

Lukualueet

Harjoitus 3, 19.-20.11.2012

1. Olkoon $j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $j(n) = [n, 1]$. Osoita, että

$$j(m+n) = j(m) + j(n)$$

ja

$$j(mn) = j(m)j(n)$$

kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$.

2. Olkoon $\alpha \in \mathbb{Q}$. Osoita, että

(a) $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ tai $-\alpha \in \mathbb{Q}_+$.

(b) $\alpha^2 \in \mathbb{Q}_+$.

3. Yritetään määritellä “laajennetut rationaaliluvut” määrittelemällä joukossa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ relaatio

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Miksi tämä on huono ajatus?

4. Olkoon $\beta \in \mathbb{Q}$, $1 < \beta$. Osoita, että on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $1 < (1 + 1/n)^2 < \beta$ kaikilla $n \geq N$.

5. Osoita, että joukolla

$$A = \{\alpha \in \mathbb{Q} : \alpha^2 < 2\}$$

ei ole pienintä ylärajaa joukossa $\mathbb{Q} \setminus A$.

6. Olkoot $a, b \in \mathbb{Q}$. Osoita, että $|ab| = |a||b|$.

7. Todista rationaalilukujen kolmioepäyhtälö.

8. Osoita, että jokainen rationaalilukujen suppeneva jono on Cauchyn jono.