että joukko $[0, 1]^\mathbb{N} -]0, 1[^\mathbb{N}$ on tiheä Lemman 9.15 nojalla. Toisaalta myös $]0, 1[^\mathbb{N}$ on tiheä.

Lause 13.4. *Olkoot X_α topologisia avaruuksia, kun $\alpha \in J$. Tällöin*

- (1) *jos avaruudet X_α ovat Hausdorffin avaruuksia, niin $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ on Hausdorffin avaruus.*
- (2) *jos avaruudet X_α ovat separoituvia ja J on numeroituva, niin $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ on separoituva.*
- (3) *jos avaruudet X_α ovat metristyviä ja J on numeroituva, niin $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ on metristyvä.*

Todistus. Väite (1) jätetään harjoitustehtäväksi.

(2) Olkoon $Q_\alpha \subset X_\alpha$ numeroituva tiheä osajoukko jokaisella $\alpha \in A$. Olkoon $c_\alpha \in Q_\alpha$ jokin piste jokaisella $\alpha \in J$. Määritellään jokaiselle äärelliselle osajoukolle $I \subset J$

$$Q_I = \prod_{\alpha \in I} Q_\alpha \times \prod_{J-I} \{c_\alpha\}.$$

Joukko Q_I on numeroituva jokaisella tällaisella I , joten joukko

$$Q = \bigcup_{\substack{I \subset J \\ \#I < \infty}} Q_I$$

on numeroituva koska numeroituvan joukon äärellisten osajoukkojen perhe on numeroituva.

Olkoon $V \subset \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ joukon $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ tulotopologian kannan alkio. Tällöin on äärellinen $J_0 \subset J$ ja avoimet joukot $U_\alpha \subset X_\alpha$ kaikille $\alpha \in J_0$, joille $V = \prod_{\alpha \in J_0} U_\alpha \times \prod_{J-J_0} X_\alpha$. Lemman 9.15 nojalla $U_\alpha \cap Q_\alpha \neq \emptyset$ kaikilla $\alpha \in J_0$, joten $V \cap Q \supset V \cap Q_{J_0} \neq \emptyset$. Siis Q on tiheä Lemman 12.3 nojalla.

(3) Voimme olettaa, että $J = \mathbb{N} - \{0\}$. Harjoitustehtävän 13.3 nojalla voimme olettaa, että avaruuden X_α metriikka on rajoitettu ja että $\text{diam } X \leq \frac{1}{\alpha}$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{N} - \{0\}$. Lauseke

$$d(x, y) = \sup_{\alpha \in \mathbb{N} - \{0\}} d_\alpha(x(\alpha), y(\alpha)) \quad (13.1)$$

ei saa negatiivisia arvoja ja se on äärellinen, koska $d_\alpha(x(\alpha), y(\alpha)) \rightarrow 0$, kun $\alpha \rightarrow 0$. Harjoituksissa tarkastamme, että d on metriikka tuloavaruudessa $\prod_{\alpha=1}^\infty X_\alpha$.

Olkoon $a \in (\prod_{\alpha=1}^\infty X_\alpha, d)$ Tällöin

$$B\left(a, \frac{1}{n}\right) = \prod_{\alpha=1}^\infty B\left(a(\alpha), \frac{1}{n}\right),$$

mutta $B\left(a(\alpha), \frac{1}{n}\right) = X_\alpha$ kaikille $\alpha \geq n$, joten

$$B\left(a, \frac{1}{n}\right) = \prod_{\alpha=1}^{n-1} B\left(a(\alpha), \frac{1}{n}\right) \times \prod_{\alpha=n}^\infty X_\alpha.$$

Siis pallot $B(a, \frac{1}{n})$ muodostavat tulotopologian ympäristökannan jokaisessa pisteessä $a \in \prod_{\alpha=1}^\infty X_\alpha$, joten metriikan d metrinen topologia on tulotopologia. $\square$

Esimerkki 13.5. Lauseen 13.4 nojalla Hilbertin kuutio on separoituva ja metristyvä. Erityisesti se on Hausdorffin avaruus ja N_1 -avaruus.

