

Lineaarialgebra
Harjoitus 5, 1.3.2005

1. Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja keksi kannat sen ominaisavaruuksille.

2. Olkoot $a, b, d \in \mathbb{R}$. Osoita, että matriisi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

on diagonalisoituva.

3. Onko matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

diagonalisoituva? Jos se on diagonalisoituva, etsi diagonalisoiva matriisi.

4. Onko matriisi

$$\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

diagonalisoituva? Jos se on diagonalisoituva, etsi diagonalisoiva matriisi.

5. Olkoon $A \in M(n)$ matriisi, jolle pätee $A_{ij} = 0$, jos $i > j$. Määritä A :n ominaisarvot.

6. Olkoon $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus, jolle pätee $L \circ L = 0$.

(a) Osoita, että 0 on L :n ainoa ominaisarvo.

(b) Keksi esimerkki lineaarikuvauksesta $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, jolle pätee $L \circ L = 0$ ja $L \neq 0$.

7. Olkoon $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus, jolle pätee $L \circ L = L$.

(a) Osoita, että vain 0 ja 1 voivat olla L :n ominaisarvoja.

(b) Osoita, että $\text{Im } L \cap \text{Ker } L = \{0\}$.

(c) Osoita, että L on diagonalisoituva.

Vihje: Dimensiolause ja Lause 4.14

8. Olkoon $\mathcal{P}_2$ korkeintaan toisen asteen polynomifunktioiden avaruus. Ovatko nämä sisätuloja avaruudessa $\mathcal{P}_2$?

(a) $(f|g) = f(0)g(0)$.

(b) $(f|g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$.

(c) $(f|g) = f(-1)g(1) + f(0)g(0) + f(-1)g(1)$.