

Lukualueet

Harjoitus 4, 26.-27.11.2012

1. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ rationaalilukuja, joille pätee $a \leq c$ ja $b \leq d$. Mitä voit sanoa lukujen ab ja cd keskinäisestä järjestyksestä?
2. Olkoot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ rationaalilukujen Cauchyn jonoja. Osoita, että $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono.
3. Olkoot α ja β rationaalilukujen nollajonoja. Olkoot $a, b \in \mathbb{Q}$. Osoita, että $a\alpha + b\beta$ on nollajono.
4. Osoita, että reaalilukujen kertolasku on hyvin määritelty.
5. Osoita, että jokaisella reaaliluvulla x on edustaja, jossa ei esiinny nollia: on Cauchyn jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jolle $a_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $[(a_n)_{n=1}^{\infty}] = x$.
6. Olkoot $c, d \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $cd \in \mathbb{R}_+$.
7. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että $x^2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
8. Olkoon $x \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että on $q \in \mathbb{Q}$, jolle pätee $0 < q < x$.

⁴Vihje: Lisää nolla sopivassa muodossa.