Propositio 13.6. *Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot X_α topologisia avaruuksia. Olkoon $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Tuloavaruuden X jono $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee pisteeseen $x \in X$, jos ja vain jos $p_\alpha(x_k)$ suppenee pisteeseen $p_\alpha(x)$ kaikilla $\alpha \in A$.*

Todistus. Oletetaan, että $x_k \rightarrow x$, kun $k \rightarrow \infty$. Olkoon $\alpha_0 \in A$ ja olkoon $U \in \tau(X_{\alpha_0})$ pisteen $p_{\alpha_0}(x)$ ympäristö avaruudessa X_{α_0} . Joukko

$$\tilde{U} = U \times \prod_{\alpha \in A - \{\alpha_0\}} X_\alpha \in \tau(X),$$

joten on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in \tilde{U}$, kun $k \geq N$. Erityisesti siis $p_{\alpha_0}(x_k) \in U$, kun $k \geq N$.

Oletetaan sitten, että jokaisella $\alpha \in A$ on $x_\alpha \in X_\alpha$ siten, että $p_\alpha(x_k) \rightarrow x_\alpha$, kun $k \rightarrow \infty$. Olkoon $x \in X$ siten, että $p_\alpha(x) = x_\alpha$ jokaisella $\alpha \in A$. Olkoon U pisteen x ympäristö avaruudessa X . Tällöin on avaruuden X tulotopologian kannan alkio V , jolle pätee $x \in V \subset U$. Määritelmän nojalla on äärellinen $J \subset A$ ja avoimet joukot $V_j \subset X_j$ siten, että

$$V = \left(\prod_{j \in J} V_j \right) \times \prod_{\alpha \in A - J} X_\alpha.$$

Oletuksen mukaan jokaisella $j \in J$ on $N(j) \in \mathbb{N}$ siten, että $p_j(x_k) \in V_j$, kun $k \geq N(j)$, joten $x_k \in V \subset U$, kun $k \geq \max_{j \in J} N(j)$. $\square$

Oletetaan, että $X_\alpha = X$ jokaisella $\alpha \in A$. Tuloavaruuden $X^A = \prod_{\alpha \in A} X$ alkio on kuvaus $x: A \rightarrow X$. Proposition 13.6 nojalla avaruuden X^A jono (x_k) suppenee tulotopologiassa kohti alkioita x , jos ja vain jos

$$x_k(a) = E_a(x_k) \rightarrow E_a(x) = x(a)$$

kaikilla $a \in A$. Tulotopologia on siis pisteittäisen suppenemisen topologia.

Lause 13.7. *Olkoot X_k kompakteja metristyviä avaruuksia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin tuloavaruus $X = \prod_{k=1}^\infty X_k$ on kompakti metristyvä avaruus.*

Todistus. Riittää tarkastella tapausta, että X_k on metrinen avaruus. Lauseen 13.4(3) nojalla X on tällöin metrinen avaruus. Osoitetaan X jonokompaktiksi diagonaalitodistuksella, joka käyttää Propositiota 13.6. Olkoon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono avaruudessa X . Jonolla $(p_1(x_k))_{k=1}^\infty$ on suppeneva osajono $(p_1(x_{1k}))_{k=1}^\infty$ koska X_1 on kompakti. Tarkastellaan seuraavaksi jonon $(x_{1k})_{k=1}^\infty$ projektiota avaruuteen X_2 ja niin edelleen. Yksiryiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Esimerkki 13.8. Hilbertin kuutio $[0, 1]^\mathbb{N}$ on kompakti Lauseen 13.7 nojalla.

13.2 Kuvausperheen lähtötopologia

Tulotopologia on tärkein esimerkki yleisemmästä tavasta muodostaa topologia joukkoon $X \neq \emptyset$ kuvausperheen avulla.

Olkoon $X \neq \emptyset$. Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot (Y_α, τ_α) topologisia avaruuksia. Olkoot $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$ kuvauksia. Kokoelman $\{f_\alpha^{-1}(U) : U \in \tau_\alpha, \alpha \in A\}$ virittämä topologia τ^i joukossa X on **kuvausperheen** $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ **indusoima topologia** eli **lähtötopologia**.

Lemma 13.9. Kuvaukset $f_\alpha: (X, \tau^i) \rightarrow Y_\alpha$ ovat jatkuvia kaikilla $\alpha \in A$.

