

**Lineaarialgebra**  
**Harjoitus 6, 8.3.2005**

**Huomaa:** Tehtäviä on paperin molemmilla puolilla!

1. Määääkö lauseke  $(x|y) = x^t A y$  sisätulon  $\mathbb{R}^2$ :ssa, kun

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

2. Olkoon  $V$  sisätuloavaruus, ja olkoon  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ . Olkoon  $T \subset V$  siten, että  $S \subset T$ . Osoita:

- (a)  $S^\perp$  on  $V$ :n vektorialiavaruus.
- (b)  $S \cap S^\perp = \{0\}$ , jos  $S$  on vektorialiavaruus. Mitä voi tapahtua, jos  $S$  ei ole vektorialiavaruus?
- (c)  $T^\perp \subset S^\perp$ .

3. Olkoon  $\text{tr} : M(n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$  matriisin jälki. Osoita, että

$$(*) \quad \langle A|B \rangle = \text{tr}(AB^t)$$

on sisätulo avaruudessa  $M(n)$ .

Tehtävissä 4 ja 5

$$SM(n) = \{A \in M(n) : A = A^t\}$$

on *symmetristen*  $n \times n$ -matriisien avaruus. Huomaa, että aiemmista harjoitustehtävistä seuraa, että  $SM(n) = S(M(n))$ , missä  $S : M(n) \rightarrow M(n)$  on lineaarikuvaus  $S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$ . Siis symmetristen matriisien avaruus on vektorialiavaruus.

4. (a) Osoita, että

$$(\dagger) \quad (A|B) = \text{tr}(AB)$$

on sisätulo symmetristen matriisien vektorialiavaruudessa  $SM(n)$ .

(b) Osoita, että  $(\dagger)$  ei ole sisätulo  $M(n)$ :ssä.

5. Olkoon  $M(2)$ :n sisätulo määritelty kaavalla  $(*)$ .

(a) Muodosta  $SM(2)$ :n ortonormaali kanta sisätulon  $(*)$  suhteen.

**Vihje:** Harjoitus 3, tehtävä 8(c).

(b) Määritä matriisin  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  ortogonaalinen projektio  $M(2)$ :n aliavaruudelle  $SM(2)$ .

6. Olkoon

$$(\ddagger) \quad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Määritä polynomifunktion  $p_3$ ,  $p_3(x) = x^3$ , ortogonaalinen projektio avaruudelle  $\mathcal{P}_2$ , kun  $\mathcal{P}_3$ :n sisätulo määritellään kaavalla  $(\ddagger)$ .

7. Olkoon  $V$  sisätuloavaruus. Olkoon  $W \subset V$  äärellisulotteinen aliavaruus, ja olkoon  $\text{pr}_W$  ortogonaalinen projektio aliavaruudelle  $W$ . Olkoon  $w \in W$ . Osoita, että kaikille  $v \in V$  pätee  $w \perp (v - \text{pr}_W v)$ .

**8.** Olkoon  $V$  sisätuloavaruus. Olkoon  $W$   $V$ :n äärellisulotteinen vektorialiavaruus. Olkoon  $\text{pr}_W$  ortogonaalinen projektio aliavaruudelle  $W$ . Osoita, että

$$(\S) \quad \|v - \text{pr}_W(v)\| \leq \|v - w\|$$

kaikilla  $v \in V$  ja  $w \in W$ . Osoita, että yhtäsuuruus pätee kaavassa  $(\S)$  vain, jos  $w = \text{pr}_W(v)$ .

**Vihje:** Tehtävä 7.