

Lineaarialgebra
Harjoitus 4, 22.2.2005

1. Olkoon $\text{tr} : M(2) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ (A :n jälki).

(a) Määritä kuvauksen $\text{tr} : M(2) \rightarrow \mathbb{R}$:n matriisi $M(2)$:n kannan

$$\left\{ M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ja $\mathbb{R}$:n standardikannan suhteen.

(b) Määritä Im tr ja $\dim \text{Ker tr}$.

2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x) = Ax$.

(a) Etsi lineaarikuvauksen L ominaisarvot ja ominaisvektorit.

(b) Piirrä kuva, joka havainnollistaa kuvausta L .

3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x) = Ax$.

(a) Etsi lineaarikuvauksen L ominaisarvot ja ominaisvektorit.

(b) Piirrä kuva, joka havainnollistaa kuvausta L .

4. Olkoon $\varphi \in \mathbb{R}$. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Osoita, että A :lla on ominaisvektoreita, jos ja vain jos $\varphi = k\pi$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Määritä ominaisarvot ja ominaisvektorit näissä tapauksissa.

5. Olkoon $S : M(2) \rightarrow M(2)$, $S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$.

(a) Määritä $\text{Im } S \cap \text{Ker } S$.

(b) Määritä lineaarikuvauksen S ominaisarvot ja ominaisavaruudet.

6. Määritä matriisien M_1 , M_2 ja M_3 ominaisarvot ja ominaisavaruudet.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Olkoon V n -ulotteinen vektoriavaruus. Olkoon $L : V \rightarrow V$ lineaarikuvaus, jolla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Osoita, että on olemassa V :n kanta, jossa kuvausta L vastaa diagonaalimatriisi.

8. Olkoon V n -ulotteinen vektoriavaruus, $n \in \mathbb{N}$ pariton. Olkoon $L : V \rightarrow V$ lineaarikuvaus. Osoita, että L :llä on ominaisarvo.