Propositio 13.10. Kuvausperheen $f_\alpha: X \rightarrow (Y_\alpha, \tau_\alpha)$ indusoima topologia on joukon X karkein topologia, jonka suhteen kaikki kuvaukset f_α ovat jatkuvia.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Propositio 13.11. Tulotopologia on projektoiden perheen lähtötopologia. $\square$

Propositio 13.10 on yksi perusteista sille, miksi tulotopologia määritellään juuri sillä tavalla kuin se määritellään. Tulojoukon $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ **laatikkotopologia** on topologia τ_{box} , jonka kanta on

$$\left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \in \tau(X_\alpha) \right\}$$

on aidosti hienompi kuin tulotopologia, jos indeksijoukko A on ääretön.

Olkoon $A \neq \emptyset$ ääretön indeksijoukko ja olkoot X_α Hausdorffin avaruuksia. Tuloavaruuks $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ on kompakti Hausdorffin avaruus Lauseen 13.4 nojalla. Topologinen avaruus $(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau_{\text{box}})$ on Hausdorffin avaruus, koska laatikkotopologia on hienompi kuin tulotopologia. Harjoitustehtävän 10.8 ref nojalla $(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau_{\text{box}})$ ei ole kompakti. Laatikkotopologiassa on siis tämän havainnon mukaan turhan paljon avoimia joukkoja.

Propositio 13.12. Olkoon $J \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot X_α topologisia avaruuksia kaikilla $\alpha \in J$. Olkoon X topologinen avaruus. Kuvaus $f: X \rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ on jatkuva, jos ja vain jos kuvaukset $p_\alpha \circ f: X \rightarrow X_\alpha$ ovat jatkuvia kaikilla $\alpha \in J$.

Todistus. Jos f on jatkuva, niin $p_\alpha \circ f$ on jatkuvien kuvausten yhdistettynä kuvauksena jatkuva. Oletetaan sitten, että kuvaukset $p_\alpha \circ f: X \rightarrow X_\alpha$ ovat jatkuvia kaikilla $\alpha \in J$. Jos $A = U_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \in J - \{\alpha_0\}} X_\alpha = p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ jollain avoimella $U_{\alpha_0} \subset X_{\alpha_0}$, niin

$$f^{-1}(A) = f^{-1}p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) = (p_{\alpha_0} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_0})$$

on avoin. Siis kaikkien esikannan alkioden alkukuvat ovat avoimia. Mutta topologian kannan alkiot saadaan esikannan alkioden äärellisinä leikkauksina, joten niiden alkukuvat ovat myös avoimia, joten f on avoin Proposition 12.2 nojalla. $\square$

13.3 Tihonovin lause

Tässä luvussa yleistämme Lauseen 13.7 yleisen tulon tapaukseen. Tällöin tuloavaruus ei yleensä ole metrinen avaruus, joten numeroituvan tulon tapauksen todistuksen idea ei ole käytettävissä. Todistus vaatii valinta-aksiooman käyttöä jossain muodossa, käytämme sen kanssa yhtäpitävää muotoilua, jota kutsutaan usein Zornin lemmaksi. Tämän kurssin kannalta kyse on aksioomasta.

Olkoon $J \neq \emptyset$. Relaatio $\preceq$ on **järjestys** joukossa J , jos

- (1) $a \preceq a$ kaikilla $a \in J$,
- (2) jos $a \preceq b$ ja $b \preceq a$, niin $a = b$ ja
- (3) jos $a \preceq b$ ja $b \preceq c$, niin $a \preceq c$ kaikilla $a, b, c \in J$.

Pari $(J, \preceq)$ on **(osittain) järjestetty joukko**.

Järjestys $\preceq$ on **täydellinen**, jos kaikille $a, b \in J$ pätee $a \preceq b$ tai $b \preceq a$. Jos joukon J järjestys on täydellinen, niin $(J, \preceq)$ on **ketju**.

Alkio $Y \in J$ on osajoukon $B \subset J$ **yläraja**, jos $b \preceq Y$ kaikilla $b \in B$. Järjestetty joukko, jonka jokaisella ketjulla on yläraja on **induktiivisesti järjestetty joukko**.

Järjestetyn joukon J alkio $m \in J$ on **maksimaalinen**, jos $M \preceq b$ vain, jos $b = M$.

Aksiooma 13.13 (Zornin lemma). *Induktiivisesti järjestetyssä joukossa on maksimaalinen alkio.*

Lause 13.14 (Tihonovin lause). *Kompaktien avaruuksien tuloavaruus on kompakti.*

Tihonovin lauseen todistamista varten on kätevää todistaa joitakin aputuloksia.

