

Lukualueet
Harjoitus 5, 3.-4.12.2012

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ylhäältä rajoitettu, $A \neq \emptyset$. Olkoon M joukon A pienin yläraja. Osoita, että jokaisella $\epsilon > 0$ on $a \in A$ siten, että $M - \epsilon < a \leq M$.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Joukko

$$I = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

on *suljettu ja rajoitettu reaalilukuväli*.

2. Olkoon I suljettu ja rajoitettu reaalilukuväli, ja olkoon $A \subset I$, $A \neq \emptyset$. Osoita, että joukon A pienin yläraja on joukossa I .

3. Todista sisäkkäisten välien periaate: Jos $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ ovat sisäkkäisiä suljettuja ja rajoitettuja reaalilukuvälejä, niin niiden leikkaus

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$$

ei ole tyhjä joukko.

4. Osoita, että tehtävän 3 tulos ei päde, jos ei oleteta, että välit ovat rajoitettuja ja suljettuja.

5. Osoita, että tehtävän 3 tulos ei päde, jos $\mathbb{R}$ korvataan rationaalilukujen joukolla.

6. Olkoon $x \in \mathbb{R}_+$, ja olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Osoita, että on $y \in \mathbb{R}_+$ siten, että $y^n = x$.

7. (a) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Osoita, että $a^2 \leq b^2$.

(b) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a \leq b$. Osoita, että $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

8. Onko yhtälöillä

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ja

$$x^2 + x + 1 = 0$$

ratkaisuja reaalilukujen joukossa? Perustele ratkaisusi huolellisesti.

³Vihje: Tarkastele vaikka joukkojen I_j , $j \in \mathbb{N}$ suurimpien alarajojen joukkoa.