

Lineaarialgebra
Harjoitus 3, 15.2.2005

1. Olkoon V vektoriavaruus, $\dim V = n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Olkoon $S \subset V$ siten, että $\langle S \rangle = V$. Osoita, että V :llä on kanta K siten, että $K \subset S$.

2. Olkoon V vektoriavaruus, $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Olkoon W vektoriavaruus, ja olkoon $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Osoita, että $\text{Im } L$ on äärellisulotteinen.

Vihje: Tehtävä 1.

Huom! Tässä tehtävässä ei (tietenkään) saa käyttää dimensiolauseita, koska tätä tulosta käytetään dimensiolauseen todistuksessa.

3. Olkoon $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Osoita:

- (a) Jos L on injektio ja $K \subset V$ on lineaarisesti riippumaton, niin $L(K)$ on lineaarisesti riippumaton.
- (b) Jos L on isomorfismi ja K on V :n kanta, niin $L(K)$ on W :n kanta.

4. Olkoon $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Olkoon $\dim V = \dim W = n \in \mathbb{N}$. Osoita:

$$L \text{ on injektio} \iff L \text{ on surjektio} \iff L \text{ on bijektio}.$$

5. Olkoon $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ vektoriavaruuden V :n kanta. Olkoon W vektoriavaruus, ja olkoot $k'_1, k'_2, \dots, k'_n \in W$. Osoita, että on täsmälleen yksi lineaarikuvaus $L : V \rightarrow W$ siten, että $L(k_i) = k'_i$ kaikilla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

6. Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_2).$$

- (a) Määritä L :n matriisi $\mathbb{R}^2$:n standardikannan suhteen.
- (b) Määritä L :n matriisi $\mathbb{R}^2$:n kannan $\{(1, -2), (3, 2)\}$ suhteen.

7. Olkoon $T : M(n) \rightarrow M(n)$, $T(A) = A^t$ (A :n transpoosi).

(a) Määritä kuvauksen $T : M(2) \rightarrow M(2)$ matriisi $M(2)$:n kannassa

$$(*) \quad \left\{ M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Määritä $\text{Ker } T$ ja $\text{Im } T$.

8. Olkoon $S : M(2) \rightarrow M(2)$, $S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$.

- (a) Osoita, että S on lineaarikuvaus.
- (b) Määritä S :n matriisi $M(2)$:n kannassa $(*)$.
- (c) Etsi kannat vektoriavaruuksille $\text{Im } S$ ja $\text{Ker } S$.