

Lukualueet
Harjoitus 1, 5.-6.11.2012

1. Olkoon R joukon $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ relaatio, joka määritellään asettamalla
 $a R b$, jos ja vain jos lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 1.
Onko R ekvivalenssirelaatio?

2. Olkoon R luonnollisten lukujen joukossa määritelty relaatio

$$a R b \iff b = a + 5p \text{ jollain } p \in \mathbb{N}.$$

Onko R ekvivalenssirelaatio?

3. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa A . Olkoot $x, y \in A$. Osoita, että ekvivalenssiluokille pätee: Jos $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, niin $[x] = [y]$.

4. Olkoon $\leq$ luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ tavallinen järjestys. Osoita, että $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on osittain järjestetty joukko, jos määritellään kaikille $(a, b), (a', b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq a' \text{ ja } b \leq b'.$$

Onko näin määritelty järjestys täydellinen?

5. Osoita, että kokonaislukujen kertolasku on hyvin määritelty.

6. Osoita, että kokonaislukujen yhteenlasku ja kertolasku ovat kommutatiivisia.

7. Osoita, että kaikille kokonaisluvuille a, b, c pätee osittelulaki

$$(a + b)c = ac + bc = c(a + b).$$

8. Olkoon $[m, n] \in \mathbb{Z} \setminus \{[1, 0], [0, 1]\}$. Osoita, että kaikille $[p, q] \in \mathbb{Z}$ pätee

$$[m, n][p, q] \neq [1, 0].$$