

Lineaarialgebra

Harjoitus 7, 15.3.2005

1. Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus. Olkoon $L : V \rightarrow V$ lineaarikuvaus. Olkoon K V :n ortonormaali kanta. Osoita, että L on symmetrinen, jos ja vain jos L :n matriisi K :n suhteen on symmetrinen.

2. Ovatko seuraavat lineaarikuvaukset symmetrisiä?

(a) Derivointi avaruudessa $\mathcal{P}_2$ sisätulolla

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

(b) $T : M(2) \rightarrow M(2)$, $T(A) = A^t$ (A :n transpoosi) sisätulolla

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}(AB^t)$$

Vihje: Jos tarkastelet kysymystä matriisien avulla, muista, että ortonormaalit kannat on määritetty aiemmissa harjoituksissa.

3. Olkoon V sisätuloavaruus. Olkoon $W \subset V$ äärellisulotteinen vektorialiavaruus. Osoita, että ortogonaalinen projektio on symmetrinen lineaarikuvaus.

4. Osoita, että $n \times n$ -matriisi on ortogonaalinen, jos ja vain jos sen sarakevektorit muodostavat $\mathbb{R}^n$:n ortonormaalin kannan.

5. Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus. Olkoon $L : V \rightarrow V$ lineaarikuvaus, jonka matriisi ortonormaalien kannan suhteen on ortogonaalinen. Osoita, että L on isometria.

Vihje: Riittää osoittaa, että $\|Lv\|^2 = \|v\|^2$ kaikilla $v \in V$.

6. Tunnista ja piirrä yhtälön

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 36$$

määrittämä tasokäyrä.

7. Tunnista ja piirrä yhtälön

$$7x_1^2 - 12x_1x_2 + 2x_2^2 = 3$$

määrittämä tasokäyrä.

8. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

ja olkoon $k \neq 0$. Osoita, että yhtälö

$$x^t A x = k$$

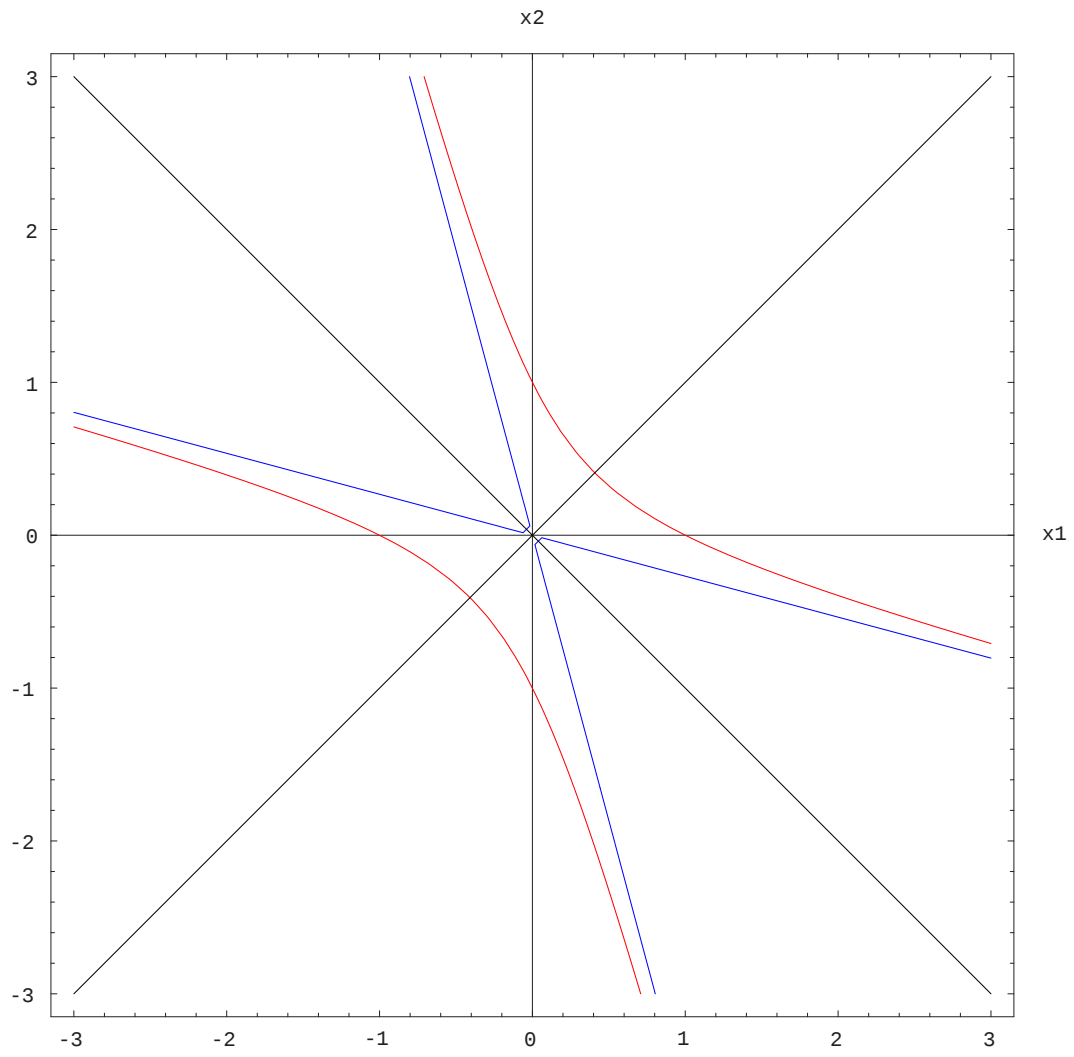
määrittää

(a) hyperbelin, jos $\det A < 0$.

(b) ellipsin (ympyräkin on ellipsi) tai tyhjän joukon, jos $\det A > 0$.

(c) kaksi suoraa tai tyhjän joukon, jos $\det A = 0$.

Mitä tapahtuu, jos $k = 0$?



KUVA 1. Esimerkin 6.14 kuva