Topologisen avaruuden X avoin peite on **hankala**,^a jos sillä ei ole äärellistä osapeitettä.

^aTämä on kätevä määritelmä tässä tilanteessa mutta ei liene yleisesti käytössä.

Lemma 13.15. *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\mathcal{A}$ sen esikanta. Jos avaruudella X on hankala peite, niin sillä on hankala peite, jonka joukot ovat esikannan alkioita.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{H}$ avaruuden X hankalien peitteiden kokoelma. Inklusio $\subset$ on järjestysrelaatio joukossa $\mathcal{H}$. Olkoon $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ketju järjestetyssä joukossa $(\mathcal{H}, \subset)$. Peite $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ on hankala: Jos sillä olisi äärellinen osapeite $U_1, U_2, \dots, U_N$, niin jokaiselle $1 \leq j \leq N$ olisi $\alpha_j \in A$, jolle $U_j \in \mathcal{U}_{\alpha_j}$. Koska $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ on ketju, pätee siis $U_j \in \mathcal{U}_{\alpha_{j_0}}$ jollain $1 \leq j_0 \leq N$. Mutta tällöin peitteellä $U_{\alpha_{j_0}}$ olisi äärellinen osapeite vastoin oletusta. Siis $\mathcal{U}$ on ketjun $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ yläraja.

Zornin lemmän nojalla järjestetyssä joukossa $\mathcal{H}$ on maksimaalinen alkio $\widehat{\mathcal{U}}$. Osoitetaan, että $\widehat{\mathcal{U}} \cap \mathcal{A}$ on hankala peite.

Olkoon $x \in X$. Koska $\widehat{\mathcal{U}}$ on peite, on $U \in \widehat{\mathcal{U}}$, jolle $x \in U \in \widehat{\mathcal{U}}$. Koska $\mathcal{A}$ on esikanta, on $V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathcal{A}$, joille $V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \subset U$. Tällöin $V \in \widehat{\mathcal{U}}$, sillä muuten peitteellä $\widehat{\mathcal{U}} \cup \{V\}$ on äärellinen osapeite. Tämä on mahdotonta koska $V \subset U$ ja $\widehat{\mathcal{U}}$ on hankala.

Osoitetaan, että $V_i \in \widehat{\mathcal{U}}$ jollain $1 \leq i \leq n$. Jos W ja W' ovat avoimia joukkoja ja $W, W' \notin \widehat{\mathcal{U}}$, peitteillä $\widehat{\mathcal{U}} \cup \{W\}$ ja $\widehat{\mathcal{U}} \cup \{W'\}$ on äärelliset osapeitteet $\{W, U_1, \dots, U_n\}$ ja $\{W', U'_1, \dots, U'_m\}$. Tällöin $\{W \cap U_1, \dots, U_n, U'_1, \dots, U'_m\}$ on peitteen $\widehat{\mathcal{U}} \cup \{W \cap W'\}$ äärellinen osapeite, joten $W \cap W' \notin \widehat{\mathcal{U}}$. Siis pätee joko $V_n \in \widehat{\mathcal{U}}$ tai $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \widehat{\mathcal{U}}$ ja toistamalla tämä päättely korkeintaan n kertaa saadaan $V_i \in \widehat{\mathcal{U}}$ jollain $1 \leq i \leq n$.

On siis osoitettu, että $\widehat{\mathcal{U}} \cap \mathcal{A}$ on hankala peite, ja koska $\widehat{\mathcal{U}}$ on hankala, myös tämä peite on hankala. $\square$

Tihonovin lauseen todistus. Olkoot (X_α, τ_α) kompakteja topologisia avaruuksia kaikilla $\alpha \in A$. Jos tuloavaruus $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ei ole kompakti, niin sillä on hankala peite $\mathcal{U}$, jonka joukot ovat esikannan

$$\mathcal{A} = \left\{ p_{\alpha_0}^{-1}(U) : U \in \tau(X_{\alpha_0}), \alpha_0 \in A \right\}.$$

alkioita.

Olkoon $\alpha \in A$. Kokoelma

$$\mathcal{U}_\alpha = \{V \in \tau_\alpha : p_\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{U}\}.$$

ei ole avaruuden X_α peite. Nimittäin, jos se olisi peite, niin sillä olisi äärellinen osapeite $\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$ ja tällöin kokoelma $\{p_\alpha^{-1}(V_1), p_\alpha^{-1}(V_2), \dots, p_\alpha^{-1}(V_N)\}$ olisi hankalan peitteen $\mathcal{U}$ äärellinen osapeite, mikä on mahdotonta.

