

Lukualueet

Harjoitus 6, 10.-11.12.2012

1. Osoita, että kaikille kompleksiluvuille a, b, c pätee

$$(a + b)c = ac + bc.$$

2. Olkoot $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Osoita, että $ab \neq 0$

- (a) määritelmän avulla, ja
- (b) napakoordinaattien avulla.

3. Olkoot $z_k \in \mathbb{C}$ napakoordinaateissa

$$z_k = r_k(\cos \phi_k + i \sin \phi_k),$$

$k = 1, 2, \dots, N$. Määritä luvun $\prod_{k=1}^N z_k = z_1 z_2 \cdots z_N$ esitys napakoordinaateissa.

4. Olkoot $z = 1 + 2i$, $w = -1 - i\sqrt{3}$.

- (a) Määritä lukujen z ja w napakoordinaattiesitykset.
- (b) Määritä luvut $z + w$, zw , $\frac{1}{z}$ ja $\frac{1}{w}$ muodossa $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Osoita, että

- (a) $\overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$, ja
- (b) $|zw| = |z||w|$.

6. Ratkaise yhtälö $z^4 = i$. Havainnollista ratkaisua kuvalla.

7. Ratkaise yhtälö $z^3 = -\frac{1}{3}$. Havainnollista ratkaisua kuvalla.

8. Ratkaise yhtälö

$$-\frac{z}{z+1} = z.$$

Havainnollista ratkaisua kuvalla.

²Vihje: Kirjoita (a)-kohdassa yhtälö yhtälöparina reaali- ja imaginaariosien avulla ja käytä lineaarialgebrää.