Jokaisella $\alpha \in A$ on siis $x_\alpha \in X_\alpha - \bigcup \mathcal{U}_\alpha$. Koska $\mathcal{U}$ on peite, on $U \in \mathcal{U}$, jolle $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in U$. Tällöin $U = p_{\alpha_0}^{-1}(U_0)$ jollain $U_0 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$, joten $x_{\alpha_0} \in U_0 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$, mikä on ristiriita. $\square$

Esimerkki 13.16. Tihonovin lauseen nojalla avaruus $[0, 1]^{[0, 1]}$ on kompakti ja Lauseen 13.4(1) nojalla se on Hausdorffin avaruus. Osoitamme, että $[0, 1]^{[0, 1]}$ ei ole jonokompakti: Jokainen $x \in [0, 1]$ voidaan esittää sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{2^k}$$

summana. Joillekin luvuille on kaksi tällaista esitystä, valitaan näille yksi esityksistä. Summaesityksessä esiintyvät kertoimet ovat nyt funktioita $\alpha_k: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, siis ne ovat avaruuden $[0, 1]^{[0, 1]}$ alkioita. Jos jonolla $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ olisi suppeneva osajono $(\alpha_{k_j})_{j \in \mathbb{N} - 1}$, niin jono $(\alpha_{k_j}(x))_{j \in \mathbb{N} - 1}$ suppenisi jokaiselle x . Olkoon $\beta_{k_{2j}} = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon $\beta_k = 0$ kaikilla muilla k . Tällöin

$$\alpha_{k_j} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(x)}{2^k} \right) = \frac{1 + (-1)^j}{2}$$

ei suppene. Siis jonolla $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ ei ole suppenevaa osajonoa.

Harjoitustehtäviä

13.1. Osoita, että joukko $[0, 1]^{\mathbb{N}} -]0, 1[^{\mathbb{N}}$ on tiheä Hilbertin kuutiossa.

13.2. Olkoot X_α Hausdorffin avaruuksia, kun $\alpha \in J$. Osoita, että $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ on Hausdorffin avaruus.

13.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $c > 0$. Osoita, että lauseke

$$d'(x, y) = \min(d(x, y), c)$$

määrittää metriikan joukossa X ja että avaruudet (X, d) ja (X, d') ovat homeomorfiset.

13.4. Osoita, että lauseke (13.1) määrittää metriikan numeroituvassa tuloavaruudessa.

13.5. Olkoot X_k kompakteja metrisiä avaruuksia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$ on kompakti metrinen avaruus.

13.6. Osoita, että joukon $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tulotopologia on sama kuin Harjoitustehtävässä 2.12 määritellyn metriikan metrinen topologia.¹

13.7. Olkoon $e_k: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, $e_k(n) = \delta_{kn}$. Osoita, että Hilbertin kuution $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ jono $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee.

13.8. Olkoon $e_k: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, $e_k(n) = \delta_{kn}$. Osoita, että tuloavaruuden $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jono $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee.

13.9. Todista Propositio 13.10.

¹Avoimet pallot muodostavat metrisen topologian kannan. Millaisia joukkoja avoimet pallot ovat tässä avaruudessa?

Kirjallisuutta

- [Bou] N. Bourbaki. **General topology. Chapters 1–4**. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.
- [BH] M. R. Bridson and A. Haefliger. **Metric spaces of non-positive curvature**, volume 319 of **Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften**. Springer-Verlag, 1999.
- [BBT] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, and B. S. Thomson. **Real analysis**. <http://classicalrealanalysis.info/>, 2nd edition, 2008.
- [Pit] C. G. C. Pitts. **Introduction to metric spaces**. Oliver & Boyd [Longman Group Ltd.], Edinburgh, 1972. <https://archive.org/details/IntroductionToMetricSpaces>.
- [SV] K. Suominen and K. Vala. **Topologia I**. Limes ry, 1987.
- [TBB] B. S. Thomson, J. B. Bruckner, and A. M. Bruckner. **Elementary real analysis**. <http://classicalrealanalysis.info/>, 2nd edition, 2008.
- [Väi1] J. Väisälä. **Topologia II**. Limes ry, 1983.
- [Väi2] J. Väisälä. **Topologia I**. Limes ry, 2007.